数理解析研究所講究録
第 868 巻 1994 年 211-215

オイラー・ポワソン・ダルブーの方程式の q-差分化について

阪大理　永友清和 (Kiyokazu Nagatomo)
阪大理 M2　古閑義之 (Yoshiyuki Koga)

1 序

この小論の目的は、オイラー・ポワソン・ダルブー (EPD) の方程式と呼ばれる 2 変数 2 階の双曲型偏微分方程式:

$$\{\partial_x\partial_y - \frac{\beta' - \beta}{x - y}\partial_x - \frac{(-\beta)(\beta' - 1)}{(x - y)^2}\}f(x, y) = 0$$

の q-差分化を行う事である。まず、q-差分化にあたり注目した、EPD 方程式の三つの性質について述べる。第一の性質は、この方程式は、超幾何関数で表示できる解を持っている事である。つぎの性質として、EPD 方程式は、解空間を不変にする作用素としてリー環 $sl(2, C)$ の表現をもつ。 三つ目の性質が、EPD 方程式の係数は、戸田方程式のある有理関数解になっている事である。

ここでは、第一の事実を用いて、q-差分 EPD 方程式を構成する。更に、第二の性質に対応して、構成された q-差分 EPD 方程式に、$U_q(sl(2, C))$ が作用することを示す。また、第三の性質より、EPD 方程式の q-差分化は、この戸田方程式の有理関数解の q-アナログを与える事とも考えられる。最後に、この解の q-アナログの満足する方程式として、ある q-差分戸田方程式を与える。

なお、本文の作成にあたっては、岡本一夫先生の大阪大学での集中講義 [1] を参考にしました。

2　オイラー・ポワソン・ダルブー (EPD) の方程式

EPD 方程式は、次で定義されるラプラス列と呼ばれる 2 階の双曲型偏微分作用素の列の特殊な場合である。ラプラス列とは、微分作用素:

$$L_n = \partial_x \partial_y + s_{n+1}(x,y)\partial_x + r_n(x,y), \quad n \in Z$$

で、その係数 r_n, s_{n+1} が戸田方程式

$$\begin{aligned} \partial_y \log r_n &= s_n - s_{n+1}, \\ \partial_x s_{n+1} &= r_n - r_{n+1} \end{aligned}$$

で与えられるものである。ここで、ラプラス列に関して次の事実がある。

事実 1 一般のラプラス列について、次の作用素 H_n, B_n:

$$\begin{aligned} H_n(x,y) &= \partial_y + s_{n+1}(x,y), \\ B_n(x,y) &= -r_n(x,y)^{-1}\partial_x \end{aligned}$$

は、ラプラス列から定まる方程式の列の解空間に昇降演算子として作用する。つまり f_n を $L_n f(x,y) = 0$ の解とすると、$H_n f_n$は $L_{n+1} f(x,y) = 0$ の解である。また同様に、$B_n f_n$は $L_{n-1} f(x,y) = 0$ の解になる。

戸田方程式の次のような有理関数解

$$\begin{aligned} r_n(x,y) &= -\frac{(n-\beta)(n+\beta'-1)}{(x-y)^2}, \\ s_{n+1}(x,y) &= -\frac{2n+\beta'-\beta}{x-y} \end{aligned} \tag{1}$$

により定義されるラプラス列で定まる方程式が、EPD 方程式:

$$\{\partial_x \partial_y - \frac{2n+\beta'-\beta}{x-y}\partial_x - \frac{(n-\beta)(n+\beta'-1)}{(x-y)^2}\} f(x,y) = 0$$

である。このとき、つぎの事実が成立する。

事実 2 EPD 方程式ついて、解空間への $sl(2,C)$ の作用があり

$$\begin{aligned} e_n &= -g_n^{-1}\{x^2\partial_x + y^2\partial_y + (\beta - n)x + (\beta' + n)y\}g_n \\ f_n &= g_n^{-1}\{\partial_x + \partial_y\}g_n \\ h_n &= g_n^{-1}\{2x\partial_x + 2y\partial_y + (\beta - n) + (\beta' + n)\}g_n \end{aligned}$$

で与えられる。但し、$g_n = (x-y)^{n-\beta}$

また、オイラー・ポワソン・ダルブーの方程式は次のようなガウスの超幾何関数でかける解を持っている。

$$\begin{aligned} F_m^{\beta-n,\,\beta'+n} &= g_n^{-1}\frac{[\beta - n; m]}{[\beta' + n; m]}x^m{}_2F_1(-m, \beta' + n; 1 - m - \beta + n; t) \\ &= g_n^{-1}\sum_{i=0}^{m}\frac{[m-i+1; i][\beta - n; i]}{[1; i][m - i + \beta' + n; i]}x^i y^{m-i} \end{aligned}$$

但し $[a;k] \stackrel{def}{=} a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1), t = y/x$

3　q-差分化に関する記号

ここで、使用する記号をまとめておく。

$$[\alpha]_q \stackrel{def}{=} \frac{q^\alpha - q^{-\alpha}}{q - q^{-1}}, \quad q^{\theta_x}f(x,y) \stackrel{def}{=} f(qx, y)$$

$$[\partial_x]_q \stackrel{def}{=} \frac{1}{x}\frac{q^{\theta_x} - q^{-\theta_x}}{q - q^{-1}}, \quad [\theta_x + \alpha]_q \stackrel{def}{=} \frac{q^{\theta_x+\alpha} - q^{-\theta_x-\alpha}}{q - q^{-1}}$$

$(x-y)^\alpha$ の q-差分化にあたる関数として

$$(x-y)^{[\alpha]} \stackrel{def}{=} x^\alpha\frac{\prod_{j=0}^{\infty}(1 - q^{-2j+\alpha-1}y/x)}{\prod_{j=0}^{\infty}(1 - q^{-2j-\alpha-1}y/x)}$$

4 オイラー・ポワソン・ダルブーの方程式のq-差分化

EPD方程式が超幾何関数で表示できる解を持つという事実を用いて、q-差分EPD方程式を構成する。$F_m^{\beta-n,\beta'+n}$のq-アナログとして

$$\varphi_m^{\beta-n,\,\beta'+n} \overset{def}{=} (x-q^{\beta'+n-1}y)^{[\beta-n]}\{\sum_{i=0}^{m}\frac{[m-i+1;i]_q[\beta;i]_q}{[1;i]_q[m-i+\beta';i]_q}x^iy^{m-i}\}$$

$$\text{但し}\ [a;k]_q \overset{def}{=} [a]_q[a+1]_q[a+2]_q\cdots[a+k-1]_q$$

を採用する。$\varphi_m^{\beta-n,\,\beta'+n}$を解に持つq-差分方程式として次の方程式を構成した。

$$\{q^{-\theta_x}[\partial_x]_q q^{\theta_y}[\partial_y]_q-\frac{[2n+\beta'-\beta]_q}{(q^{-1}x-q^{2n+\beta'-\beta}qy)^{[1]}}q^{-\theta_x}[\partial_x]_q$$
$$-q^{-1}\frac{[n-\beta]_q[n+\beta'-1]_q}{(q^{-1}x-q^{2n+\beta'-\beta-1}qy)^{[2]}}\}f=0$$

更に、事実2に対応して、次の定理が成立する。

定理 1 *q-EPD* 方程式の解空間に量子展開環$U_q(sl(2,C))$の作用があり、次の差分作用素で実現される。

$$\begin{aligned}
e_{q,n} &= -g_n^{-1}\{q^{-\theta_x}y[\theta_y+\beta'+n]_q+q^{\theta_y}x[\theta_x+\beta-n]_q\}g_n,\\
f_{q,n} &= g_n^{-1}\{q^{-\theta_x-\beta+n}[\partial_y]_q+q^{\theta_y+\beta'+n}[\partial_x]_q\}g_n,\\
q^{h_{q,n}} &= g_n^{-1}\{q^{2\theta_x+2\theta_y+\beta+\beta'}\}g_n.
\end{aligned}$$

但し、$g_n=(x-q^{\beta'+n-1}y)^{[n-\beta]}$とする。

この定理より、戸田方程式の有理関数解1のq-アナログとして

$$\begin{aligned}
r_{q,n}(x,y) &= -\frac{[n-\beta]_q[n+\beta'-1]_q}{(x-q^{2n+\beta'-\beta-1}y)^{[2]}},\\
s_{q,n+1}(x,y) &= -\frac{[2n+\beta'-\beta]_q}{(x-q^{2n+\beta'-\beta}y)^{[1]}}
\end{aligned}$$

が得られる。更に、この解の満足する q-差分方程式として

$$
\begin{aligned}
q^{-\theta_x}[\partial_y]_q r_n(x,y) &= s_n(x,y)r_n(q^{-1}x,qy) \\
&\quad -qs_{n+1}(q^{-1}x,qy)r_n(q^{-1}x,q^{-1}y) \qquad (2)\\
q^{\theta_y}[\partial_x]_q s_{n+1}(x,y) &= q^{-2}r_n(q^{-1}x,qy)-r_{n+1}(x,y).
\end{aligned}
$$

を構成した。この方程式は $q\to 1$ において戸田方程式を再現し、更に事実1に対応して、次の命題が成立する。

命題 1 方程式 *2*の任意の解に対して、

$$
\begin{aligned}
L_{q,n} &\stackrel{def}{=} q^{-\theta_x}[\partial_x]_q q^{\theta_y}[\partial_y]_q \\
&+ \ s_{n+1}(q^{-1}x,qy)q^{-\theta_x}[\partial_x]_q+q^{-1}r_n(q^{-1}x,qy)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{q,n} &\stackrel{def}{=} q^{-\theta_x}[\partial_y]_q+s_{n+1}(x,y)q^{-\theta_x-\theta_y}, \\
B_{q,n} &\stackrel{def}{=} -r_n^{-1}(x,y)q^{\theta_y}[\partial_x]_q
\end{aligned}
$$

で、q-差分作用素 $L_{q,n}$、$H_{q,n}$、$B_{q,n}$を定義する。このとき、$H_{q,n}$、$B_{q,n}$は、$L_{q,n}f(x,y)=0$ $(n\in Z)$ という方程式の列の解空間の間に昇降演算子として作用する。すなわち f_n を $L_{q,n}f(x,y)=0$ の解とすると、$H_{q,n}f_n$は $L_{q,n+1}f(x,y)=0$ の解である。また同様に、$B_{q,n}f_n$は $L_{q,n-1}f(x,y)=0$ の解になる。

最後に、

事実 3 方程式 2は、梶原・太田・薩摩 [*2*] で構成された q-差分戸田方程式と同値。

参考文献

[1] 岡本一夫, 大阪大学集中講義, (1987)

[2] Kajiwara, K. Ohta, Y. and Satsuma, J. q-Discrete Toda Molecule Equation, Phys. Lett. A 180, (1993) 249-256