

平らでない底を持つ場合の二次元の非線形波動

東大工 矢嶋 徹 (Tetsu Yajima)

東大工 西成浩裕 (Katsuhiro Nishinari)

0° はじめに

一次元の系における非線形波動の研究は精力的に行われて来て、様々の有意義な結果が生まれた。その一つが、KdV方程式や非線形シュレディンガー方程式をはじめとする非線形可積分方程式の研究であり、そこから局在構造をもつ解としてソリトンが得られた。ソリトンは相互作用の下での安定性をもち、裾が指数的に減衰する形で局在している構造で、孤立波としての性質と粒子的な性質を併せ持つものである。この解に対しては様々の意味での摂動に対する安定性が議論されている。

これに対して、二次元以上の系になって来ると、局在構造を持つような解はあまり知られていない。上記のソリトン解を持つ高次元方程式としてはKP方程式が挙げられるが、これは一方向にのみ局在したソリトン解である。ソリトン解以

外の高次元局在構造としては、ドロミオンが挙げられよう。
これは空間二次元、時間一次元の系におけるデーゼー＝スチュアートソン（以下DS）方程式の解で、指數的な裾をもつ、二次元的に局在したものである[†]。しかし、ドロミオンは、互いの相互作用の下で粒子数が保存しない例が存在するなど、ソリトンとはかなり異なる性質をもつ。また、高次元の構造であるため、厳密解としての議論は数多くなされてはいるが、例えば、ドロミオンの安定性などを詳細に論じたものは少ないように思われる。

本稿では、不均一系におけるソリトンのふるまい⁽¹⁾との対比を考え、平らでない底面の影響をとり入れた二次元の流体において、DS方程式がどのような変形を受けるかを考える。また、将来の安定性の議論をすすめることを目標にして、まずドロミオン解の数値計算を実行する。

1° DS方程式とドロミオン解

この節では以下の計算のために、流体系におけるDS方程式の導出⁽²⁾を簡単にまとめ、併せてドロミオン解（1-ドロミオン解）の形を示す⁽³⁾。

†:二次元的には局在しているが、指數的にはdumpしないような構造としては、KP方程式のlump解が一例である。⁽⁴⁾

まず、流体として非圧縮性完全流体を考えると、流れは速度ポテンシャル $\phi(x, y, z, t)$ によって表わされ、 ϕ はラプラス方程式をみたす。

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \quad (-H < z < \zeta(x, y, t)) \quad (1a)$$

$t = t$ とし、 z 軸は鉛直方向と平行にとり、 $z = \zeta(x, y, t)$ は流体の表面を表わすものとする。境界条件として、底面 ($z = -H$) と表面 ($z = \zeta(x, y, t)$) で次の3つの条件を考える。

$$\phi_z = 0 \quad (z = -H) \quad (1b)$$

$$\phi_t + g\zeta + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) = 0 \quad (z = \zeta(x, y, t)) \quad (1c)$$

$$\phi_z = \zeta_t + \phi_x \zeta_x + \phi_y \zeta_y \quad (z = \zeta(x, y, t)) \quad (1d)$$

これら4つの方程式に対して逐次摂動法を適用する⁽²⁾。すなわち、群速度 v_g と展開パラメータ ε を用いて独立変数を

$$\xi = \varepsilon(x - v_g t), \quad \eta = \varepsilon y, \quad \tau = \varepsilon^2 t \quad (2a)$$

のように変換し、従属変数を

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=-n}^n \phi_l^{(n)}(\xi, \eta, \tau) \varepsilon^n e^{il(kx - \omega t)} \quad (2b)$$

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=-n}^n \zeta_l^{(n)}(\xi, \eta, \tau) \varepsilon^n e^{il(kx - \omega t)} \quad (2c)$$

と展開する。これらを式(1a~d)に代入して ε と $e^{i(kx - \omega t)}$

の各オーダーで比較して、変数 A, Q を

$$A \equiv \phi_1^{(1)} \cosh(kH) / \cosh k(z+H) \quad (3a)$$

$$Q \equiv v_g \phi_0^{(1)} \xi / k^2 - v_g \left(2 \frac{\omega}{k} + v_g (1 - \tanh^2 kh) \right) |A|^2 / (gk - v_g^2) \quad (3b)$$

で導入すると、 A, Q に対して

$$\begin{cases} iA_\tau + \frac{1}{2}(A_{\xi\xi} + A_{\eta\eta}) = \nu |A|^2 A + AQ \end{cases} \quad (4a)$$

$$\begin{cases} Q_{\xi\xi} + Q_{\eta\eta} = \kappa (|A|^2)_{\eta\eta} \end{cases} \quad (4b)$$

を得る。ただし、 ξ, η, τ, A, Q を適当にスケールし直した。

また、表面張力の効果をとりに入れるなどした場合に第2式が

$$Q_{\xi\xi} - Q_{\eta\eta} = \kappa (|A|^2)_{\eta\eta} \quad (4b')$$

となる場合がある⁽⁵⁾。前者(4)を DS2 方程式・後者(4')を DS1 方程式という。変数 A は、表面波束の振幅を表わし、 Q は表面波と相互作用する平均流を表わす⁽⁶⁾。

DS1 方程式はドロミオン解と呼ばれる。二次元的に局在した解をもつ。これに対して DS2 方程式はそのような構造をもつ解はなく、KP 方程式のソリトン解のように一方向にのみ局在した解しか知られていない。

ドロミオン解は最初に Boiti らによって Bäcklund 変換を用いて得られ、Fokas と Santini により逆散乱形式でまとめられた⁽³⁾。式(4a)と(4b')を用い、 $X \equiv \xi + \eta$, $Y \equiv \xi - \eta$ として、

$$Q(X=0, Y, \tau) = Q_1(Y, \tau) = \frac{2\lambda_R^2}{\cosh^2 \lambda_R (Y + 2\lambda_I \tau - Y_0)} \quad (5a)$$

$$Q(X, Y=0, \tau) = Q_2(X, \tau) = \frac{2\mu_R^2}{\cosh^2 \mu_R (X + 2\mu_I \tau - X_0)}$$

のように境界を与えると ($\tau = \tau'$ とし、 $\lambda_R, \lambda_I, \mu_R, \mu_I, X_0, Y_0$ はパラメータ)。

$$A = \frac{4\beta\sqrt{\lambda_R\mu_R} \exp\{-[\lambda_R\hat{X} + \mu_R\hat{Y}] + i[-(\lambda_I\hat{X} + \mu_I\hat{Y}) + (|\mu|^2 + |\lambda|^2)t] + \phi\}}{\{1 + \exp(-2\lambda_R\hat{X})\}\{1 + \exp(-2\mu_R\hat{Y})\} + |\beta|^2}$$

$$\hat{X} \equiv X - 2\mu_I T - X_0, \hat{Y} \equiv Y - 2\lambda_I T - Y_0, \mu = \mu_R + i\mu_I, \lambda = \lambda_R + i\lambda_I \quad (5b)$$

β, ϕ はパラメータ

となる。(1-ドロミオン解)

この解は、右図のように $X, Y=0$ の境界で、動く局在構造の形で平均流 Q を与え、それに伴って (5b) の局在した構造が引っばられて動くしくみである。(右図1

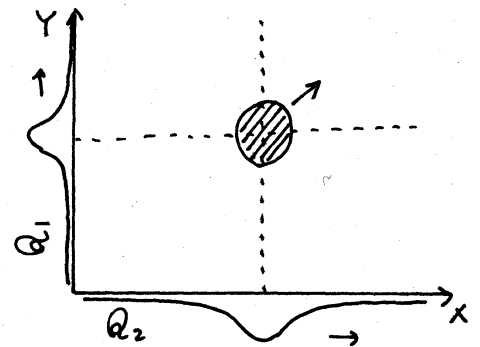


図1-

斜線部)

一般に任意に初期条件・境界条件を与えた場合に A, Q がどのようにふるまうかは不明で、数値計算により初期値境界値問題を解析することの重要性は明らかである。

2° 平らでない底による摂動.

ドロミオン解の摂動を解析するためにはまず平らでない底の効果を取り入れたモデル方程式を導出しよう。これは、一次元における不均一系での非線形波動に関する議論⁽¹⁾の二次元への拡張である。⁽⁷⁾

まず、基本となる式は前節の (1a) であるが、底面の座

標が一定でないため (1b~d) が変化する。ドロミオン解を考
えるので最初から表面張力をとり入れると、

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \quad (-H(x, y) < z < \zeta(x, y, t)) \quad (6a)$$

$$H_x \phi_x + H_y \phi_y + \phi_z = 0 \quad (z = -H(x, y)) \quad (6b)$$

$$\phi_t + g\zeta + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) = \frac{T}{\rho R} \quad (z = \zeta(x, y, t)) \quad (6c)$$

$$\phi_z = \zeta_t + \phi_x \zeta_x + \phi_y \zeta_y \quad (z = \zeta(x, y, t)) \quad (6d)$$

$$\frac{1}{R} \equiv [(1 + \zeta_x^2) \zeta_{yy} + (1 + \zeta_y^2) \zeta_{xx} - 2 \zeta_x \zeta_y \zeta_{xy}] (1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

この方程式系に対して逐減摂動法を適用する。変数変換につ
いては (2) の 3 つの式をそのまま使う。また、底の形状 $H(x, y)$
に関して以下の仮定をする: (i) H は x ($\therefore \zeta, \tau$) にしか依存
しない、つまり y 方向に一定の段状になっている。 (ii) H の
空間的变化は、波動の x 方向への特徴的長さに比べてゆっく
りと変化する。この条件下で、 H を ε のべきで展開しよう。

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n H^{(n)}(\zeta, \tau) \quad (7)$$

式 (2) および (7) を (6) に代入した結果、1° におけるものと
全く同様の手順によりモデル方程式が得られる。 ε の低次の
べきの比較による結果も併記して、

$$O(\varepsilon): \begin{cases} \phi_{0z}^{(1)} = 0, \quad \phi_1^{(1)} = \frac{A \cosh(k(z+H))}{\cosh(kH^{(0)})} \\ \zeta_0^{(1)} = 0, \quad (1 + k^2 \frac{T}{\rho g}) \zeta_1^{(1)} = i \frac{\omega}{g} \phi_1^{(1)} \\ \omega^2 = gk (1 + k^2 \frac{T}{\rho g}) \tanh((\zeta+H)k) \end{cases}$$

$$O(\varepsilon^2): \begin{cases} \phi_{02}^{(2)} = 0, \quad \phi_2^{(2)} = C_2^{(2)} \cosh(2k(z+H)) \\ v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}, \quad H_{\xi}^{(0)} = 0 \end{cases}$$

このオーダーまでは一次元の場合と概ね一致している。次のオーダーは紙数の制約により書き切れないので結果のみ記す。

$$\begin{cases} iA_{\tau} + (A_{\xi\xi} + A_{\eta\eta})/2 = \nu |A|^2 A + \nu' A Q + (\mu_1 + A\mu_2) H_{\tau}^{(0)} \\ Q_{\xi\xi} - \sigma Q_{\eta\eta} = \kappa (|A|^2)_{\eta\eta} \end{cases} \quad (8)$$

を得る。係数 $\nu, \nu', \kappa, \mu, \sigma$ は (H によらない) パラメータである。方程式が DS1 型か DS2 型かを決めるのは σ であるが、既に述べたようにこれは H によらないので、無振動の場合と同様の議論が成り立つ。

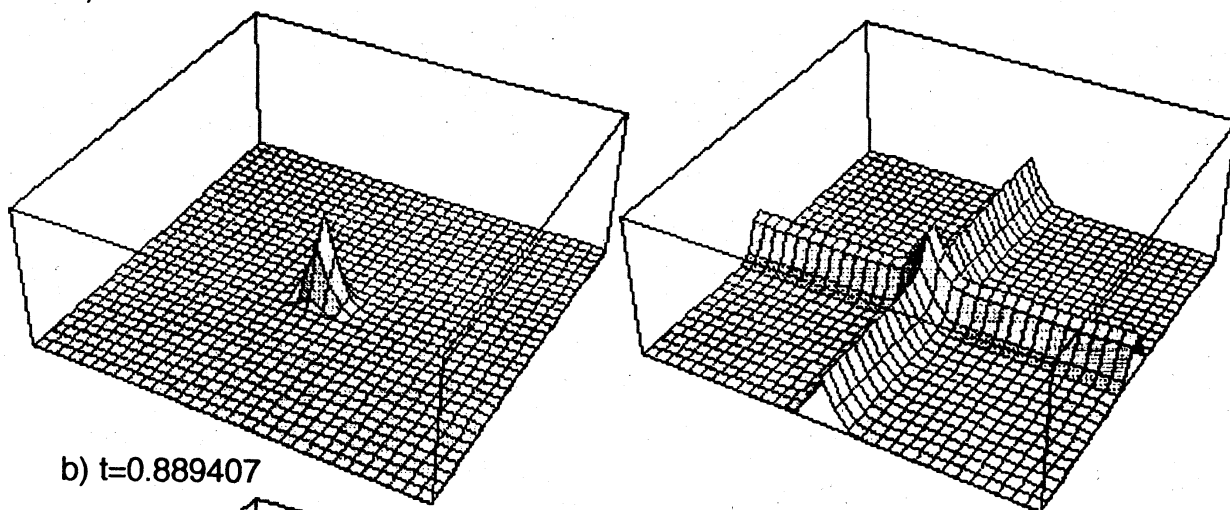
3° ドロミオン解の数値計算⁽⁸⁾

前節のようにして底が平らでない場合のモデル方程式が得られた。最終的には (8) 式に対する数値計算を行おうのが目標であるが、ドロミオンの安定性や、スキームの検討などのために (4a, b') を (5) の 1-ドロミオンの初期条件の下で解析したものが次頁図 2 である。空間方向のメッシュの数は x, y ともに 32 とした。

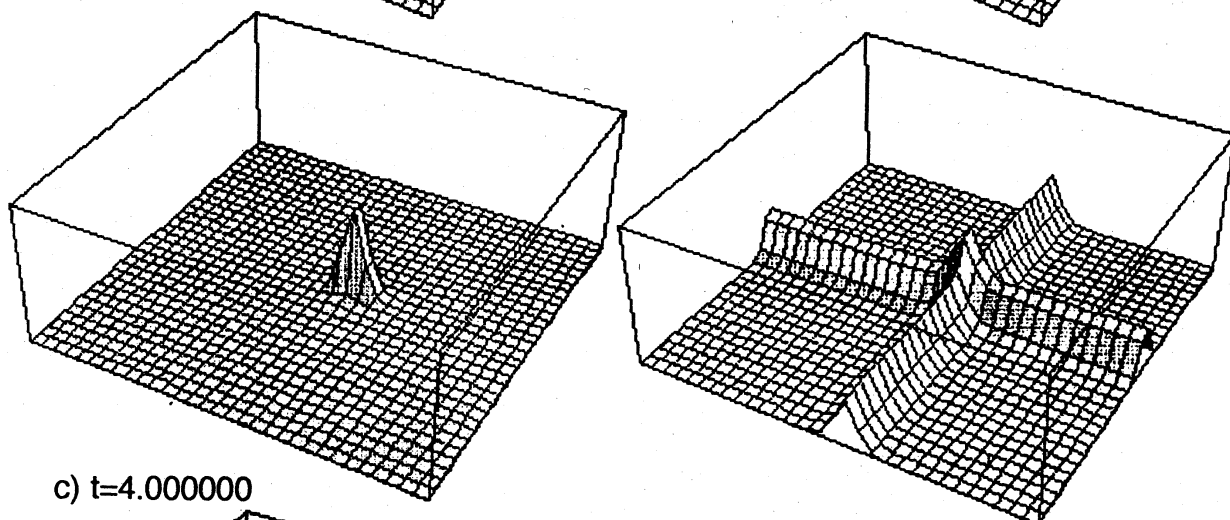
前述の通り、 Q は x, y を固定した線上で与え、それを動かすことによって A がつられて動いていく様子が見られる。

1) DS1(Dromion)

a) $t = -1.000000$



b) $t = 0.889407$



c) $t = 4.000000$

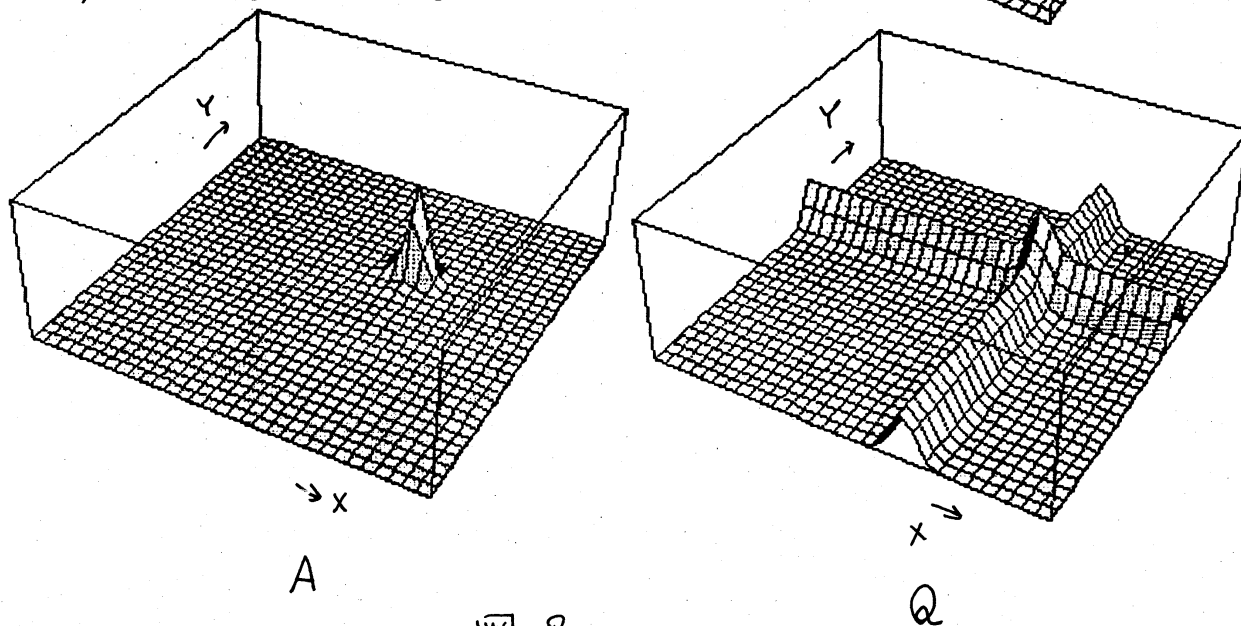


图 2.

この結果から、ドロミオンは、自分自身の大きさ程度の長さ
は安定して伝播し得ること加わかる。念のため、ピークの高
さの時間変化は、相対誤差として 10^{-3} 程度、また DSP 方程式
の保存量の変化は、第一保存量 ($\int dx dy |A|^2$: 質量に相当)
で 10^{-8} 、第二保存量 (エネルギーに相当) で 10^{-6} 程度であり、
相当安定にふるまうことがわかった。ピークの高さの変化が
少し大きい、これはメッシュの粗さに関係しているものと思
われる。

4° 今後の展望

本稿では、底が平面でない状況で、二次元的な局在解の時
間発展を記述する DSP 方程式がどのような変化を受けるか
を論じ、また、この方程式の解のふるまいを解析することと
目標にして、ドロミオン解の数値計算を行なった。その結果、
ドロミオンは摂動を全く受けない状況下ではかなり安定に伝
播しうることを示唆された。

今後の展望としては、(8) の数値解析のほか、様々な初期
境界条件での局在構造の時間発展の解析が考えられる。これ
については現在進行中であり、ある程度の結果が得られてい
るが、現在準備中の別の論文に譲る。⁽⁹⁾

最後に、数値計算の上で有益なアドバイスを頂きました、

九州大学総合理工学研究科の田中稚慶博士、DS方程式全般にわたって活発な議論としていただきました。東京大学理学部の中尾竹伸氏に深く感謝申し上げます。

5° References

- [1] O.S. Madsen and C.C. Mei : J. Fluid Mech 39 (1969) 781;
T. Kakutani : J. Phys. Soc. Jpn. 30 (1971) 272; N. Asano and
H. Ono : J. Phys. Soc. Jpn 31 (1971) 1830; T. Iizuka : Univ.
of Tokyo, Ph.D. Thesis (1993) and the references therein
- [2] A. Davey and K. Stewartson : Proc. Roy. Soc. London A 338
(1974) p.101.
- [3] M. Boiti, J. Leon, L. Martina and F. Pempinelli : Phys. Lett.
A132 (1988) 432; A.S. Fokas and P.M. Santini :
Physica D44 (1990) 99.
- [4] J. Satsuma and M.J. Ablowitz : J. Math. Phys. 20 (1979) 1496
- [5] V.E. Zakharov and E.A. Kuznetsov : Physica D18 (1986)
455; F. Calogero and W. Eckhaus : Inverse Problems 3
(1987) L27.
- [6] 講演では A を「主流」という語で呼びましたが、数名の方
よりこの語は適切でないとの御指摘を受けましたので、こ
のように呼ぶことに致します。

[7~9] : K.Nishinari and T.Yajima. : in preparation.