

ソリトンからカオスへ

京大・理・物理 川原琢治 (Takuji Kawahara)

非線形可積分方程式の研究集会で非可積分性に関連する報告を行う機会を与えて頂いた。可積分ソリトン系からのずれに関する二、三の問題を取り上げ、非可積分な方程式の解の性質を調べることの意義について報告した。講演概要を以下に記す。

1. 可積分性の破れ

次のような場合に可積分方程式からのずれが起こる。

a) ソリトン方程式の高次近似

純分散非線形系のソリトン方程式は、摂動展開の最低次近似で得られるものであり、高次近似に進むと一般に非可積分となる。高次近似の補正項には永年項が含まれるが、これを繰り込む方法、さらに補正項の加わった高次の方程式を非線形変換によって可積分な方程式に書き換える標準形解析 (normal form analysis) などの研究が行われている。{[1]参照} 本報告では純分散系の高次近似方程式が一般には非可積分となることを指摘するにとどめておく。

b) 非保存的効果

散逸性、不安定性、非一様性、外力などの効果がソリトン方程式に加わると一般に非可積分となる。不安定 (外力) および散逸 (減衰) の効果がエネルギーを保存するような形で加わる場合に、ソリトンの挙動とカオスの挙動を示す非線形発展方程式が得られることがある。分散性が相対的に強い場合には規則的な振舞いを示すが、非保存的な効果が強くなるにつれて強いカオスに移行する。

c) 自由度の増大、空間高次元化

非線形発展方程式の従属変数の自由度が増大すると非可積分となることがある。また、空間1次元のソリトン方程式を高次元に拡張すると、崩壊 (collapse)、集中 (focussing)、共鳴 (resonance) などの現象が起こりソリトンの局在解すら存在しないことがある。局在解が存在しても相互作用 (衝突) において非保存的となり、可積分性が壊されることが多い。

本報告では b)、c) の非保存的効果と空間高次元化の問題について述べる。

2. 非保存的効果

ソリトンからカオスへの移り変わりを示す1次元の非線形発展方程式を取り上げ、初期値問題の解の振舞いと局在パルス構造との関係を調べた結果について述べる。散逸性がある系で局在パルス構造が存在するためには何らかの意味でエネルギー的な釣合が成立する必要がある。Benney方程式 $u_t + u u_x + u_{xxx} + u_{xx} + u_{xxxx} = 0$ あるいは不安定KdV-Burgers方程式 $u_t + u u_x + u_{xxx} - u - u_{xx} = 0$ のように、ソリトン方程式 + 不安定性 + 散逸性となる場合には漸近的な釣合が可能となる。しかし、KdV-Burgers方程式 $u_t + u u_x + u_{xxx} - u_{xx} = 0$ のように散逸性の項のみが加わる場合には、解は $t \rightarrow \infty$ では漸的に減衰してしまう。

(以下添字 t, x などは偏微分を表すものとする)

2.1 1次元Benney方程式

1次元Benney方程式

$$u_t + u u_x + \delta u_{xxx} + u_{xx} + u_{xxxx} = 0 \quad (2.1)$$

の初期値問題の数値解は、分散性の相対的な強さに応じて次のように規則的な解からカオス解までを示す。

- ① 分散性が強い ($\delta > 1.2$) 場合には、振幅一定のソリトンのパルスの列となり、 $t \rightarrow \infty$ でパルス間隔は等間隔となる。
- ② δ が小さくなる ($0.35 < \delta < 0.8$) と発生するパルスの振幅は減少し、波形は非対称性を増す。パルスは特定の間隔を保って伝播する。
- ③ さらに δ が減少する ($\delta < 0.35$) と、パルス間隔は特定の値の周りに変動し、波形も変動を示す。

④ δ が非常に小さい場合 ($\delta < 0.15$) には三角波的なパルスが生成・消滅を繰り返す不規則変動となり、 $\delta = 0$ の極限ではKuramoto-Sivashinsky方程式のカオスに近づく。

②~④に対応するパルス間隔と振幅の変動の例を図1に示す。

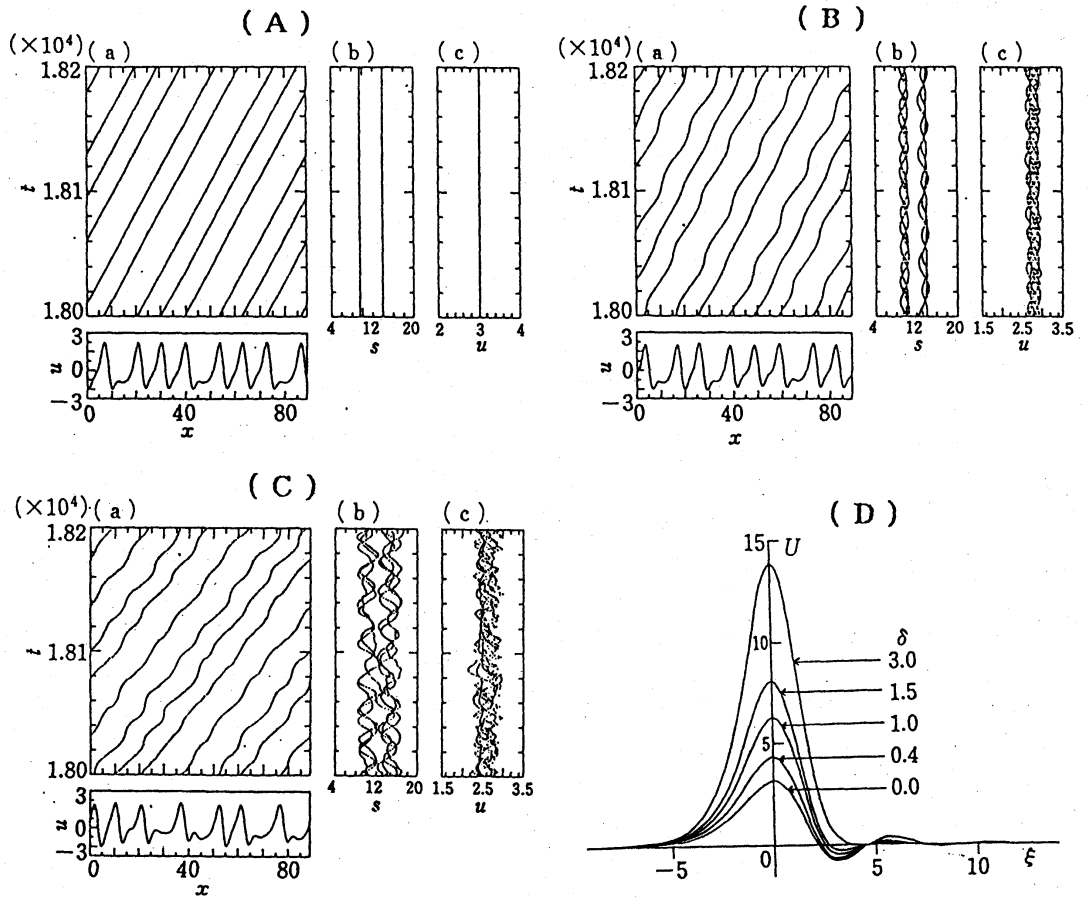


図1. Benney方程式の数値解と定常進行波解. (A) $\delta = 0.4$ (B) $\delta = 0.3$ (C) $\delta = 0.15$ (D) 定常進行波解 (a) $t = 18,000$ の波形とパルスピークの軌道 (b)パルス間隔の変化 (c)パルス振幅の変化

以上のような解の振舞いはBenney方程式の進行定常パルス解の重ね合わせ近似によって表現できる。Benney方程式の定常解を数値的に求めると初期値問題で現れるパルスとよく一致することが分かる。パルス解の重ね合わせモデル(ソリトン格子モデル)により①~③を定性的に説明することができる。{[2],[3]参照} ④の強いカオスの場合もパルス解の重ね合わせモデルにより統計的な量であるスペクトルなどを近似することができる。

ソリトン格子モデル

パルス構造が明確で生成・消滅のない場合には、十分離れたパルスが互いの裾を通して相互作用するとして、パルスの重ね合わせ近似が可能となる。相互作用を摂動として考慮 (direct perturbation) すると、パルスの振幅、速度、間隔、位相などのパラメータの変化を記述する方程式が得られる。いま、多数のパルスが一行に並んで互いに隣接するパルスの裾の影響を受けるとして、それを摂動として取り入れる。n番目のパルスの位置を s_n とすると次の非線形格子方程式が得られる。{ [4] 参照 }

$$\begin{aligned} d^2 s_n / dt^2 &= f(s_n - s_{n-1}) - g(s_{n+1} - s_n) \\ f(s) &\equiv K_1 \exp(-\lambda_1 s) \cos(\lambda_2 s + \phi) \\ g(s) &\equiv K_2 \exp(-\lambda' s) \end{aligned} \quad (2.2)$$

この格子方程式は定常パルス解の非対称性を反映しており、格子に働く左からの力 f と右からの力 g とが非対称となっている点に特徴がある。このようにして偏微分方程式の初期値問題の解を有限個の格子振動方程式で近似し、自由度を減らすことができる。

簡単のため2個のパルスが互いの裾の影響を受けて運動する場合を考えると、パルス間隔 s に対する方程式

$$\begin{aligned} d^2 s / dt^2 &= K_1 \exp(-\lambda_1 s) \cos(\lambda_2 s + \phi) \\ &+ K_2 \exp(-\lambda' s) \end{aligned} \quad (2.3)$$

を得る。これは非線形振動の方程式であり、エネルギー積分は容易に求まる。そのポテンシャルにはパルスの裾の振動構造に起因する運動の捕捉領域が存在する。パルス間隔が等間隔となること、特定の値をとることやその周りのふらつき、あるいは不規則なカオス的変動を示すことなどがポテンシャルの捕捉領域の有無によって定性的に説明できる。{ [2], [3] 参照 }

5階KdV方程式の場合にはパルス解は振動型のソリトンであるので対称な振動型格子

$$d^2 s_n / dt^2 = f(s_n - s_{n-1}) - f(s_{n+1} - s_n)$$

$$f(s) \equiv K \exp(-\lambda_1 s) \cos(\lambda_2 s + \phi) \quad (2.4)$$

となる。指数型格子の極限では可積分なToda格子

$$\begin{aligned} d^2 s_n / dt^2 &= g(s_n - s_{n-1}) - g(s_{n+1} - s_n) \\ g(s) &\equiv K \exp(-\lambda' s) \end{aligned} \quad (2.5)$$

となる。3個以上のパルスの格子を考えると非対称性や振動型の力をもつ格子である(2.2)、(2.4)は、カオス的な挙動を示すことが分かる。3パルス周期系に対する非線形格子方程式の不動点の安定性によって周期解から準周期解、カオスへの遷移が調べられている。{[4]参照}

2.2 不安定KdV-Burgers方程式

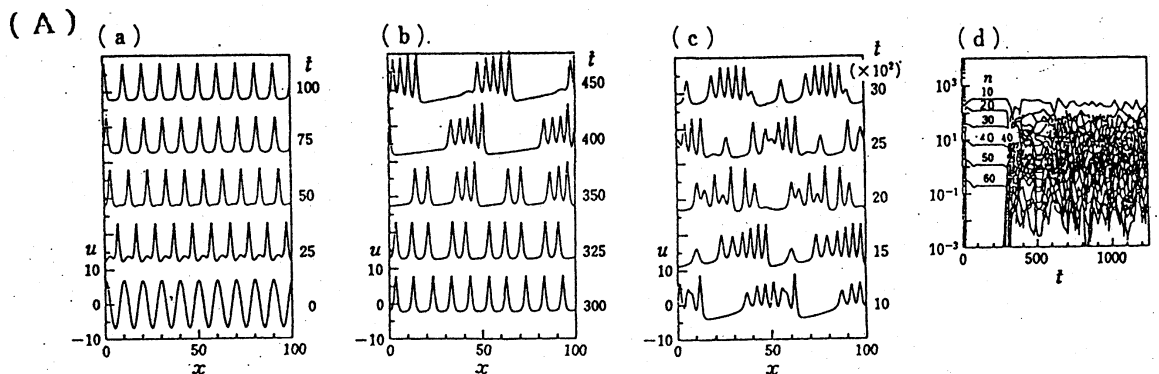
無次元化した方程式

$$u_t + u u_x + u_{xxx} - \eta(u + u_{xx}) = 0 \quad (2.6)$$

の初期値問題の解は次の様になる。

- ① 分散性が強い (η が小さい) 場合には、ソリトンのようなパルスが不規則に相互作用しながら系の最大スケールで群れをなして伝播する非定常なカオス的な変動を示す。
- ② 分散性が弱い場合には系の最大スケールに相当する衝撃波ができる。分散性の影響は衝撃波の山の部分の振動構造として残る。
- ③ 定常進行波解は時間発展の途中で一時的に現れるが不安定であり、分散性が弱い場合の漸近状態は衝撃波となる。{[5]参照}

①②に対応する数値計算結果の例を図2に示す。



(B)

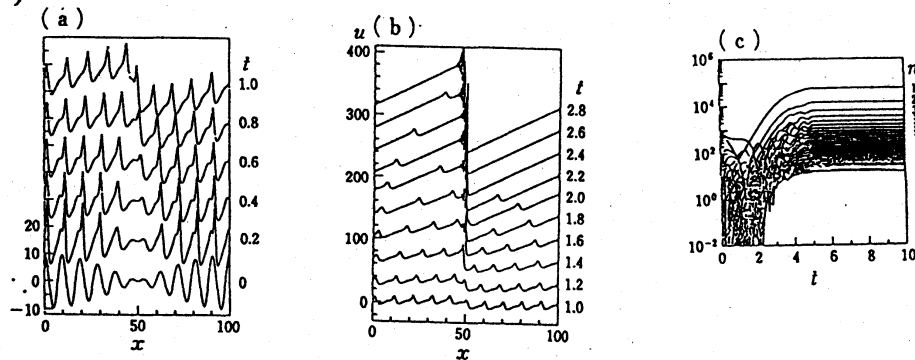


図2. 不安定KdV-Burgers方程式の数値解とパワースペクトル.
 (A) $\eta = 0.1$ (a) 初期正弦波から定常進行波列の形成 (b) パルス列の形成 (c) パルスのグルーピング (d) パワースペクトル
 (B) $\eta = 1.5$ (a) 初期変調波から定常進行波列の形成 (b) 衝撃波の形成 (c) パワースペクトル

以上の結果は、分散性が強い場合に規則的であり弱い場合にカオスとなったBenney方程式の場合と逆になっていることに注意したい。これは線形分散関係式が異なることによる。Benney方程式の場合には、線形成長率が $\sigma = k^2 - k^4$ で与えられ、線形不安定性の最大成長率を与える波数が有限 ($k = 1/\sqrt{2}$) であったのに対し、今の場合には $\sigma = \eta(1 - k^2)$ であるのでゼロ波数となっている。したがって、数値計算では系の最大スケールに対応する波数が最大成長率をもつので、長波長不安定性が分散性の強い場合のパルス群の相互作用を支配し、パルス群が一種の変調不安定性のような形で不規則運動をするものと思われる。

2.3 局在構造と強いカオス

強いカオスの場合には、局在構造は強い相互作用のため変形や生成・消滅を起こすので局在パルス（定常パルス解）の重ね合わせでは記述できない。しかし、統計的な平均量については定常パルス解（厳密解または数値解）の重ね合わせが第0近似としてなお成り立つと考えられる。

Kuramoto-Sivashinsky (KS) 方程式については数値解、Ginzburg-Landau (GL) 方程式については厳密解の重ね合わせによってエネルギースペクトルの構造を説明する試みが行われた。

(a) Kuramoto-Sivashinsky方程式

Kuramoto-Sivashinsky方程式

$$u_t + u u_x + u_{xx} + u_{xxxx} = 0 \quad (2.7)$$

のカオス解を周期領域の中にN個のパルス(定常進行波解)が適当な間隔で分布しているとする。このとき、エネルギー・スペクトルは、近似的に

$$\begin{aligned} \langle E(k) \rangle &= \frac{1}{2} N |F(k)|^2 \{-1 + 2 \operatorname{Re}[1 - p(k)]^{-1}\} \\ &= \frac{1}{2} |F(k)|^2 \langle g(k) \rangle \end{aligned} \quad (2.8)$$

で与えられる。 $|F(k)|^2$ は単一パルスのフーリエ変換により得られるエネルギー、 $\langle g(k) \rangle$ はパルスの間隔分布のフーリエ変換である。{[6]参照}

定常パルス解(数値解)から $|F(k)|$ を求め、数値実験で求めたパルスの間隔分布から $\langle g(k) \rangle$ を出せば、エネルギー・スペクトル $\langle E(k) \rangle$ が求まる。図3に示すように、重ね合わせモデルの結果は数値実験で得られるKSカオスのスペクトルと非常によい一致を示す。とくに、従来の統計理論では説明出来なかった中間波数領域におけるスペクトルのこぶは、局在構造が特定の間隔で配列することに依ることが明らかとなった。

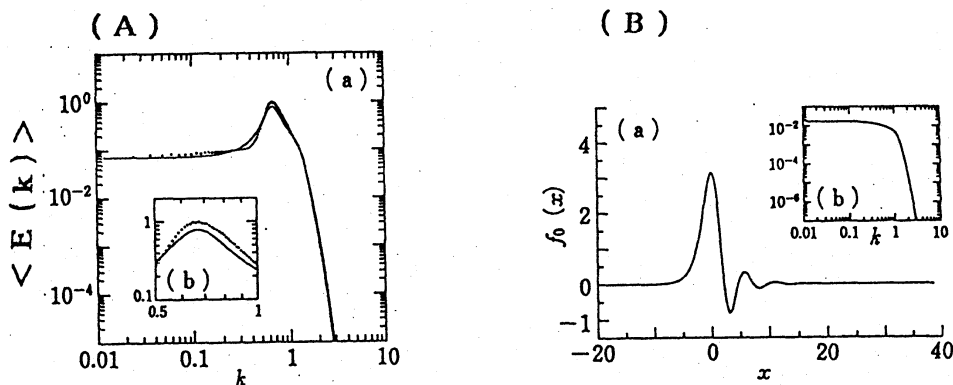


図3. Kuramoto-Sivashinskyカオスのスペクトル (A)数値実験(点線)と理論モデル(実線)の比較 (B)定常パルス解(a)とスペクトル(b)

(b) Ginzburg-Landau方程式

Ginzburg-Landau方程式

$$i a_t + (p_r + i p_i) a_{xx} + (q_r + i q_i) |a|^2 a = i r a \quad (2.9)$$

に対しては厳密解として包絡ソリトン解が求められているので、その重ね合わせを考えればよいが、間隔分布と位相分布を考慮する必要がある。

領域 $[0, L]$ に N 個の包絡ソリトンがあるとして重ね合わせると

$$a(x, t) = \sum_{j=1}^N a_0 [\operatorname{sech} \lambda (x - \xi_j)]^{1+i\alpha} \exp(-i\Omega t + i\phi_j) \quad (2.10)$$

となる。ここに

$$|a_0|^2 = \lambda^2 [(2 - \alpha^2) p_i + 3\alpha p_r] / q_i,$$

$$\alpha = -\beta + (\beta^2 + 2)^{1/2},$$

$$\beta = 3(p_r q_r + p_i q_i) / 2(p_r q_i - p_i q_r),$$

$$\lambda^2 = r / [p_i(1 - \alpha^2) + 2\alpha p_r],$$

$$\Omega = -\lambda^2 [p_r(1 - \alpha^2) - 2\alpha p_i]$$

である。{[7]参照} これをフーリエ変換すると

$$g(x, t) = L^{-1} \int_0^L a(x, t) \exp(-ikx) dx \equiv L^{-1} f(k) R$$

$$f(k) = \int_0^L a_0 [\operatorname{sech} \lambda x]^{1+i\alpha} \exp(-ikx) dx$$

$$R = [\exp(-ik\xi_1 + i\phi_1) + \exp(-ik\xi_2 + i\phi_2) + \dots + \exp(-ik\xi_N + i\phi_N)] \exp(-i\Omega t) \quad (2.11)$$

となり、エネルギー・スペクトルは

$$\begin{aligned} \langle |g(k, t)|^2 \rangle &= L^{-2} |f(k)|^2 \langle RR^* \rangle \\ &= |a_0|^2 \pi L^{-2} \lambda^{-2} \alpha^{-1} \sinh \pi \alpha \\ &\quad \times \{ \cosh^2(\pi k / 2\lambda) + \sinh^2(\pi \alpha / 2) \}^{-1} \langle RR^* \rangle \\ &\equiv F(k) \langle RR^* \rangle = NF(k) P(k) \end{aligned} \quad (2.12)$$

で与えられる。 $\langle \cdot \rangle$ は間隔分布と位相分布に関する平均を表す。{[8]参照}

数値実験によるスペクトルと重ね合わせモデルによるスペクトルの比較例を図4に示す。この場合一致はそれほど良くないが、それは以下の理由によるものと考えられる。

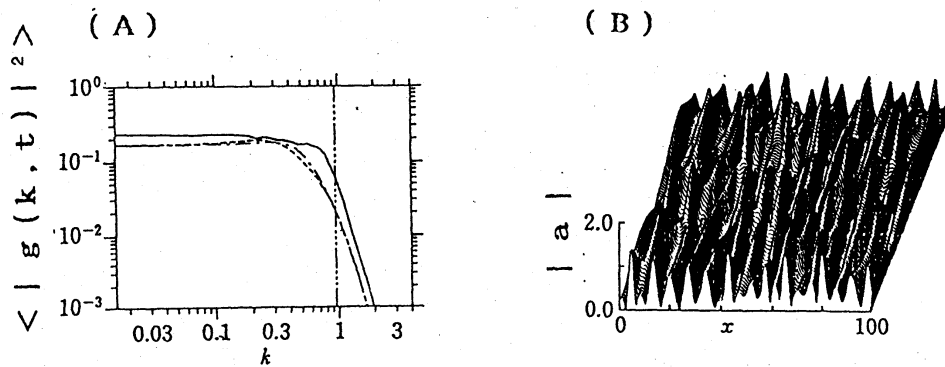


図4. Ginzburg-Landauカオスのスペクトル (A) 数値実験 (実線) と理論モデル (一点鎖線: 数値実験による分布、破線: ガウス間隔分布) の比較 ($p_r = q_r = 1$, $-p_i = q_i = r = 0.01$) (B) 波形 $|a|$ の時間変化

Kuramoto-Sivashinsky方程式の線形成長率は $\sigma = k^2 - k^4$ で与えられるので、最大成長率を与える波数は $k_{\max} = 1/\sqrt{2}$ であり、パルス配列の周期は k_{\max} で決まる。また、単一パルスのスペクトルは平坦部分が広い形となっている。パルスの配列間隔がパルスのスケールより十分長いので十分離れたパルスの重ね合わせがよい近似となる。 k_{\max} が単一パルスのスペクトルの平坦部にあるためパルスの配列間隔によりスペクトルにこぶ構造を生じることになる。

一方、Ginzburg-Landau方程式の場合には線形成長率は $\sigma = \gamma - p_i k^2$ である。パルス間隔とパルスのスケールが同程度となりパルスの周期配列の効果はスペクトルには顕著には現れない。重ね合わせモデルによるスペクトルは中間波数領域の構造をうまく説明できないが、これは強い相互作用 (生成・消滅)、すなわちダイナミクスの考慮が必要であることを示唆している。

3. 空間高次元化

自由度の増大や空間次元の高次元化によって可積分性が破れることはよく知られている。

例えば、連立方程式: $i a_t + a_{xx} = n a$, $n_{tt} - c_p^2 n_{xx} = (|a|^2)_{xx}$ は非可積分であるが、第2式を近似して $n_t + c_p n_x = (|a|^2)_x$ とすると可積分となる。また、空間 d 次元の非線形Schrödinger方程式 $i a_t + \Delta^d a + |a|^s a = 0$ (Δ^d : d 次元Laplacian) の解は、 $s d < 4$ のとき安定であるが、 $s d \geq 4$ のとき不安定で崩壊 (発散) を起こすことが示されている。{ [9] 参照 }

このように可積分な1次元ソリトン方程式の空間次元を素直に拡張すると崩壊、爆発、集中などの現象が起こり空間高次元局在構造が存在しなくなることが多い。また、1次元構造はしばしば高次元不安定となることから空間高次元の局在構造の存在、あるいは空間高次元ソリトンの可能性が興味深い問題となる。以下では空間2次元のBenney方程式の数値解および2次元純分散方程式について局在ソリトンの可能性の問題を考える。

3.1 2次元Benney方程式

2次元Benney方程式

$$u_t + u u_x + \delta \Delta u_x + u_{xx} + \Delta^2 u = 0 \quad (\Delta: 2 \text{次元Laplacian}) \quad (3.1)$$

の数値解は、定性的には1次元の場合と同様である。

- ① 分散性が強い場合には軸対称に近い局在パルスが特定の方向に配列した2次元ソリトン格子とも呼ぶべき状態に漸近する。パルス解は軸対称な釣鐘型のパルスに近くなる。(図5参照)
- ② 分散性が弱い場合には不規則変動を示す。波形は明瞭な形をとらず絶えず変動する。{[10]参照}

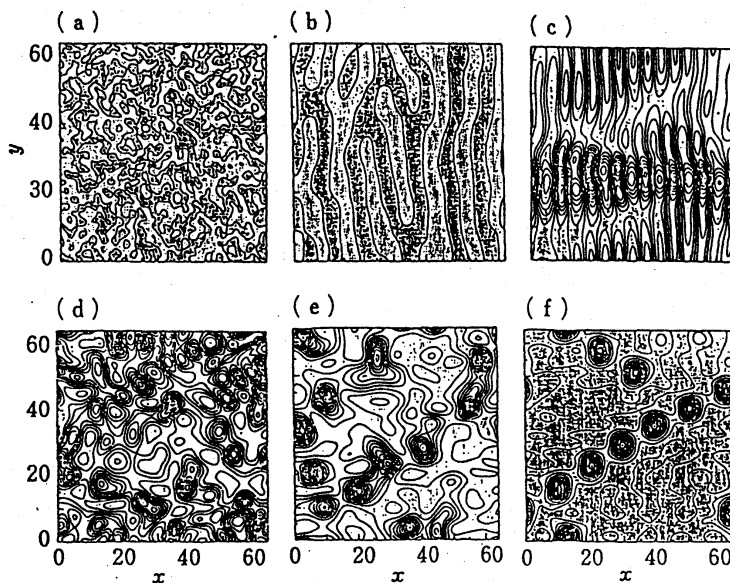


図5. 2次元Benney方程式の数値解 ($\delta = 25$) 釣鐘型パルス格子の生成 (a)初期ランダム場 (b)1次元構造の生成 ($t = 5$) (c)2次元不安定 ($t = 30$) (d)2次元構造の生成 ($t = 33$) (e)局在パルスの生成 ($t = 137$) (f)格子状パルス配列 ($t = 197$)

2次元Benney方程式は分散性が強い極限においてZakharov-Kuznetsov方程式に帰着する。そこで2次元純分散性方程式の局在パルス解がソリトンの振舞いを示すかどうかを数値実験によって調べた結果を同様な2次元方程式であるRegularized-long-wave (RLW) 方程式の場合と対比して示す。

3.2 Zakharov-Kuznetsov方程式

2次元Zakharov-Kuznetsov方程式

$$u_t + u_x + u_{xxx} + u_{xyy} + uu_x = 0 \quad (3.2)$$

の定常進行波解を $u = U(x - ct, y)$ と仮定すると、 U は

$$\Delta U = (c - 1)U - \frac{1}{2}U^2 \quad (3.3)$$

を満たす。これを $U = 2(c - 1)F(X, Y)$, $X \equiv (c - 1)^{1/2}(x - ct)$, $Y \equiv (c - 1)^{1/2}y$ とおいて書き換えると、 F に対する式として

$$\Delta F - F + F^2 = 0 \quad (\Delta \equiv \partial^2/\partial X^2 + \partial^2/\partial Y^2) \quad (3.4)$$

を得る。軸対称パルス解は

$$r^{-1}(d/dr)(r dF/dr) = F - F^2 \quad (r \equiv (x^2 + y^2)^{1/2}) \quad (3.5)$$

を解いて得られる。定常進行波解は $c > 1$ のとき存在し u の値が正の釣鐘型のパルスとなる。

このパルス解の相互作用を数値実験によって調べた結果は次のようである。

- ① 任意の初期条件から軸対称釣鐘型パルスが生成される。
- ② 釣鐘型パルスは単一では安定に伝わるが、衝突により僅かな変形を受ける。
- ③ 振幅の異なるパルスは融合衝突を行い、衝突後大きい方はより大きく、小さい方はより小さくなり、“さざ波”を発生する。(図6参照)
- ④ 振幅が同程度のパルスの衝突では、パルスがある程度接近した時点で融合せずに速度(運動量、エネルギー)を交換する。
- ⑤ 中心線のずれた衝突では、振幅が同程度のパルスの衝突でもさざ波の発生が認められる。

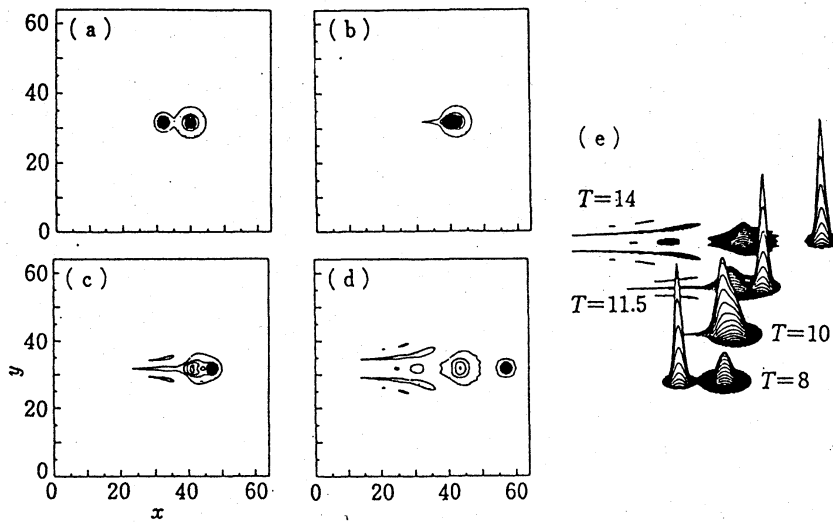


図6. Zakharov-Kuznetsov方程式の釣鐘型パルスの衝突(振幅比4:1).
等高線図: (a) $t=8$ (b) $t=10$ (c) $t=11.5$ (d) $t=14$
(e) 立体図 ($u \geq 0.1$ のみ表示)

以上の相互作用の性質は、Zakharov-Kuznetsov方程式の保存則

$$\begin{aligned} M(y) &\equiv \int u \, dx, & M &\equiv \int M(y) \, dy = \iint u \, dx \, dy \\ P &\equiv \iint \frac{1}{2} u^2 \, dx \, dy \\ H &\equiv \iint \frac{1}{2} [u^2 + \frac{1}{3} u^3 - (\nabla u)^2] \, dx \, dy \end{aligned} \quad (3.6)$$

とも矛盾しないことを示すことができる。とくに、さざ波の発生は、 $M(y)$ が y = 一定の各線上で保存量となっていることに依っている。{[11]参照}

3.3 2次元RLW方程式

Zakharov-Kuznetsov方程式と分散項の形が異なるRegularized-long-wave(RLW)方程式

$$u_t + u_x - (u_{xx} + u_{yy})_t + u u_x = 0 \quad (3.7)$$

についても同様に定常進行波解 $u = U(x - ct, y)$ を仮定すると

$$c \Delta U = (c - 1)U - \frac{1}{2} U^2 \quad (3.8)$$

を得る。そこで $U = 2(c - 1)F(X, Y)$, $X \equiv (1 - c^{-1})^{1/2}(x - ct)$, $Y \equiv (1 - c^{-1})^{1/2}y$ とおくと、 F は(3.4)を満たす。

F の解はZakharov-Kuznetsov方程式の場合と同様で軸対称な釣鐘型パルスとなる。しかし、この場合には c の符号によって u の値が正と負のパルスが可能である。 $c > 1$ のときには正のパルス、 $c < 0$ のときには負のパルスとなる。正と負のパルスは反対方向に伝わるので、同符号のパルスの追越し衝突 (overtaking collision) のほかに異符号パルスの正面衝突 (head-on collision) が可能となる。

数値実験の結果は次の様である。{ [12] 参照 }

- ① 単一のパルスは安定に伝わる。
- ② 同符号パルスの追越し衝突では、さざ波の発生も認められず Zakharov-Kuznetsov 方程式の場合より安定に見える。
- ③ 振幅が異なる異符号パルスの正面衝突はほぼ弾性的であるように見える。
- ④ ある種の共鳴条件 ($M \approx 0$) を満たす正負のパルスの正面衝突では、正負のパルスの対が複数個発生する。(図7参照)

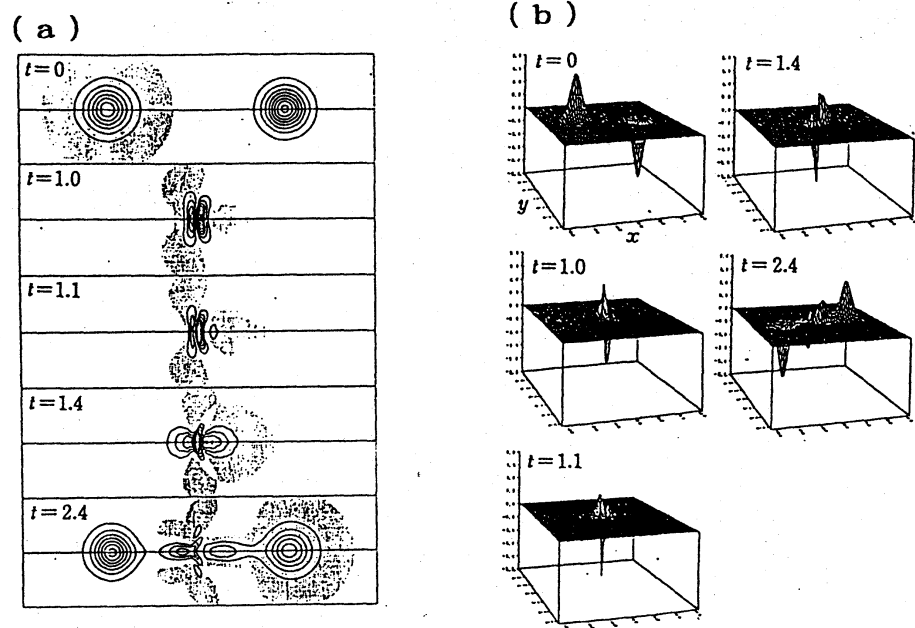


図7. 2次元RLW方程式の異符号釣鐘型パルスの正面衝突(パルス対の生成) (a)等高線図 (b)立体図

RLW方程式の保存則は

$$M \equiv \iint u \, dx \, dy$$

$$P \equiv \iint \frac{1}{2} [u^2 + (\nabla u)^2] \, dx \, dy$$

$$H \equiv \iint \frac{1}{2} [u^2 + \frac{1}{3} u^3] \, dx \, dy$$

(3.9)

で与えられる。Zakharov-Kuznetsov方程式の場合のように各 y について $M(y)$ が保存されるという制限は今の場合にはない。このため“さざ波”の発生は認められなくなり、衝突はより弾性的に見える。しかし、共鳴条件を満たす正と負のパルスの衝突ではパルス個数が保存されないことになる。{文献[12]参照}

このように、線形項の形によってパルスの相互作用の様子も微妙に異なってくる。また、2次元的に局在した釣鐘型パルスは単一では極めて安定であるが、相互作用（衝突）によってさざ波を発生し、変形したり、個数を保存しなかったりするので、厳密な意味でのソリトンとはならず、いわば“準ソリトン”(quasi-soliton; robust but not complete soliton)ということになる。

4. おわりに

講演では以上の他に、散逸型方程式の3次元局在定常構造に関するRabinovichらの仕事{[13]参照}の紹介と混相流体（気泡流、液滴流、粉末流、マグマ流など）における波動が、Benney方程式、Zakharov-Kuznetsov方程式、RLW方程式などで近似できることにも触れたが、ここではそれらは省略する。簡単な非線形発展方程式の解に関するこれまでの考察から非線形波動の取り扱い上留意すべき点として以下の点を指摘してまとめとしておきたい。

(1) 非線形発展方程式の解は、Benney方程式と不安定KdV-Burgers方程式の不安定項・散逸項の違い、Zakharov-Kuznetsov方程式とRLW方程式の分散項の違いのように、線形項の形が異なるだけでも大きく異なることがあるので一般的な結論を得ることは難しい。したがって、実際の物理現象との対応を論ずる場合には、近似方程式と現象との対応に留意し、個々の問題を注意深く取り扱う必要がある。

(2) 1次元で安定な解も空間次元を高めると不安定となることが実際現象でもしばしば認められる。また、空間高次元への拡張により崩壊、爆発、集中などの特異性が現れソリトン解自体が存在しなくなる場合もあり、1次元で成功したソリトン理論も2次元以上には直ちに適用できない。ソリトン理論は1次元分散性波動について多くの結果をもたらしたが、実際現象に近づくためには空間高次元の場合の研究を進展させる必要がある。

{なお、全般にわたる内容については文献[14]の7章、8章を参照されたい}

参考文献

- [1] Y. Kodama: *Physica D* 16 (1985) 14. *Phys. Lett.* A112 (1985) 193.
Proc. IUTAM Symp. Nonlinear Water Waves (eds. K. Horikawa & H. Maruo)
Springer (1988) pp. 85-91.
- [2] T. Kawahara: *Phys. Rev. Lett.* 51 (1983) 381.
- [3] T. Kawahara & S. Toh: *Phys. Fluids* 28 (1985) 1636. *Phys. Fluids* 31
(1988) 2103.
- [4] T. Kawahara & M. Takaoka: *J. Phys. Soc. Japan* 57 (1988) 3714. *Physica*
D39 (1989) 43.
- [5] T. Kawahara & S. Toh: *Contributions to Nonlinear Wave Motion* (ed.
A. Jeffrey), Longman Scientific & Technical (1988) pp. 95-117.
- [6] S. Toh: *J. Phys. Soc. Japan* 56 (1987) 949.
- [7] N. R. Pereira & L. Stenflo: *Phys. Fluids* 20 (1977) 1733.
K. Nozaki & N. Bekki: *J. Phys. Soc. Japan* 53 (1984) 1581.
- [8] S. Kishiba, S. Toh & T. Kawahara: *Physica D* 54 (1991) 43.
- [9] F. H. Berkshire & J. D. Gibbon: *Stud. Appl. Math.* 69 (1983) 229.
A. C. Newell, D. A. Rand & D. Russell: *Physics D* 33 (1988) 281.
- [10] S. Toh, H. Iwasaki & T. Kawahara: *Phys. Rev.* A40 (1989) 5472.
- [11] H. Iwasaki, S. Toh & T. Kawahara: *Physica D* 43 (1990) 293.
- [12] T. Kawahara, K. Araki & S. Toh: *Physica D* 59 (1992) 79.
- [13] A. S. Lomov & M. I. Rabinovich: *JETP Lett.* 48 (1988) 648.
K. A. Gorshkov, A. S. Lomov & M. I. Rabinovich: *Phys. Lett.* A137 (1989) 250.
- [14] 川原琢治: ソリトンからカオスへー非線形発展方程式の世界ー 朝倉書店
(1993) 7章、8章.