数理解析研究所講究録
第 864 巻 1994 年 94-102

On Approximate Controllability of Coupled One-dimensional Wave Equation with Coupled Point Control

埼玉大学大学院　理工学研究科
大成　承 (Sho OHNARI)

1　序

2種類の弦がつながって、またはある意味でつながって振動している時に、両弦の接続点に物理的作用を加えることによって、ある時刻における弦の状態（弦の波形及び速度）をある一定時刻の後に別の状態に制御するという問題を考える。この問題は数学的には次の1次元波動方程式の可制御性の問題になる。すなわち、両弦の x 軸とし、時刻 t における位置 x での変位を $Y(x,t)$ とする。このとき方程式は

(1)
$$\begin{aligned} \rho_1 Y_{tt}(x,t) - T_1 Y_{xx}(x,t) &= 0, \quad 0<x<m,\ 0<t<T \\ \rho_2 Y_{tt}(x,t) - T_2 Y_{xx}(x,t) &= 0, \quad m<x<1,\ 0<t<T \end{aligned}$$

となり、境界条件は

(2)
$$\begin{aligned} Y(0,t) = Y(1,t) &= 0, & 0<t<T \quad &\text{（固定端）} \\ Y(m^-,t) - Y(m^+,t) &= f_1(t) & & \\ T_1 Y_x(m^-,t) - T_2 Y_x(m^+,t) &= f_2(t) & 0<t<T \quad &\text{（境界制御）} \end{aligned}$$

となる。(2) の境界制御は、次の3つのタイプを行うものとする。タイプ1では、$f_1 \equiv 0$ とし f_2 のみを制御する。タイプ2では、$f_2 \equiv 0$ とし f_1のみを制御する。タイプ3では、f_1、f_2の両方を制御する。制御の物理的意味はタイプ1の場合、両弦の接続点 $x=m$ で時

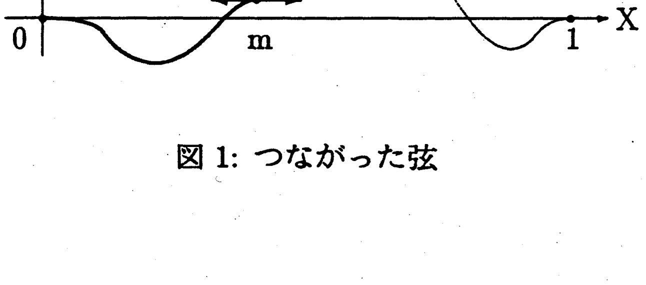

図 1: つながった弦

刻 t に張力 $f_2(t)$ を加える、タイプ2は両弦の張力を等しくしたまま、時刻 t で変位の差を $f_1(t)$ にする、タイプ3は張力及び変位の差の両方を制御するということである。$\mathcal{X}$ を $(0,1)$ 上のある関数空間の積空間、$\mathcal{V}$を $(0,T)$ 上のある関数空間とする。このとき、システム(1)(2) が $\mathcal{X}$で制御 $\mathcal{V}$によって可制御であるとは、$\mathcal{X}$に属する初期データ $\{u_0(x), v_0(x)\}$ と終期データ $\{u_1(x), v_1(x)\}$ を任意に与えた時、$\mathcal{V}$に属する制御関数 f_1、f_2が存在して、初期条件

$$Y(x,0) = u_0(x),\ Y_t(x,0) = v_0(x), \quad 0 < x < 1 \tag{3}$$

及び終期条件

$$Y(x,T) = u_1(x),\ Y_t(x,T) = v_1(x), \quad 0 < x < 1 \tag{4}$$

を満たす (1)(2) の解が存在する（すなわち、$\{u_0(x), v_0(x)\}$ から $\{u_1(x), v_1(x)\}$ へ制御出来る）ことを言う。更に $\mathcal{Z}$をある関数空間の積空間とする。このとき、システム (1)(2) が $\mathcal{Z}$で制御 $\mathcal{V}$によって近似可制御であるとは、$\mathcal{Z}$から初期及び終期データを任意に与えた時、少なくともその近傍に属するデータからデータに制御出来ることである。特にシステム (1)(2) が $\mathcal{X}$で制御 $\mathcal{V}$によって可制御であって、$\mathcal{X}$が $\mathcal{Z}$で稠密であれば近似可制御になる。結論を次の定理で述べると

定理 1　　$\Gamma = \dfrac{(1-m)\sqrt{\frac{\rho_2}{T_2}}}{m\sqrt{\frac{\rho_1}{T_1}}}$ とし、T_0を十分大きな正数とし、$T > T_0$とする。このときシステム (1)(2) が $\mathcal{Z} = L^2(0,1) \times L^2(0,1)$ で制御 $\mathcal{V} = H_0^2(0,T) = \{f \in H^2(0,T) \mid f^{(i)}(0) = f^{(i)}(T) = 0,\ i = 0,1\}$ によって近似可制御であるための必要十分条件は、タイプ1の場合、Γが無理数である。タイプ2の場合、Γが無理数であるかまたは有理数$\dfrac{p}{q}$（p、q は既約）で p または q が偶数である。

タイプ3に関しては

定理 2　　システム (1)(2)（タイプ3）は $\mathcal{Z} = L^2(0,1) \times L^2(0,1)$ で制御 $\mathcal{V} = H_0^2(0,T)$ によって常に近似可制御である。

注1　　制御空間としてはもっと滑らかなものとしても近似可制御性はそのまま成り立つ。すなわち、n を2以上の自然数とした時、正数 T_n が存在して $T > T_n$とするとシステム (1)(2) は $\mathcal{Z} = L^2(0,1)\times L^2(0,1)$ で制御 $\mathcal{V} = H_0^n(0,T) = \{f \in H^n(0,T) | f^{(i)}(0) = f^{(i)}(T) = 0,\ i = 0,1,\cdots,n-1\}$ によって近似可制御である。

セクション2では可制御性の問題 (1)-(5) に対して Russell [8]、Krabs [4]の制御理論（infinite moment methods）を適用するための定式化を行う。

セクション3では定理1、定理2の証明を行う。

セクション4ではいくつかの補足をする。

2　定義及び制御理論のための定式化

可制御問題 (1)-(4) をまず初期値問題 (1)-(3) を解き、その解 $Y = Y(x,t)$ で (4) を満たすような f_1及び f_2を $\mathcal{V}$の中から見つけるという順に解く。

初期値問題 (1)-(3) の解を $0 < x < m$ 上と $m < x < 1$ 上に分け、それぞれにおいて次の 3 つの方程式の解の和の形で与える。

$r^i = r^i(x)$ を

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} r^i(x) = 0 & \begin{cases} 0 < x < m \ (i=1) \\ m < x < 1 \ (i=2) \end{cases} \\ r^1(m) - r^2(m) = 0 & \\ T_1 \frac{d}{dx} r^1(m) - T_2 \frac{d}{dx} r^2(m) = 1 & \end{cases}$$

の解、$s^i = s^i(x)$ を

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} s^i(x) = 0 & \begin{cases} 0 < x < m \ (i=1) \\ m < x < 1 \ (i=2) \end{cases} \\ s^1(m) - s^2(m) = 1 & \\ T_1 \frac{d}{dx} s^1(m) - T_2 \frac{d}{dx} s^2(m) = 0 & \end{cases}$$

の解、$z^i = z^i(x,t)$ を

$$\text{(7)} \quad \begin{cases} \rho_1 Z^1_{tt}(x,t) - T_1 Z^1_{xx}(x,t) = -r^1(x) f_1''(t) - s^1(x) f_2''(t), \quad 0 < x < m,\ 0 < t < T \\ \rho_2 Z^2_{tt}(x,t) - T_2 Z^2_{xx}(x,t) = -r^2(x) f_1''(t) - s^2(x) f_2''(t), \quad 0 < x < m,\ 0 < t < T \\ Z^1(m,t) = Z^2(m,t), \quad T_1 Z^1_x(m,t) = T_2 Z^2_x(m,t), \quad 0 < t < T \\ Z^1(x,0) = u_0|_{(0,m)}(x), \ \ 0 < x < m; \ \ Z^2(x,0) = u_0|_{(m,1)}(x), \ \ m < x < 1 \\ Z^1_t(x,0) = v_0|_{(0,m)}(x), \ \ 0 < x < m; \ \ Z^2_t(x,0) = v_0|_{(m,1)}(x), \ \ m < x < 1 \end{cases}$$

の解とする。このとき、(1)-(3) の解 Yは、

$$\text{(8)} \qquad \begin{aligned} Y|_{(0,m)} &= Z^1 + r^1 f_1 + s^1 f_2 \\ Y|_{(m,1)} &= Z^2 + r^2 f_1 + s^2 f_2 \end{aligned}$$

で与えられる。システム (5)(6) の常微分方程式は容易に解けて、解の一意存在がわかる。さらに、システム (7) が解ければ、f_1、f_2は $\mathcal{V} = H_0^2(0,T)$ の元であることから $t = 0, T$で 0 となるので、可制御問題 (1)-(4) は

$$\text{(9)} \quad \begin{cases} Z^1(x,T) = u_1|_{(0,m)}(x), \ \ 0 < x < m; \ \ Z^2(x,T) = u_1|_{(m,1)}(x), \ \ m < x < 1 \\ Z^1_t(x,T) = v_1|_{(0,m)}(x), \ \ 0 < x < m; \ \ Z^2_t(x,T) = v_1|_{(m,1)}(x), \ \ m < x < 1 \end{cases}$$

とすると、システム (7) に対する可制御問題 (7)(9) となる。システム (7) については、半群理論（Yoshida [12]）を用いて、以下のように解の一意存在がいえる。

空間 $H = L^2(0,m) \times L^2(m,1)$ に内積

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle_H = \rho_1 (u_1, v_1)_{L^2(0,m)} + \rho_2 (u_2, v_2)_{L^2(m,1)}$$

を入れたものは、ヒルベルト空間である。又、Hにおける作用素 A を

$$
\begin{aligned}
D(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in H^2(0,m) \times H^2(m,1) \,\middle|\, u_1(0) = u_2(1) = 0, \right. \\
&\qquad \left. u_1(m) = u_2(m),\ T_1 u_1'(m) = T_2 u_2'(m) \right\} \\
A\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{T_1}{\rho_1} u_1'' \\ -\frac{T_2}{\rho_2} u_2'' \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

で定義すると、次の性質を持つ。

補題 1　　A は H上で正値自己共役作用素でコンパクトな逆を持つ。

証明　　部分積分より、$\binom{u_1}{u_2}$、$\binom{v_1}{v_2} \in D(A)$ のとき

$$
\begin{aligned}
\left\langle A\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle_H &= -\int_0^m T_1 u_1'' \cdot v_1 dx - \int_m^1 T_2 u_2'' \cdot v_2 dx \\
&= -\int_0^m u_1 \cdot T_1 v_1'' dx - \int_m^1 u_2 \cdot T_2 v_2'' dx \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle_H
\end{aligned}
$$

よって A は対称作用素である。正値性、自己共役性や逆作用素の存在とコンパクト性も通常の証明と同じようにして示すことができる。

さらに、

$$
U = \begin{pmatrix} Z^1 \\ Z^2 \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} Z_t^1 \\ Z_t^2 \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} r^1 \\ r^2 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} s^1 \\ s^2 \end{pmatrix}
$$

$$
U_0 = \begin{pmatrix} u_0|_{(0,m)} \\ u_0|_{(m,1)} \end{pmatrix},\ V_0 = \begin{pmatrix} v_0|_{(0,m)} \\ v_0|_{(m,1)} \end{pmatrix},\ U_1 = \begin{pmatrix} u_1|_{(0,m)} \\ u_1|_{(m,1)} \end{pmatrix},\ V_1 = \begin{pmatrix} v_1|_{(0,m)} \\ v_1|_{(m,1)} \end{pmatrix}
$$

とおくと、システム (7) 、(9) は

$$
(10) \qquad \begin{cases} \begin{bmatrix} U_t \\ V_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} - f_1''(t) \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix} - f_2''(t) \begin{bmatrix} 0 \\ S \end{bmatrix},\ 0 < t < T \\ \begin{bmatrix} U(0) \\ V(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \end{bmatrix} \end{cases}
$$

$$
(11) \qquad \begin{bmatrix} U(T) \\ V(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \end{bmatrix}
$$

となる。補題 1 より、作用素 $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{bmatrix}$ は定義域を $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = D(A) \times D(A^{\frac{1}{2}})$ としてヒルベルト空間 $\mathcal{H} = D(A^{\frac{1}{2}}) \times H$ で C_0−半群$\left(e^{t\mathcal{A}}\right)_{t \geq 0}$を生成する。(Pazy [6])

定義1　　システム (10) のマイルド解$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$を

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = e^{t\mathcal{A}} \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \end{bmatrix} - \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}} \left(f_1''(s) \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix} + f_2''(s) \begin{bmatrix} 0 \\ S \end{bmatrix} \right) ds \tag{12}$$

で定義する。

<u>注2</u>　　$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \in C([0,T];\mathcal{H})$

<u>注3</u>　　$\begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \end{bmatrix} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$、$f_1''(s)$、$f_2''(s) \in C^1(0,T)$（特に $f_1''(s)$、$f_2''(s) \in H_0^4(0,T)$）の時、マイルド解$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$はシステム (10) の $C^1([0,T];\mathcal{H}) \cap C([0,T];\mathcal{D}(\mathcal{A}))$ に属する解となる。(Pazy [6])

定義2　　システム (10) の時間T、制御 $\mathcal{V} = H_0^2(0,T)$ による到達可能集合 $\mathcal{R}_T(\mathcal{V})$ を

$$\mathcal{R}_T(\mathcal{V}) = \left\{ \begin{bmatrix} U(T) \\ V(T) \end{bmatrix} = \int_0^T e^{(T-s)\mathcal{A}} \left(f_1''(s) \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix} + f_2''(s) \begin{bmatrix} 0 \\ S \end{bmatrix} \right) ds \;\middle|\; f_1, f_2 \in \mathcal{V} = H_0^2(0,T) \right\} \tag{13}$$

で定義する。

定義3　　システム (10) が時間T、制御 $\mathcal{V} = H_0^2(0,T)$ によって $\mathcal{Z} = L^2(0,1) \times L^2(0,1)$ で近似可制御であるとは

$$\overline{\mathcal{R}_T(\mathcal{V})} = \mathcal{Z} = L^2(0,1) \times L^2(0,1) \tag{14}$$

となること。ただし$\overline{\mathcal{R}_T(\mathcal{V})}$は $\mathcal{R}_T(\mathcal{V})$ の $\mathcal{Z}$での閉包。

3　定理1、定理2の証明のあらすじ

補題1により A の固有値$\lambda_i (i = 1, 2, \cdots)$ は $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots$なるように取れ、対応する固有関数$\Phi_i (i = 1, 2, \cdots)$ は Hの完全正規直交系に取れる。さらに詳しく計算すると

補題2　　$\lambda_i (i = 1, 2, \cdots)$ は

$$\sqrt{T_2\rho_2} \sin\sqrt{\frac{\rho_1}{T_1}}\lambda m \cos\sqrt{\frac{\rho_2}{T_2}}\lambda(1-m) + \sqrt{T_1\rho_1} \cos\sqrt{\frac{\rho_1}{T_1}}\lambda m \sin\sqrt{\frac{\rho_2}{T_2}}\lambda(1-m) = 0 \tag{15}$$

の解であり、さらに正数γが存在して

$$\lambda_{i+1} - \lambda_i \ge \gamma \quad (i = 1, 2, \cdots) \tag{16}$$

が成り立つ。又、固有関数$\Phi_i(i=1,2,\cdots)$は

$$\Phi_i = \begin{bmatrix}\phi_i\\ \psi_i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_i \sin\sqrt{\frac{\rho_1}{T_1}\lambda_i}x\\ B_i \sin\sqrt{\frac{\rho_2}{T_2}\lambda_i}x\end{bmatrix}, \quad c < |A_i|, |B_i| < d \tag{17}$$

ただしc、dはiに独立な正の定数。

よって補題2よりAの固有値に対して(16)が成り立つので、可制御問題(10)(11)にRussell [8]又はKrabs [4](P.98)の制御理論(infinite moment methods)の結果を用いると

$$\mathcal{R}_T(\mathcal{V}) = \left(E_R^{\frac{3}{2}} + E_S^{\frac{3}{2}}\right) \times \left(E_R^1 + E_S^1\right) \tag{18}$$

が成り立つ。ただし、θを正の数、w_iをWのHの完全正規直交系$(\Phi_i)_{i\geq 1}$によるフーリエ係数、すなわち$w_i = \langle W, \Phi_i\rangle_H$として$H$の部分空間$E_W^\theta$を

$$E_W^\theta = \left\{ Y \in D(A^\theta) \middle| \sum_{\substack{i=1\\ w_i\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{|w_i|^2} \left|\left\langle Y, \lambda_i^{-\theta}\Phi_i\right\rangle_{D(A^\theta)}\right|^2 < \infty, w_i = 0 \text{ ならば } \langle Y, \Phi_i\rangle_H = 0 \right\}$$

$$D\left(A^\theta\right) = \left\{ Y \in H \;\middle|\; \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{2\theta} \left|\langle Y, \Phi_i\rangle_H\right|^2 < \infty \right\}$$

$$\langle Y_1, Y_2\rangle_{D(A^\theta)} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{2\theta} \langle Y_1, \Phi_i\rangle_H \overline{\langle Y_2, \Phi_i\rangle_H}$$

とする。ここで$\left[\begin{smallmatrix}U_0\\ V_0\end{smallmatrix}\right]$を$E_R^{\frac{3}{2}} \times E_R^1$(又は$E_S^{\frac{3}{2}} \times E_S^1$)の元とすると、任意の$t \geq 0$に対して、$e^{t\mathcal{A}}\left[\begin{smallmatrix}U_0\\ V_0\end{smallmatrix}\right]$も$E_R^{\frac{3}{2}} \times E_R^1$(又は$E_S^{\frac{3}{2}} \times E_S^1$)の元となるので、(18)のことを用いると、$E_R^{\frac{3}{2}} \times E_R^1$の任意の元$\left[\begin{smallmatrix}U_0\\ V_0\end{smallmatrix}\right]$、$\left[\begin{smallmatrix}U_1\\ V_1\end{smallmatrix}\right]$に対して

$$\begin{bmatrix}U_1\\ V_1\end{bmatrix} - e^{T\mathcal{A}}\begin{bmatrix}U_0\\ V_0\end{bmatrix} = -\int_0^T e^{(T-s)\mathcal{A}}\left(f_1''(s)\begin{bmatrix}0\\ R\end{bmatrix} + f_2''(s)\begin{bmatrix}0\\ S\end{bmatrix}\right) ds$$

なる$\mathcal{V} = H_0^2(0,T)$の元f_1、f_2が存在する。すなわちシステム(10)のマイルド解$\left[\begin{smallmatrix}U\\ V\end{smallmatrix}\right]$で終期条件(11)を満たすような$\mathcal{V}$の元$f_1$、$f_2$が存在することに注意する。さて(18)を用いると、システム(10)が時間T、制御$\mathcal{V} = H_0^2(0,T)$によって$\mathcal{Z} = L^2(0,1) \times L^2(0,1)$で近似可制御であること、すなわち$\overline{\mathcal{R}_T(\mathcal{V})} = \mathcal{Z}$と$\overline{\left(E_R^{\frac{3}{2}} + E_S^{\frac{3}{2}}\right) \times \left(E_R^1 + E_S^1\right)} = \mathcal{Z}$は同値であることがわかる。

ここでタイプ1の制御の場合について述べる。タイプ1の制御の場合、$f_1 \equiv 0$であるから(18)は

$$\mathcal{R}_T(\mathcal{V}) = E_R^{\frac{3}{2}} \times E_R^1$$

となる。又、$\overline{E_R^{\frac{3}{2}} \times E_R^1} = \mathcal{Z}$と$r_i \neq 0 (i=1,2,\cdots)$が同値であるから、タイプ1制御システム(10)が近似可制御であることと、任意の自然数iに対してr_iが0とならないことが同値

となる。よって R のフーリエ係数 r_iを調べる。

$$\begin{aligned} r_i &= \langle R, \Phi_i \rangle_H = \frac{1}{\lambda_i} \langle R, \lambda_i \Phi_i \rangle_H = \frac{1}{\lambda_i} \langle R, A\Phi_i \rangle_H \\ &= \frac{1}{\lambda_i} \left\{ -T_1(r^1, \phi_i'')_{L^2(0,m)} - T_2(r^2, \psi_i'')_{L^2(m,1)} \right\} \\ &= \frac{1}{\lambda_i} \phi_i(m) \end{aligned}$$

従って (17) より

$$r_i = \frac{1}{\lambda_i} A_i \sin\sqrt{\frac{\rho_1}{T_1}\lambda_i} m \tag{19}$$

ここでλ_iが (15) の解であることと (19) を用いると $r_i = 0$ であることとλ_iが

$$\sin\sqrt{\frac{\rho_1}{T_1}\lambda_i} m = 0 \text{ かつ} \sin\sqrt{\frac{\rho_2}{T_2}\lambda_i}(1-m) = 0 \tag{20}$$

を満たすことが同値となる。もし (20) を満たすλ_iがあるとすると、自然数 p 、qが存在して$\sqrt{\frac{\rho_1}{T_1}\lambda_i} m = p\pi$, $\sqrt{\frac{\rho_2}{T_2}\lambda_i}(1-m) = q\pi$。両式から$\sqrt{\lambda_i}$を消去すると$\frac{1-m}{m}\frac{\sqrt{\frac{\rho_2}{T_2}}}{\sqrt{\frac{\rho_1}{T_1}}} = \frac{q}{p}$となる。

逆に、$\Gamma = \frac{1-m}{m}\frac{\sqrt{\frac{\rho_2}{T_2}}}{\sqrt{\frac{\rho_1}{T_1}}}$ が有理数$\frac{q}{p}$であるとすると$\lambda_i = \left(\frac{p\pi}{m}\right)^2 \frac{T_1}{\rho_1} = \left(\frac{q\pi}{1-m}\right)^2 \frac{T_2}{\rho_2}$ なるλ_iは (20) を満たす。

故にΓが無理数である時のみ $r_i \neq 0 (i = 1, 2, \cdots)$ 。

タイプ 2 の方も同様な計算により、Γが無理数であるか又は有理数$\frac{q}{p}$（p 、qは既約）で p 又は qが偶数である時のみ $r_i \neq 0 (i = 1, 2, \cdots)$ であることがわかる。

他方、タイプ 3 の制御の場合、f_1、f_2共に制御するので

$$R_T(\mathcal{V}) = \left(E_R^{\frac{3}{2}} + E_S^{\frac{3}{2}}\right) \times \left(E_R^1 + E_S^1\right)$$

ところが $\mathcal{Z} \supset \left(E_R^{\frac{3}{2}} + E_S^{\frac{3}{2}}\right) \times \left(E_R^1 + E_S^1\right) \supset D(A^{\frac{3}{2}}) \times D(A)$ であるので

$$\mathcal{Z} = \overline{D(A^{\frac{3}{2}}) \times D(A)} \subset \overline{\left(E_R^{\frac{3}{2}} + E_S^{\frac{3}{2}}\right) \times \left(E_R^1 + E_S^1\right)} = \mathcal{Z}$$

従って、タイプ 3 の場合Γの値によらず、$R_T(\mathcal{V})$ は常に $\mathcal{Z}$で稠密となる。

注 4　　注 1 で述べた制御空間 $\mathcal{V}$ をもっと滑らかにした場合は (18) の代わりに次が成り立つ。n を 2 以上の自然数とすると、正の数 $T(n)$ が存在して $T > T(n)$ 、$\mathcal{V} = H_0^n(0, T)$ とすると

$$\mathcal{R}_T(\mathcal{V}) = \left(E_R^{\frac{n+1}{2}} + E_S^{\frac{n+1}{2}}\right) \times \left(E_R^{\frac{n}{2}} + E_S^{\frac{n}{2}}\right)$$

となる。

4 補足

このような coupled system の研究は安定性に関するものが多くあり、弦（一次元波動方程式）の場合 Chen et al. [1]、Liu et al. [5]などがあり、棒（オイラー・ベルヌーイ方程式）の場合 Chen et al. [2]、Chen et al. [3] などがあり、可制御性に関するものとしては、もっといろいろな形状につなげられた弦の場合に最近の論文 Schmidt [9]がある。いずれの論文もこの論文で扱っているシステムより難しい場合を扱っているので、ここで用いた方法をそのまま当てはめてもより難しい計算となり、棒の場合は両方の棒が同じで簡単な境界条件であるか、制御が二つある場合の近似可制御性しかわからなかった。

参考文献

[1] G.Chen, M.P.Coleman and h.h.West, Pointwise stabilization in the middle of the span for second order systems, nonuniform and uniform exponential decay of solutions, SIAM J.Appl.Math.,47(1987), pp.751-780

[2] G.Chen, M.C.Delfour, A.M.Krall and G.Payre, Modelling, stabilization and control of serially connected beams, SIAM J.Control Optim.,25(1987), pp.526-546

[3] G.Chen, S.G.Krantz, D.L.Rassell, C.E.Wayne, H.H.West and M.P.Coleman, Analysis, designs and behavior of dissipative joints for coupled beams, SIAM J.Appl.Math.,49(1989), pp.1665-1693

[4] W.Krabs, *On Moment Theory and Controllability of One-Dimensional Vibrating Systems and Heating Processes*, Lecture Notes in Control and Information Sciences 173, Springer,1992

[5] K.S.Liu, F.L.Huang and G.Chen, Exponential stability analysis of a long chain of coupled strings, SIAM J.Appl.Math.,49(1989), pp.1694-1707

[6] A.Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equation*, Appl.Math.Sci.44, Springer,1983

[7] D.L.Russell, Mathematical models for the elastic beam and their control-theoretic imprications, Longman,1985

[8] D.L.Russell, Non-harmonic fourier series in control theory of distributed parameter systems, J.Math.Anal.Appl.,18(1967), pp.542-560

[9] E.J.P.G.Schmidt, On the modelling and exact controllability of networks of vibrating strings, SIAM J.Control Optim.,30(1992), pp.229-245

[10] K.Tsujioka, On a hyperbolic equation in robotics with sigular boundary condition, Saitama Math.J.,17(1989), pp.23-47

[11] K.Tsujioka, On a wave equation with a singular boundary condition, Saitama Math.J., 18(1990), pp.31-39

[12] K.Yosida, *Functional Analysis*, Springer