数理解析研究所講究録
864 巻 1994 年 118-123

協力ゲームのKernelとReasonable Set

富山大学経済学部　菊田健作(Kensaku Kikuta)

1．はじめに．

本稿の目的は reasonable set を定義し，さらに prekernel が reasonable set に対する kernel に一致することを示すことである．これを応用して，pre-nucleolus が reasonable set に対する nucleolus に一致することを示すことができる．また，特性関数の分割可能性を仮定すれば，上述のことを提携構造を考えに入れた場合に容易に拡張できる．

n-person cooperative game with side payments（以後 game という）とは順序対(N,v)である．ここに $N=\{1,2,\ .\ .\ .\ ,n\}$ は set of players，また v は N のべき集合上定義された実数値関数で特性関数という． $v(\emptyset)=0$ と仮定する（混乱を生じないかぎり game を v で表す）．N の部分集合を coalition という．有限集合 Z に対し，$|Z|$ は Z に属する元の数を表す.coalition S に対し,R^S は $|S|$-次元数ベクトル空間で，各座標軸が S の各元に対応しているものとする．vector $x\in R^S$ の第i成分を x_i と表す．$S\subset T\subset N$ と $x\in R^T$ に対し,$x|S$ は x の R^S への射影を表す．vector $x,\ y\in R^S$ に対し，$x\leqq y$（または，$y\geqq x$)は，$x_i\leqq y_i$,all $i\in S$ を意味する．vector $x\in R^N$， coalition S に対し，$x(S)=\Sigma_{i\in S}x_i$ (if $S\neq\emptyset$)， $=0$ (if $S=\emptyset$)とする． game v の pre-imputation とは vector $x\in R^N$ で次をを満たすものをいう．

(1) $$x(N)=v(N).$$

game v の pre-imputation 全体の集合を X と表す． game v の reasonable set を：

$$r=\{x\in X:m\leqq x\leqq M\},$$

と定義する．ここに

$$M_i=\max\{v(S)-v(S-\{i\}):i\in S\}\ \text{および}\ m_i=\min\{v(S)-v(S-\{i\}):i\in S\}.$$

[Gerard-Varet/Zamir 1987] は r のみならず，game の superadditive cover を考えることにより他の reasonable set を提案している． 本報告では r のみを考える．

Proposition 1. (i) $x \in R^N$ とする. $x \geqq M^{\cdot}$ となるのは次のときそのときに限る：

$$(2) \qquad v(S) - v(S-T) \leqq x(T), \text{ all } S, T \text{ such that } T \subset S \subset N.$$

(ii) $x \in R^N$ とする. $x \leqq m$ となるのは次のときそのときに限る：

$$(3) \qquad v(S) - v(S-T) \geqq x(T), \text{ all } S, T \text{ such that } T \subset S \subset N.$$

(iii) 次は相互に同値である：

(a) $m \in X$,

(b) $M \in X$, また

(c) $v(S) = I(S)$, all $S \subset N$. ここに, $I \in R^N$ かつ $I_i = v(\{i\})$, all $i \in N$.

(iv) $r \neq \emptyset$.

2. Reasonableness of the prekernel

vector $x \in R^N$ と coalition S に対し, $e(S,x) = v(S) - x(S)$ とおく. $e(S,x)$ を x における S の excess という. $i, j \in N$, $i \neq j$ に対し, i を含み j を含まないような coalition 全体の集合を σ_{ij} と表す. 各 $x \in X$ に対し, i の j に関する maximum surplus を：

$$s_{ij}(x) = \max\{e(S,x) : S \in \sigma_{ij}\}.$$

と定義する. $Y \subset X$, $x \in Y$ とする. $s_{ij}(x) > s_{ji}(x)$ かつ, 十分小さいすべての $\delta > 0$ に対し, $x^{ij}(\delta) \in Y$ であるとき, i outweighs j at x w. r. t. Y という, ここに $x^{ij}(\delta)_h = x_i + \delta$ (if $h = i$), $= x_j - \delta$ (if $h = j$), $= x_h$ (otherwise). $x^{ij}(\delta)$ を δ-transfer という. i, j がともにお互いを outweigh しないとき i と j は in equilibrium at x w. r. t. Y という. 任意の二人の players が in equilibrium at x w. r. t. Y であるような $x \in Y$ の全体を $Y \subset X$ に対する kernel といい, $K(Y)$ と書く. X に対する kernel を特に v の prekernel という. $l, u \in R^N$ に対し,

$$Y(l,u) = \{x \in X : l \leqq x \leqq u\}$$

とおく． $r = Y(m, M)$ である．l, $u \in R^N$ に対し，$Y = Y(l, u)$であると仮定する．このとき，$x \in K(Y)$ となるのは次のときかつそのときに限る：

(4) $s_{ij}(x) > s_{ji}(x)$ ならば $x_j = l_j$ または $x_i = u_i$.

$x \in X$ に対し，$\theta(x)$ は 2^n-vector でその成分は $\{e(S, x)\}_{S \subset N}$ が大きさの順に並んでいるものとする．すなわち，$\theta_i(x) \geqq \theta_j(x)$ whenever $1 \leqq i \leqq j \leqq 2^n$ ．$\theta(x)$ が辞書式順序で $\theta(y)$ より小さいとき，$\theta(x) <_L \theta(y)$ と書く．つまり，ある k に対して$\theta_i(x) = \theta_i(y)$ for all $i < k$, かつ $\theta_k(x) < \theta_k(y)$．$\theta(y) <_L \theta(x)$ でないとき，$\theta(x) \leqq_L \theta(y)$ と書く． $Y \subset X$ とする． 辞書式順序で θ を最小にするような Y の vector の集合を Y に対する nucleolus といい，$N(Y)$ と表す．すなわち，$N(Y) = \{x \in Y : \theta(x) \leqq_L \theta(y)$ for all $y \in Y\}$． X に対する nucleolus を特に game v の pre-nucleolus と呼ぶ． 次の事実 はよく知られている([Schmeidler 1969]の p.1165 参照).

(5) $Y \subset R^N$ とする． $Y \neq \emptyset$ ならば $N(Y) \subset K(Y)$.

ここで $Y \subset X$ に関する二つの条件を考える．

(OPEN) $r \subset Y$ かつ，Y は Xにおけるopen set,

および

(BOX) ある l, $u \in R^n$ に対し， $Y = Y(l, u)$ しかも $l \leqq m$ かつ $M \leqq u$.

X および r はそれぞれ条件(OPEN)，(BOX)を満足する．両方とも $r \subset Y$ を含んでいる．これは次の点で必要である． prekernel が r の extreme point であることがある． この場合，$r \subset Y$ を仮定しないならば,prekernel が r-Y に属することもある． $Y(l, u)$ は R^N における interval と X との共通部分であり；$l = m$, $u = M$ とおくと r に一致する． $Y(l, u)$ が互いに直交する超平面によって定義されるということは δ-transfer が Y から出ていかないという点で重要であると考える．Y が open set である条件は δ-transfer の定義に関連している．

Theorem 2(i) は，これらの条件の下では δ-transfer を考えに入れる手間を省くことができることを述べている． [Maschler/Peleg/Shapley 1979] の p.314 では関数 v にある条件を課すことにより同様

のことを示している. Theorem 2(iv) は [Schmeidler 1969] の Theorem 1 に関連している. さらに [Maschler 1992] の Theorem 5.2 を参照. ここでは 条件(OPEN)の下で Y の closedness を仮定しない.

Theorem 2. $Y \subset X$ とし, 条件(OPEN)または(BOX)を仮定する.

(i) $x \in K(Y)$とする. すると $s_{ij}(x) = s_{ji}(x)$ for all $i, j \in N$, $i \neq j$.

(ii) $K(Y) \subset r$.

(iii) $K(Y) = K(r)$.

(iv) $N(Y) \neq \emptyset$.

(v) $N(Y) = N(r)$.

Example 3. $n = 3$ とする., $v(123) = 5$, $v(12) = v(13) = v(23) = 3$, and $v(i) = 0$ for $i = 1,2,3$. すると $M_i = 3$, $m_i = 0$ for $i = 1,2,3$, また $r = \{(y_1, y_2, y_3) : 0 \leqq y_i \leqq 3,\ i = 1,2,3,$ かつ $y(123) = 5\}$. $Y \subset X$ を $Y = \{(y_1, y_2, y_3) : 0 \leqq y_1,\ 3 \geqq y_2,\ y_3 \geqq 0,\ 8y_1+5y_2 \geqq 10,\ 4y_1+y_2 \leqq 14,$ かつ $y(123) = 5\}$. Y は convex かつ compact. $x = (5, -6, 6)$ とおく. $x \in Y\text{-}r$ かつ x は Y の extreme point. さらに $s_{21}(x) > s_{12}(x)$, $s_{13}(x) > s_{31}(x)$, かつ $s_{23}(x) > s_{32}(x)$. よって, x から発する3本の半直線が x のみを Y と共有することにより, $x \in K(Y)$ であることがわかる.

Theorems 2(iii) と(v) において $Y = X$ とおくと次を得る.

Corollary 4. $K(X) = K(r)$ かつ $N(X) = N(r)$.

game v に対する imputation set を $\underline{X} = \{x \in X : x \geqq I\}$と定義する. $K(\underline{X})$ を v の kernel という. v が次を満足するとき zero-monotonic という: $T \subset S \subset N$ であるようなすべての S, T に対して, $v(S) \geqq v(T) + I(S\text{-}T)$. Corollary 4 と Theorem 2 とから, 次がわかる:もしも v が zero-monotonic であれば, $K(\underline{X}) = K(X)$ ([Maschler et al.1972] の Theorem 2.7). これは以下のようにしてわかる. まず, v が zero-monotonic であるための必要十分条件は $m = I$ が成り立つことである. 次に, $m = I$ であるための必要十分条件は $Y(m, u^*) = X$ が成り立つことである. ここに, $u^* \in R^N$ かつ $u^*_i = v(N)\text{-}m(N\text{-}\{i\})$, all $i \in N$. ゆえに もし v が zero-monotonic ならば, $K(X) = K(Y(m, u^*))$. さらに $u^* \geqq M$ であることは容易にわかる. これより, $Y(m, u^*)$ は(BOX)を満足することがわかる. ゆえに Theorem 2(iii) と Corollary 4 とから, $K(Y(m, u^*)) = K(r) = K(X)$. 結局

$K(\underline{X}) = K(X)$.

3. 提携構造を持つGame.

本節では，これまでの議論を提携構造を持つような game の場合に拡張する．与えられた提携構造に関する特性関数の分割可能性を仮定すれば，第2節の議論を応用できる．

v を game とする． $B = \{B_1, \ldots, B_h\}$ を N の h ($\geqq 2$) 個の空でない部分集合への分割とする． B を N 上の提携構造という． $H = \{1, \ldots, h\}$ とおく． 本節では， v は B に関して分割可能であると仮定する． i.e., 各 $S \subset N$ に対し，

$$(6) \qquad v(S) = v(S \cap B_1) + \ldots + v(S \cap B_h).$$

各 $t \in H$ に対し， (B_t, v_t) は次のような game を表す：B_t は set of players また v_t は 特性関数ですべての $T \subset B_t$ に対し $v_t(T) = v(T)$． この game を簡単に v_t と表す． X^t, M^t, m^t, r^t. $e^t(\cdot,\cdot)$, $\theta^t(\cdot)$, $K^t(\cdot)$, そして $N^t(\cdot)$ をこの game に即して定義する．また (OPEN) および(BOX) を $(\text{OPEN})^t$ および$(\text{BOX})^t$ と表す．$x \in R^N$ と $t \in H$ に対し， ${}^t x \equiv x|B_t$, ${}^{-t}x \equiv x|(N-B_t)$ とおく． $X(B) \equiv X^1 \times \cdots \times X^h$ および $r(B) \equiv \{x \in X(B) : m \leqq x \leqq M\}$ と定義する． ${}^tM = M^t$ かつ ${}^tm = m^t$ for all $t \in H$ であるから $r(B) = r^1 \times \cdots \times r^h$ である． $i, j \in B_t$, と $x \in X^t$に対し， $s^t_{ij}(x) \equiv \max\{e(S,x) : S \in \sigma_{ij}, S \subset B_t\}$ と定義する． (6)より， $x \in X(B)$, $i, j \in B_t$ および $t \in H$に対し，

$$(7) \qquad s_{ij}(x) - s_{ji}(x) = s^t_{ij}({}^t x) - s^t_{ji}({}^t x).$$

$Y \subset X(B)$ に対する kernel を $K(Y,B)$と表す，i.e.,

$$K(Y,B) \equiv \{x \in Y : \text{任意の } t \in H,\ i,j \in B_t\text{に対し，} s_{ij}(x) > s_{ji}(x) \text{ ならば } x^{ij}(\delta) \notin Y \text{ for all sufficiently small } \delta > 0\}.$$

Proposition 5. $B = \{B_1, \ldots, B_h\}$ を N 上の提携構造とする． (6)を仮定する． $Y = Y^1 \times \cdots \times Y^h$, $Y_t \subset X^t$ for all $t \in H$ と仮定する． 各 $t \in H$ に対し Y_t は $(\text{OPEN})^t$ かまたは $(\text{BOX})^t$を満足するとする．

(i) $N(Y) \subset K(Y,B)$ かつ $N(Y) \neq \emptyset$,

(ii) $K(Y,B) = K(r(B),B)$, さらに

(iii) $N(Y) = N(r(B))$.

(6) は $K(X(B),B)$ と $K(r(B),B)$ が一致するための必要条件ではない. これは次の例からわかる. $n = 3$. $v(123) = 5$, $v(13) = v(23) = -3$, $v(12) = 6$, $v(i) = 0$ for $i = 1,2,3$とする. $B = \{\{1,2\},\{3\}\}$. v は(6)を満足しない. しかし $K(X(B),B) = K(r(B),B) = \{(3,3,0)\} \subset r(B)$. [Gerard-Varet and Zamir 1987] の p.137 では特性関数の優加法性が仮定されている.

諸命題の証明は省略する. 参考文献の [Kikuta 1994] を参照されたい.

参考文献.

Aumann,R.J. and J.H.Dreze: Cooperative Games with Coalition Structures. International Journal of Game Theory, Vol.3 (1974),217-237.

Gerard-Varet,L.A. and S.Zamir: Remarks on the Reasonable Set of Outcomes in a General Coalition Function Game. International Journal of Game Theory, Vol.16 (1987),123-143.

Kikuta, K.:The Kernel for the Reasonable Set in a Cooperative Game. mimeo. February, 1994.

Maschler,M.: The Bargaining Set, Kernel, and Nucleolus. Ch.18 of Handbook of Game Theory, Vol.1, Edited by R.J.Aumann and S.Hart. Elsevier Science Publishers 1992.

Maschler,M.,B.Peleg and L.S.Shapley: The Kernel and Bargaining Set for Convex Games. International Journal of Game Theory, Vol.1 (1972),73-93.

Maschler,M.,B.Peleg and L.S.Shapley: Geometric Properties of the Kernel, Nucleolus and Related Solution Concepts. Mathematics of Operations Research, Vol.4 (1979), 303-338.

Milnor,J.W.: Reasonable Outcomes for n-Person Games. RM-916, The Rand Corporation, Santa Monica, CA. (1952).

Schmeidler,D.:The Nucleolus of a Characteristic Function Game. SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol.17(1969), 1163-1170.

Shapley,L.S.:A Value for n-Person Games. Annals of Mathematics Study, Vol.28, 1953, 307-317.