数理解析研究所講究録
第868巻1994年31-38



# Discrete Lotka-Volterra Equationの保存量
# Conserved Quantities of Discrete Lotka-Volterra Equation

広田良吾　辻本 諭
Ryogo HIROTA, Satoshi TSUJIMOTO

早稲田大学理工学部
School of Science and Engineering, Waseda University

## 1 はじめに

近年、計算機の発明とその発展により、離散系に対する研究が盛んになってきており、可積分系の分野においても、その代表的非線形微分方程式の離散化がなされてきた。しかし、離散系においては、連続系での議論をそのままの形では用いることができず、様々な概念を再度構築する必要がある。

ここでは、離散系における保存量について、食物連鎖のモデル方程式であるVolterra方程式を例にとり、その離散化から議論していく事にする。

## 2 Lotka-Volterra Equationの差分化

ここでは、隣接した$2M$種との相互作用を考慮したVolterra系である次の方程式について考える[1)]。

$$\frac{d}{dt}u_n = u_n(\sum_{j=1}^{M} u_{n-j} - \sum_{j=1}^{M} u_{n+j}), \tag{1}$$

本稿では、この方程式を 'Hungry Lotka-Volterra'(HLV) 方程式と呼ぶ事にする。このHLV方程式は、通常のLotka-Volterra方程式と同様に可積分系であることが知られており、従属変数変換により、

$$u_n = (\log \tau_n/\tau_{n+1})_t + 1 \tag{2}$$

$$= 1 + \frac{\tau_n'}{\tau_n} - \frac{\tau_{n+1}'}{\tau_{n+1}} \tag{3}$$

$$= \frac{\tau_{n+M+1}\tau_{n-M}}{\tau_{n+1}\tau_n} \tag{4}$$

双線形方程式

$$D_t\tau_{n+1}\cdot\tau_n + \tau_{n+M+1}\tau_{n-M} - \tau_{n+1}\tau_n = 0 \tag{5}$$

に変換することができる。(積分定数をゼロに選んだ)

$$\sum_{j=1}^{M} u_{n-j} = M + \{\frac{\tau'_{n-M}}{\tau_{n-M}} - \frac{\tau'_{n-M+1}}{\tau_{n-M+1}}\} + \{\frac{\tau'_{n-M+1}}{\tau_{n-M+1}} - \frac{\tau'_{n-M+2}}{\tau_{n-M+2}}\}$$
$$+ \cdots + \{\frac{\tau'_{n-2}}{\tau_{n-2}} - \frac{\tau'_{n-1}}{\tau_{n-1}}\} + \{\frac{\tau'_{n-1}}{\tau_{n-1}} - \frac{\tau'_{n}}{\tau_{n}}\}$$
$$= M + \{\frac{\tau'_{n-M}}{\tau_{n-M}} - \frac{\tau'_{n}}{\tau_{n}}\} \tag{6}$$

よって

$$u_n(\sum_{j=1}^{M} u_{n-j} - \sum_{j=1}^{M} u_{n+j}) = \frac{\tau_{n+M+1}\tau_{n-M}}{\tau_{n+1}\tau_n}(\frac{\tau'_{n-M}}{\tau_{n-M}} - \frac{\tau'_{n}}{\tau_{n}} - \frac{\tau'_{n+1}}{\tau_{n+1}} + \frac{\tau'_{n+M+1}}{\tau_{n+M+1}}) \tag{7}$$
$$\frac{d}{dt}u_n = \frac{(\tau_{n+M+1}\tau_{n-M})_t}{(\tau_{n+1}\tau_n)} - \frac{(\tau_{n+1}\tau_n)_t}{(\tau_{n+1}\tau_n)^2} \tag{8}$$

双線形方程式 (5) の差分化として、様々なものが考えられる。その中で、ここでは次の双線形差分方程式を採用する。

$$\delta\tau^{t+1}_{n+M+1}\tau^{t}_{n-M} - (1+\delta)\tau^{t}_{n+1}\tau^{t+1}_{n} + \tau^{t+1}_{n+1}\tau^{t}_{n} = 0 \tag{9}$$

(5) 式に対応するよう書き直すと、

$$\tau^{t+1}_{n+1}\tau^{t}_{n} - \tau^{t}_{n+1}\tau^{t+1}_{n} + \delta(\tau^{t+1}_{n+M+1}\tau^{t}_{n-M} - \tau^{t}_{n+1}\tau^{t+1}_{n}) = 0. \tag{10}$$

ここで、双線形差分方程式 (9) を通常の非線形差分方程式に戻すことを考える。再び、従属変数変換

$$u^t_n \equiv \frac{\tau^{t+1}_{n+M+1}\tau^{t}_{n-M}}{\tau^{t+1}_{n+1}\tau^{t}_{n}}. \tag{11}$$
$$= \frac{1+\delta}{\delta}\frac{\tau^{t}_{n+1}\tau^{t+1}_{n}}{\tau^{t+1}_{n+1}\tau^{t}_{n}} - \frac{1}{\delta} \tag{12}$$

$$1 + \delta u^t_n = (1+\delta)\frac{\tau^{t}_{n+1}\tau^{t+1}_{n}}{\tau^{t+1}_{n+1}\tau^{t}_{n}} \tag{13}$$

$$\prod_{i=1}^{M}(1+\delta u^t_{n-i})\frac{1}{1+\delta u^{t+1}_{n+i}} =$$
$$\frac{\tau^t_n\tau^{t+1}_{n-1}}{\tau^{t+1}_n\tau^t_{n-1}}\frac{\tau^t_{n-1}\tau^{t+1}_{n-2}}{\tau^{t+1}_{n-1}\tau^t_{n-2}}\cdots\frac{\tau^t_{n-M+1}\tau^{t+1}_{n-M}}{\tau^{t+1}_{n-M+1}\tau^t_{n-M}} \times \frac{\tau^{t+2}_{n+2}\tau^{t+1}_{n+1}}{\tau^{t+1}_{n+2}\tau^{t+2}_{n+1}}\frac{\tau^{t+2}_{n+3}\tau^{t+1}_{n+2}}{\tau^{t+1}_{n+3}\tau^{t+2}_{n+2}}\cdots\frac{\tau^{t+2}_{n+M+1}\tau^{t+1}_{n+M}}{\tau^{t+1}_{n+M+1}\tau^{t+2}_{n+M}}$$
$$= \frac{\tau^t_n\tau^{t+1}_{n-M}}{\tau^{t+1}_n\tau^t_{n-M}} \times \frac{\tau^{t+1}_{n+1}\tau^{t+2}_{n+M+1}}{\tau^{t+2}_{n+1}\tau^{t+1}_{n+M+1}} \tag{14}$$
$$\frac{u^{t+1}_n}{u^t_n} = \frac{\tau^{t+2}_{n+M+1}\tau^{t+1}_{n-M}}{\tau^{t+2}_{n+1}\tau^{t+1}_{n}} \times \frac{\tau^{t+1}_{n+1}\tau^{t}_{n}}{\tau^{t+1}_{n+M+1}\tau^{t}_{n-M}} \tag{15}$$

により、

$$\frac{u_n^{t+1}}{u_n^t} = \prod_{i=1}^{M} \frac{1+\delta u_{n-i}^t}{1+\delta u_{n+i}^{t+1}}, \tag{16}$$

を得る。

(16) 式の分母を払い、$\delta$の次数でそろえることにより、次式のように書き表される。

$$u_n^{t+\delta} - u_n^t = \delta \sum_{i=1}^{M} (u_n^t u_{n-i}^t - u_n^{t+\delta} u_{n+i}^{t+\delta}) + \delta^2 \cdots .$$

$\delta \to 0$ の極限で HLV 方程式に一致している。(16) 式が、Hungry Lotka-Volterra 方程式の差分化となっていることがわかる。

# 3 Discrete KP Equation からの Reduction

前節で採用された双線形差分方程式 (9) の行列式解を導くことにより、d-HLV 方程式 (16) の可積分性を確かめる。そのため、ここでは、Casorati 行列式解などが知られている, discrete Kadomtsev-Petviashvili (d-KP) 方程式[2)]

$$\begin{aligned} &a(b-c)\tau(k-1,l,m;s)\tau(k,l-1,m-1;s) \\ &+ b(c-a)\tau(k,l-1,m;s)\tau(k-1,l,m-1;s) \\ &+ c(a-b)\tau(k,l,m-1;s)\tau(k-1,l-1,m;s) = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

から d-HLV 方程式を導出することにより、d-HLV 方程式の双線形方程式の行列式解を与える。ここで $a,b,c$ は、それぞれ独立変数 $k,l,m$ の差分間隔であり、$s$ は隠された独立変数とする。

d-KP 方程式の独立変数である $k,l,m$ から独立変数 $t,l',n$ への変換と、Reduction 条件を考える

$$\begin{pmatrix} t \\ l' \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$\tau(t,l'-1,n+M) \simeq \tau(t,l',n) \tag{19}$$

この時、d-KP 方程式 (17) は次のように変換される。

$$\begin{aligned} &a(b-c)\tau(t-1,l',n;s)\tau(t,l',n+1;s) \\ &+ b(c-a)\tau(t,l',n;s)\tau(t-1,l',n+1;s) \\ &+ c(a-b)\tau(t-1,l',n-M;s)\tau(t,l',n+M+1;s) = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

ここで、独立変数 $t,n$ の差分間隔をそれぞれ$\delta,\epsilon$とし、つぎように定義するし、

$$\delta \equiv \frac{a-b}{a} \tag{21}$$

$$\epsilon \equiv \frac{c}{b-c} \tag{22}$$

書き直すと、

$$\begin{aligned}&\tau(t+1,l',n+1)\tau(t,l',n)\\-&(\delta\epsilon+1)\tau(t,l',n+1)\tau(t+1,l',n)\\+&\delta\epsilon\tau(t,l',n-M)\tau(t+1,l',n+M+1)=0\end{aligned} \tag{23}$$

任意パラメーターである差分間隔$\epsilon$を 1 と選ぶと, 式 (23) は d-HLV 方程式の双線形方程式 (9) にほかならない. つまり、双線形方程式のレベルで d-KP 方程式から d-HLV 方程式を導出することができた。

次に、双線形方程式での変換を行列式解で実現することを考える。

d-KP 方程式の Casorati 行列式解[3)]は次の形をしている。

$$\tau_m^{k\,l}=det|f_i(k,l,m,s+j-1)|_{1\leq i,j\leq N} \tag{24}$$

行列式の要素 $f$は次のような関数になる。

$$f=\sum_p C_p(1-ap)^{-k}(1-bp)^{-l}(1-cp)^{-m}\cdots p^s \tag{25}$$

双線形方程式の時と同様に、独立変数変換 (18) より、関数 $f$は

$$f_i(t,l',n;s)=\sum_{i=1}^{\infty}C_i(\frac{1-ap_i}{1-bp_i})^t(1-bp_i)^{l'}(1-cp_i)^{-n}\cdots p_i^s \tag{26}$$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^t\left(\frac{b-c}{b}\right)^{-n}\sum_{i=1}^{\infty}C_i(1-\delta\tilde{p}_i)^t\tilde{p}_i^{-l'}(1+\epsilon\tilde{p}_i^{-1})^{-n} \tag{27}$$

と、書き表される ($\tilde{p}\equiv\frac{1}{1-bp}$)。さらに、Reduction 条件 (19) より、$f$は、次のように制限される。

$$f^S(t,l',n;s)=\left(\frac{a}{b}\right)^t\left(\frac{b-c}{b}\right)^{-n}\sum_{j=1}^{M+1}C_{p(j)}(1-\delta\tilde{p}(j))^t\tilde{p}(j)^{-l'}(1+\epsilon\tilde{p}(j)^{-1})^{-n} \tag{28}$$

ここで、任意定数であった$\tilde{p}(i)$ と$\tilde{p}(j)$ $(j=1,2,\cdots,M+1)$ の間には次の関係がある。

$$\tilde{p(i)}^{-1}(1+\epsilon\tilde{p(i)}^{-1})^M=\tilde{p}(j)^{-1}(1+\epsilon\tilde{p}(j)^{-1})^M \tag{29}$$

以上より、

$$f_i^S(t,l'-1,n+M)=\left(\frac{b-c}{b}\right)^{-M}p_i\tilde{(1)}(1+\epsilon\tilde{p}_i(1)^{-1})^{-M}f_i^S(t,l',n) \tag{30}$$

$$\tau(t,l'-1,n+M)=\left(\frac{b-c}{b}\right)^{-NM}\prod_{i=1}^{N}\tilde{p}_i(1)(1+\epsilon\tilde{p}_i(1)^{-1})^{-M}\tau(t,l',n) \tag{31}$$

双線形方程式の行列解に対する Reduction 条件 (19) が満たされた。$\tilde{p}(j)$ に対する条件式 (29) をとくと、$\tilde{p}(j)$ のうち、次のとおり少なくとも 2 つは単純な形で表わせる。

$$\tilde{p}(1) = -\sum_{i=0}^{M} \epsilon \bar{p}^{i} \tag{32}$$

$$\tilde{p}(2) = -\sum_{i=0}^{M} \epsilon \bar{p}^{-i} \tag{33}$$

以上より、双線形差分方程式 (d-HLV 方程式) に対し、Casorati 行列式で表わされる解を陽に与えることができた。

# 4 Lax-Pair

ここでは、Discrete Analogue of Generalized Toda Equation (DAGTE)

$$[Z_1 \exp(D_1) + Z_2 \exp(D_2) + Z_3 \exp(D_3)] f \cdot f = 0. \tag{34}$$

のバックルンド変換をまず考える[4]。この形式では、d-KP 方程式あるいは、d-HLV 方程式の双線形方程式のバックルンド変換も自動的に得られる。最初に、恒等的に 0 である $P$という量を導入する。

$$\begin{aligned} P \equiv & \{[Z_1 \exp(D_1) + Z_2 \exp(D_2) + Z_3 \exp(D_3)] \tilde{f} \cdot \tilde{f}\}[\exp(D_3) f \cdot f] \\ & -[\exp(D_3) \tilde{f} \cdot \tilde{f}]\{[Z_1 \exp(D_1) + Z_2 \exp(D_2) + Z_3 \exp(D_3)] f \cdot f\} \end{aligned} \tag{35}$$

ここで $f$ あるいは $\tilde{f}$ は (34) 式の相異なる解とする。$P$は交換公式

$$\begin{aligned} & [\exp(D_1) f_1 \cdot f_2][\exp(D_3) f_3 \cdot f_4] \\ & = \exp[(D_1 - D_3)/2]\{\exp[(D_1 + D_3)/2] f_1 \cdot f_4\} \cdot \{\exp[(D_1 + D_3)/2] f_3 \cdot f_2\} \end{aligned} \tag{36}$$

により

$$\begin{aligned} P \equiv & 2Z_1 \sinh[(D_1 - D_3)/2]\{[\exp(D_1 + D_3)/2] \tilde{f} \cdot f\} \cdot \{[\exp(D_1 + D_3)/2] f \cdot \tilde{f}\} \\ & + 2Z_2 \sinh[(D_2 - D_3)/2]\{[\exp(D_2 + D_3)/2] \tilde{f} \cdot f\} \cdot \{[\exp(D_2 + D_3)/2] f \cdot \tilde{f}\} \end{aligned} \tag{37}$$

と変換される。ここで$\tilde{f}$と $f$を関係づける連立方程式を得る。

$$\{\alpha_1 \exp[\frac{D_1 + D_3}{2}] - \exp[-\frac{D_1 + D_3}{2}] - \mu_1 \exp[\frac{D_1 + 2D_2 - D_3}{2}]\} \tilde{f} \cdot f = 0 \tag{38-a}$$

$$\{\alpha_2 \exp[\frac{D_2 + D_3}{2}] - \exp[-\frac{D_2 + D_3}{2}] - \mu_2 \exp[\frac{D_2 + 2D_1 - D_3}{2}]\} \tilde{f} \cdot f = 0 \tag{38-b}$$

$\alpha_i$ $(i = 1, 2)$ は任意定数であり、$\mu_i (i = 1, 2)$ は次の関係を満たす新たなパラメータとする。

$$\mu_1 Z_1 + \mu_2 Z_2 = 0 \tag{39}$$

そして、(38) 式を (37) 式に代入し、次の交換公式

$$
\begin{aligned}
&\exp(D_a)\{\exp(D_b)\tilde{f}\cdot f\}\cdot\{\exp(D_c)\tilde{f}\cdot f\}\\
&=\exp[(D_b-D_c)/2]\{\exp[(D_b+D_c)/2+D_a]\tilde{f}\cdot f\}\cdot\{\exp[(D_b+D_c)/2-D_a]\tilde{f}\cdot f\}
\end{aligned}
\tag{40}
$$

($D_a, D_b, D_c$ は $D_1, D_2, D_3$の線形結合を意味する) より、

$$
\begin{aligned}
P &= 2(Z_1\mu_1+Z_2\mu_2)\sinh[(D_1-D_3)/2]\\
&\times\{\exp[(D_1+2D_2-D_3)/2]\tilde{f}\cdot f\}\cdot\{\exp[(D_1+D_3)/2]\tilde{f}\cdot f\}
\end{aligned}
\tag{41}
$$

と変換される。

(41) 式は、$P$が$\mu_1 Z_1+\mu_2 Z_2=0$ の時、0 になる事を示す。(38) 式が DAGTE のバックルンド変換である。また、DAGTE は $D_i (i=1,2,3)$ の符合に関し、不変であることより、(38) 式の $D_i$の符合は任意に選ぶことが可能である。

d-HLV 方程式の場合、DAGTE のパラメータを次のように選ぶ。

$$D_1=\frac{D_t+(2M+1)D_n}{2} \tag{42}$$

$$D_2=\frac{-D_t+D_n}{2} \tag{43}$$

$$D_3=\frac{D_t+D_n}{2} \tag{44}$$

$Z_1=\delta, Z_2=-(1+\delta)$、及び $Z_3=1$. (38) 式より、バックルンド変換が得られる。

$$
\begin{aligned}
[\alpha e^{\frac{D_t+(M+1)D_n}{2}}-e^{\frac{-D_t-(M+1)D_n}{2}}-e^{\frac{-D_t+(M+1)D_n}{2}}]f_n^t\cdot g_n^t &= 0\\
[\lambda e^{\frac{D_n}{2}}-(1+\delta)e^{-\frac{D_n}{2}}-\delta e^{\frac{(2M+1)D_n}{2}}]f_n^t\cdot g_n^t &= 0
\end{aligned}.
\tag{45}
$$

ただし、$\alpha_1=\alpha, \alpha_2=\frac{\lambda}{1+\delta}$と任意定数を置き直してある。D-オペレーターを用いずに表わすと、

$$
\begin{aligned}
f_{n+1}^t g_{n-M}^{t+1}+f_{n-M}^t g_{n+1}^{t+1} &= \alpha f_{n+1}^{t+1} g_{n-M}^t\\
(1+\delta)f_{n-M}^t g_{n-M+1}^t+\delta f_{n+1}^t g_{n-2M}^t &= \lambda f_{n-M+1}^t g_{n-M}^t
\end{aligned}
\tag{46}
$$

このバックルンド変換と

$$g_n^t=(1+\delta)^{-(n+M)+(M+1)(t-1)}f_n^t\psi_{n+M}^{t-1} \tag{47}$$

より Lax-Pair が得られる。

$$
\begin{cases}
\prod_{i=0}^{M}(1+\delta u_{n-i}^{t+1})\psi_n^{t+1}+\psi_{n+M+1}^{t+1}=\alpha\psi_n^t\\
\delta u_n^t\prod_{i=1}^{M}(1+\delta u_{n-i}^t)\psi_{n-M}^t+\psi_{n+1}^t=\lambda\psi_n^t
\end{cases}
\tag{48}
$$

ここで従属変数の変換を再び書いておこう。

$$u_n^t=\frac{f_{n-M}^t f_{n+M+1}^{t+1}}{f_n^t f_{n+1}^{t+1}} \tag{49}$$

$$1+\delta u_n^t=(1+\delta)\frac{f_n^{t+1}f_{n+1}^t}{f_{n+1}^{t+1}f_n^t}. \tag{50}$$

## 5 保存量

(48) 式は、行列で表すことが可能である:

$$A(t)\tilde{\psi}(t+1) = \alpha\tilde{\psi}(t) \qquad (51\text{-a})$$

$$L(t)\tilde{\psi}(t) = \lambda\tilde{\psi}(t) \qquad (51\text{-b})$$

そして上の式の両立条件より、次の行列方程式が得られる。

$$A(t)L(t+1) = L(t)A(t). \qquad (52)$$

d-HLV 方程式 (16) の高次の保存量は次の関係式より容易に計算することができる。

$$\begin{aligned} H_m(t) &\equiv \mathrm{Tr}(L^m(t)), \qquad (53)\\ H_m(t+1) &\equiv \mathrm{Tr}(L^m(t+1)) \\ &= \mathrm{Tr}(A^{-1}(t)L^m(t)A(t)) \\ &= \mathrm{Tr}(L^m(t)) \\ &= H_m(t), \end{aligned}$$

$for\ m = 1, 2, 3, \cdots$.

ここで、$M = 2{,}5$ 周期的境界条件の場合を具体的に計算してみよう。

$$A = \begin{pmatrix} w_0^{t+1}w_4^{t+1}w_3^{t+1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & w_1^{t+1}w_0^{t+1}w_4^{t+1} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & w_2^{t+1}w_1^{t+1}w_0^{t+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w_3^{t+1}w_2^{t+1}w_1^{t+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & w_4^{t+1}w_3^{t+1}w_2^{t+1} \end{pmatrix} \qquad (54)$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & u_3^t w_2^t w_1^t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & u_4^t w_3^t w_2^t \\ u_0^t w_4^t w_3^t & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & u_1^t w_0^t w_4^t & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & u_2^t w_1^t w_0^t & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (55)$$

ここで、$w_n^t \equiv 1 + \delta u_n^t$とする。対角和より、$H_1 = H_2 = 0$

$$H_3 = 3\sum_{i=0}^{4} u_i w_{i-1} w_{i-2} \qquad (56)$$

$$H_4 = 4(u_4u_3u_1w_2 + u_4u_2u_1w_0 + u_4u_2u_0w_3 \qquad (57)$$

$$+u_3u_2u_0w_1 + u_3u_1u_0w_4)w_4w_3w_2w_1w_0 \qquad (58)$$

$$H_5 = 5\prod_{i=0}^{4} u_i w_i^2 \qquad (59)$$

保存量を求めることができる。$(w_{-1} \equiv w_4, w_{-2} \equiv w_3)$

## 6 終りに

本稿では、Hungry Lotka-Volterra 方程式の差分化を行ない、その差分方程式に対する保存量について議論した。離散系の保存量を求める手法としては、ここで用いたものの他に、Miura 変換から差分則を求めるといった手法もある [5]。差分則を求めることができれば、方程式に対する変数変換などの変換の後も保存量を求めることが可能である。$M=1$ の Discrete Lotka-Volterra 方程式に対する差分則は既に得られている。これを踏まえて、d-HLV 方程式の場合についてもその差分則の構成を試みている。

## References


[1] O.I.Bogoyavlenskii. Algebraic constructions of integrable dynamical systems - extensions of the volterra system. *Russian Math. Surveys*, 46:3:1–64, 1991.

[2] T.Miwa. On hirota's difference equations. *Proc.Jpn.Acad.*, 58:9–12, 1982.

[3] Y.Ohta, R.Hirota, S.Tsujimoto, and T.Imai. Casorati and discrete gram type determinant representations of solutions to the discrete kp hierarchy. *J.Phys.Soc.Jpn.*, 62:1872–1886, 1993.

[4] R.Hirota. Discrete analogue of a generalized toda equation. *J.Phys.Soc.Jpn.*, 50:3785–3791, 1981.

[5] A.Nakamura. Derivation of infinite number of conservation laws for non-linear difference-difference equations. *J.Phys.Soc.Jpn.*, 45:1044–1051, 1978.