数理解析研究所講究録
第 868 巻 1994 年 19-30

離散型パンルベ方程式とその解

東京大学工学部 梶原 健司[1]
東京大学大学院数理科学研究科 薩摩 順吉
広島大学工学部 太田 泰広

1 緒言

与えられた微分方程式の性質をうまく保存するような離散化は一般には難しいとされている。素朴な離散化は元の系の性質を保存しないだけでなく、しばしば数値カオスを引き起こす。しかし、元の系が可積分ならば、保存するべき性質がはっきりしているため、何か統一的な離散化の手法が確立できる可能性がある。Hirota らはその重要性に70年代から気づき、直接法に基いて「τ函数の構造を保存するような離散化」という先駆的な研究を行なってきた [1,2]。また、このような離散化は Miwa、Jimbo らによりτ函数の理論の立場から数学的な意味づけと拡張が行なわれた [3]。これらの研究はいわば「代数的」な立場からの研究であるが、「解析的」な立場、すなわち逆散乱法の立場からは、Ablowitz, Ladik の研究などがある [4]。しかし、離散系自体の解析の難しさもあり、離散化の成功例はあまり多くなかった。この状況はまさに現在変わりつつあり、Quispel らによるあるクラスの可積分な2階の常差分方程式の発見 [5] を契機としてさまざまな研究がなされている。また、量子系の相関函数などが満足する方程式として、さまざまな (q-) 差分方程式が導かれることや、数値解析のあるアルゴリズムそのものが離散型可積分系であることが見出されるなど [6-8]、離散型可積分系の重要性はますます高まりつつある。

しかし、離散系においては「可積分性」と呼ぶにふさわしい概念が、ある程度確立した形では抽出されていないことに注意されたい。例えば、ある性質に着目して離散化したとして、他の性質が保存される保証はないし、また、一つの手法によって同じ連続極限を持つ複数の差分方程式が得られることもある。従って、離散型可積分系の本質を捉えるためにはもっと多くの、さまざまな立場からの研究が行なわれる必要がある。

さて、連続系の可積分性の一つの定義として、パンルベ性(初期値に位置の依存する分枝点がない、という性質)があり、これは与えられた方程式が可積分かどうか判定する方法として有用であるが、離散系ではそれに対応する概念は知られていなかった。最近、Grammaticos らは Quispel らの構成した一連の差分方程式が持つ singularity confinement(SC) と呼ばれる共通の性質を抽出し、連続系のパンルベ性に対応する概念として離散系の可積分性の判定に用いた [9]。パンルベ性をもつもっとも基本的な方程式として、

[1] 1994年4月からの所属:同志社大学工学部電気工学科

6種のパンルベ方程式 (P_I-P_{VI}) が知られているが [10]、彼らは SC を用いて P_I-P_V に対応する離散型パンルベ方程式 (dP_I-dP_V) を提出した [11]。SC は「良い方程式」を判別する強力な方法であり、離散型可積分系の本質の一側面をついていそうな気配はするが、数学的な根拠は明らかでない。従って、まずその有効性を他の側面からも確かめることが重要である。また、dP_Iと dP_{II} は matrix model の理論で相関函数の満たす差分方程式として現れることから [12-14]、物理的な観点からもその性質を解明することは興味ある問題である。

ここで、5種の離散型パンルベ方程式のうち、最初の4つを列挙する。

$$dP_I: \qquad w_{n+1}+w_n+w_{n-1}=\frac{an+b}{w_n}+c, \tag{1}$$

$$dP_{II}: \qquad w_{n+1}+w_{n-1}=\frac{(an+b)w_n+c}{1-w_n^2}, \tag{2}$$

$$dP_{III}: \qquad w_{n+1}w_{n-1}=\frac{\alpha w_n^2+\beta\lambda^n w_n+\gamma\lambda^{2n}}{w_n^2+\delta w_n+\alpha}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} dP_{IV}: \qquad & w_{n+1}w_{n-1}+w_n(w_{n+1}+w_{n-1}) \\ &= \frac{-(an+b)w_n^3+(d-\frac{1}{4}(an+b)^2)w_n^2+m}{w_n^2+(an+b)w_n+(c+\frac{1}{4}(an+b)^2)}. \end{aligned} \tag{4}$$

ただし、w_nが従属変数、n が離散的な独立変数、他の文字はパラメータである。通常のパンルベ方程式の持つ性質のうち、退化図式 [11]、また、いくつかのものについては、Lax pair[15,16] や、Bäcklund 変換 [17] の存在が知られているが、それらの解についてはほとんど何の結果も得られていなかった。連続系では、パラメータが特殊な場合に解が特殊函数を要素とする Wronskian または Casorati 行列式で書ける厳密解があることが知られている。つまり、パンルベ方程式の解は特殊函数の非線形版、ともいうべき性質がある。従って、離散型パンルベ方程式が本当に「良い」方程式であるならば、離散型特殊函数を要素とする Casorati 行列式で書かれる厳密解があると予想される。

本稿では、第2種と第3種の離散型パンルベ方程式を取り上げ、その離散型特殊函数で書かれる解を議論する。

2 第2種の離散型パンルベ方程式の解

2.1 主な結果

P_{II}

$$w_{xx}-2w^3+2xw+\alpha=0\ , \tag{5}$$

は$\alpha=-(2N+1)$ のとき、[18,19],

$$\tau_N=\begin{vmatrix} Ai & \frac{d}{dx}Ai & \cdots & (\frac{d}{dx})^{N-1}Ai \\ \frac{d}{dx}Ai & (\frac{d}{dx})^2 Ai & \cdots & (\frac{d}{dx})^N Ai \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\frac{d}{dx})^{N-1}Ai & (\frac{d}{dx})^N Ai & \cdots & (\frac{d}{dx})^{2N-2}Ai \end{vmatrix}, \tag{6}$$

$$w_n=\frac{d}{dx}\log(\frac{\tau_{N+1}}{\tau_N}),$$

で表される解をもつ。ここで、Ai は

$$\frac{d^2}{dx^2}Ai=xAi, \tag{7}$$

を満足する Airy 函数である。さらに、(5) は解の表示を簡単にするために通常の文献で見られるものとはスケールを変えてあることを注意しておく。τ_Nはτ函数と呼ばれる。一般に、τ函数は戸田分子方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}\tau_N\cdot\tau_N-\left(\frac{d}{dx}\tau_N\right)^2=\tau_{N+1}\tau_{N-1}, \quad N=0,1,2,\cdots, \tag{8}$$

を満足することが知られている [18]。従って、離散型パンルベ方程式の場合は離散型戸田分子方程式 [6]

$$\tau_N(n+2)\tau_N(n)-\tau_N(n+1)^2=\tau_{N+1}(n+2)\tau_{N-1}(n), \quad N=0,1,2,\cdots, \tag{9}$$

を満足することが予想される。つまり、τ函数は

$$\tau_N(n)=\begin{vmatrix} f_n & f_{n+1} & \cdots & f_{n+N-1} \\ f_{n+1} & f_{n+2} & \cdots & f_{n+N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n+N-1} & f_{n+N} & \cdots & f_{n+2N-2} \end{vmatrix}, \tag{10}$$

という対称行列式となることが予想される。

結果を先に述べると、第2種の離散型パンルベ方程式

$$w_{n+1}+w_{n-1}=\frac{(\alpha n+\beta)w_n+\gamma}{1-w_n^2}, \tag{11}$$

はパラメータが

$$\alpha=2p, \quad \beta=(2N-1)p+2q, \quad \gamma=-(2N+1), \tag{12}$$

のときに、

$$\tau_N^n=\begin{vmatrix} A_n & A_{n+2} & \cdots & A_{n+2N-2} \\ A_{n+1} & A_{n+3} & \cdots & A_{n+2N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n+N-1} & A_{n+N+1} & \cdots & A_{n+3N-3} \end{vmatrix}, \tag{13}$$

$$w_n = \frac{\tau_{N+1}^{n+1}\tau_N^n}{\tau_{N+1}^n\tau_N^{n+1}} - 1 \,, \tag{14}$$

で表される解をもつ。ここで、A_nは

$$A_{n+2} = 2A_{n+1} - (pn+q)A_n \,. \tag{15}$$

を満足する。

(15) はまさに (7) の離散変数版となっており、A_nは離散型 Airy 函数というべきものである。しかし、(13) には添字が縦方向には 1 飛ばし、横方向には 2 飛ばしという非対称性がある。従って、τ函数は離散型戸田分子方程式を修正したものを満足するという、予想とは多少違った結果が得られた。また、この結果は $p=-\epsilon^3$, $q=1$, $w_n=\epsilon w$, $n=\frac{x}{\epsilon}$ととり、$\epsilon \to 0$ の極限をとれば連続系の結果と一致する。

2.2 結果の導出

まず、簡単な特解をもとめてみる。そのために連続系では Riccati 方程式を考えることが便利である。同様に、離散系では離散型 Riccati 方程式 [20]

$$w_{n+1} = \frac{a_n w_n + b_n}{c_n w_n + d_n} \,, \tag{16}$$

を考える。特に、$\mathrm{dP_{II}}$の場合は、w_nが

$$w_{n+1} = \frac{w_n - (an+b)}{1+w_n} \,, \tag{17}$$

を満足すれば、それは $\mathrm{dP_{II}}$の特解を与えることが容易にわかる。実際、(17) を w_nについて解き直して n をずらし、(17) に加えることで、$\mathrm{dP_{II}}$の特殊な場合が得られる。さて、(17) で

$$w_n = \frac{F_n}{G_n} \,, \tag{18}$$

とおけば、

$$G_{n+2} - 2G_{n+1} + G_n = -(an+b)G_n \,, \tag{19}$$

$$w_n = \frac{G_{n+1}}{G_n} - 1 \,, \tag{20}$$

という表式が得られる。(19) は本質的に (15) と同じ方程式で、(20) の右辺は通分すればわかるように、対数微分の離散変数版である。連続系でいえばこれは $N=0$ の場合に対応している。

次に $N\times N$の場合、つまり $\mathrm{dP_{II}}$ のパラメータが (12) の場合に解が (13)-(15) で与えられることを示すことにする。τ函数 (13) は次の 3 本の bilinear form を満足する。

$$\tau_{N+1}^{n-1}\tau_{N-1}^{n+2} = \tau_N^{n-1}\tau_N^{n+2} - \tau_N^n\tau_N^{n+1} \,, \tag{21}$$

$$\tau_{N+1}^{n+2}\tau_N^{n+1} - 2\,\tau_{N+1}^{n+1}\tau_N^{n+2} + (pn+q)\,\tau_{N+1}^n\tau_N^{n+3} = 0 \,, \tag{22}$$

$$\tau_{N+1}^{n+1}\tau_{N-1}^{n+2} = -(p(n+2N)+q)\ \tau_N^{n+2}\tau_N^{n+1} + (pn+q)\ \tau_N^{n}\tau_N^{n+3}\ . \tag{23}$$

とりあえず、これらの bilinear form が成立することを認めて、これから $\mathrm{dP_{II}}$を導こう。まず、

$$v_N^n = \frac{\tau_{N+1}^n}{\tau_N^n}\ , \qquad u_N^n = \frac{\tau_N^n\tau_N^{n+3}}{\tau_N^{n+1}\tau_N^{n+2}}\ , \tag{24}$$

を定義すると、(21)-(23) はそれぞれ

$$v_N^{n-1} = v_{N-1}^{n+2}\left(1 - \frac{1}{u_N^{n-1}}\right)\ , \tag{25}$$

$$v_N^{n+2} - 2v_N^{n+1} + (pn+q)u_N^n v_N^n = 0\ , \tag{26}$$

$$v_N^{n+1} = v_{N-1}^{n+2}\Big(-(p(n+2N)+q) + (pn+q)u_N^n\Big)\ , \tag{27}$$

に書き換えられる。(25)-(27) から u_Nと v_{N-1} を消去して、さらに w_nを

$$w_n = \frac{v_N^{n+1}}{v_N^n} - 1\ , \tag{28}$$

で導入すると、$\mathrm{dP_{II}}$(11), (12) が得られる。

最後に、τ函数 (13) が bilinear form (21)-(23) を満足することを示そう。それらはすべて行列式の恒等式 (Plücker relation, Jacobi identity) に帰着する。その前に、Jacobi identity について復習しておく。Dをある行列式とし、$D\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$を Dから i 行 j列を取り除いた行列式とする。すると、Jacobi identity は

$$D\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}\ D\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} - D\begin{pmatrix} i \\ l \end{pmatrix}\ D\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} = D\ D\begin{pmatrix} i & k \\ j & l \end{pmatrix}\ , \tag{29}$$

と書ける。(21) は Jacobi identity そのものである。実際、τ_{N+1}^{n-1}を Dとし、$i=j=1$, $k=l=N+1$ とおけば (21) は (29) に帰着する。従って、(13) は (21) を満足することがわかった。

(22)、(23) を導くためには若干の準備が必要である。まず、τ_N^nが次のように変形できることに注意する。

$$\tau_N^n = \begin{vmatrix} A_n & \cdots & A_{n+2N-4} & 2A_{n+2N-3} - (p(n+2N-4)+q)A_{n+2N-4} \\ A_{n+1} & \cdots & A_{n+2N-3} & 2A_{n+2N-2} - (p(n+2N-3)+q)A_{n+2N-3} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ A_{n+N-1} & \cdots & A_{n+3N-5} & 2A_{n+3N-4} - (p(n+3N-5)+q)A_{n+3N-5} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A_n & \cdots & A_{n+2N-4} & 2A_{n+2N-3} \\ A_{n+1} & \cdots & A_{n+2N-3} & 2A_{n+2N-2} - pA_{n+2N-3} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ A_{n+N-1} & \cdots & A_{n+3N-5} & 2A_{n+3N-4} - (N-1)pA_{n+3N-5} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A_n & 2A_{n+1} & \cdots & 2A_{n+2N-3} \\ A_{n+1} & 2A_{n+2} - pA_{n+1} & \cdots & 2A_{n+2N-2} - pA_{n+2N-3} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{n+N-1} & 2A_{n+N} - (N-1)pA_{n+N-1} & \cdots & 2A_{n+3N-4} - (N-1)pA_{n+3N-5} \end{vmatrix}$$

$$
= 2^{N-1} \begin{vmatrix} B_n^{(0)} & A_{n+1} & \cdots & A_{n+2N-3} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ B_n^{(N-1)} & A_{n+N} & \cdots & A_{n+3N-4} \end{vmatrix} . \tag{30}
$$

ただし、 $B_n^{(k)}, k = 0, 1, \cdots,$ は次式で与えられる。

$$
B_n^{(0)} = A_n, \qquad B_n^{(k)} = A_{n+k} + \frac{kp}{2} B_n^{(k-1)} \quad \text{for } k \geq 1 \ . \tag{31}
$$

同様に、

$$
(pn+q)\tau_N^n = 2^{N-1} \begin{vmatrix} A_{n+1} & B_{n+2}^{(0)} & A_{n+3} & \cdots & A_{n+2N-3} \\ A_{n+2} & B_{n+2}^{(1)} & A_{n+4} & \cdots & A_{n+2N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ A_{n+N} & B_{n+2}^{(N-1)} & A_{n+N+2} & \cdots & A_{n+3N-4} \end{vmatrix} , \tag{32}
$$

も得られる。

これで準備は整った。さて、天下りではあるが、次のような行列式の恒等式を考える。

$$
0 = \left| \begin{array}{cc:ccc:c:cc} -1 & 0' & 1 & \cdots & 2N-5 & \emptyset & 2N-3 & \phi \\ \hdashline -1 & 0' & & \emptyset & & 1 \ \cdots \ 2N-5 & 2N-3 & \phi \end{array} \right| . \tag{33}
$$

ここで、便宜上次のような記号を導入した。

$$
\text{“}j\text{”} = \begin{pmatrix} A_{n+j} \\ A_{n+j+1} \\ \vdots \end{pmatrix} , \qquad \text{“}j'\text{”} = \begin{pmatrix} B_{n+j}^{(0)} \\ B_{n+j}^{(1)} \\ \vdots \\ \\ \end{pmatrix} , \qquad \phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{34}
$$

(33) の右辺をラプラス展開して、

$$
\begin{aligned}
0 &= |-1, 0', 1, \cdots, 2N-5| \times |1, \cdots, 2N-5, 2N-3, \phi| \\
&\quad - |-1, 1, \cdots, 2N-5, 2N-3| \times |0', 1, \cdots 2N-5, \phi| \\
&\quad + |-1, 1, \cdots, 2N-5, \phi| \times |0', 1, \cdots, 2N-5, 2N-3| ,
\end{aligned} \tag{35}
$$

が得られる。これは Plücker relation（の一つ）である。各項は (30),(32) を用いるとτで書き直され、

$$
0 = (p(n-2)+q)\ \tau_N^{n-2}\ \tau_{N-1}^{n+1} - 2\ \tau_N^{n-1}\ \tau_{N-1}^{n} + \tau_N^{n}\ \tau_{N-1}^{n-1} , \tag{36}
$$

となる。これは (22) に他ならない。従って、(13) が (22) を満足することが示せた。(23) も同様のテクニックを用いて成立することを示せるが、詳細は文献 [21] に譲ることにする。

3　第３種の離散型パンルベ方程式の解

本節では dP_{III}

$$
w_{n+1}w_{n-1} = \frac{\alpha w_n^2 + \beta\lambda^n w_n + \gamma\lambda^{2n}}{w_n^2 + \delta w_n + \alpha} , \tag{37}
$$

の解について議論する。P_{III}

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{u}(\frac{du}{dx})^2-\frac{1}{x}\frac{du}{dx}+\frac{1}{x}(\alpha u^2+\beta)+\gamma u^3+\frac{\delta}{u}\ , \tag{38}$$

はパラメータが $\alpha=2\nu-2N,\ \beta=2\nu+2N+2,\ \gamma=1,\ \delta=-1$ の場合に、τ函数

$$\tau_N^\nu=\begin{vmatrix} J_\nu & D\ J_\nu & \cdots & D^{N-1}J_\nu \\ D\ J_\nu & D^2\ J_\nu & \cdots & D^N\ J_\nu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{N-1}J_\nu & D^N\ J_\nu & \cdots & D^{2N-2}\ J_\nu \end{vmatrix}\ ,\quad D=x\frac{d}{dx}\ , \tag{39}$$

を用いて

$$u=\left(\log\frac{\tau_N^{\nu+1}}{\tau_{N+1}^\nu}\right)_x-\frac{\nu+N}{x}\ , \tag{40}$$

と表せる [18]。ただし、J_νはν次の Bessel 函数である。従って、dP_{III}の場合の解は離散型 Bessel 函数ともいうべきものを要素とする行列式で書けることが予想される。

前節と同様にして、離散型 Riccati 方程式を用いて簡単な特解を探そう。今の場合は w_n が

$$w_{n+1}=-\frac{aw_n+\lambda^n}{w_n+d}\ , \tag{41}$$

を満たしていればそれが dP_{III}の解になっていることがわかる。そこで、$w_n=\frac{F_n}{G_n}$とおくと、

$$w_n=\frac{G_{n+1}}{G_n}+d\ , \tag{42}$$

$$G_{n+2}+(a-d)G_{n+1}+(\lambda^n-ad)G_n=0\ , \tag{43}$$

が得られる。(43) が離散型 Bessel 方程式と呼ぶべきものになるはずだが、これでは連続系との対応がよくわからない。そこで、(43) の代わりに

$$J_\nu(n+2)-(q^\nu-q^{-\nu})J_\nu(n+1)+\{1+(1-q)^2q^{2n}\}J_\nu(n)=0\ , \tag{44}$$

を考える。ここで、$\lambda=q^2$である。これを満たす $J_\nu(n)$ を用いて

$$w_n=\frac{J_\nu(n+1)}{J_\nu(n)}-q^\nu\ , \tag{45}$$

とすれば、これが dP_{III}

$$w_{n+1}w_{n-1}=\frac{\alpha w_n^2+\beta w_nq^{2n}+\gamma q^{4n}}{w_n^2+\delta w_n+\alpha}\ , \tag{46}$$

のパラメータが

$$\alpha=-1,\ \beta=(q^\nu-q^{-\nu-2})(1-q)^2,\ \gamma=\frac{(1-q)^4}{q^2},\ \delta=q^\nu-q^{-\nu}, \tag{47}$$

の場合の解を与えることが容易に示せる。(44) に対して $q=1+\epsilon$, $n=\frac{z}{\epsilon}$ とおき、$\epsilon\to 0$ の連続極限をとれば、(44) は

$$\frac{d^2 J_\nu}{dz^2}+(\mathrm{e}^{2z}-\nu^2)J_\nu=0\ . \tag{48}$$

に帰着する。さらに、(48) は独立変数を $z\to x=\mathrm{e}^z$に変更すればν次の Bessel 方程式になる。この意味で、(44) の解は離散型 Bessel 函数と呼んでもよいであろう。しかし、驚くべきことに、(44)、(47) でパラメータνなどが q-integer の形で方程式に入っていることに注意されたい。実は、(44) は本質的には q-Bessel 方程式なのだが、これについては後で述べることにする。

さて、この結果は $N\times N$行列式に拡張できる。τ函数として、

$$\tau_N^\nu(n)=\begin{vmatrix} J_\nu(n) & J_\nu(n+2) & \cdots & J_\nu(n+2N-2)\\ J_\nu(n+1) & J_\nu(n+3) & \cdots & J_\nu(n+2N-1)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ J_\nu(n+N-1) & J_\nu(n+N+1) & \cdots & J_\nu(n+3N-3)\end{vmatrix}\ , \tag{49}$$

を考える。この場合も dP$_{\rm II}$の場合と同様な非対称性があることに注意されたい。w_nを

$$w_n=\frac{\tau_{N+1}^\nu(n+1)\tau_N^{\nu+1}(n)}{\tau_{N+1}^\nu(n)\tau_N^{\nu+1}(n+1)}-q^{\nu+N}\ , \tag{50}$$

で定義すると、w_nは dP$_{\rm III}$(46) のパラメータが

$$\begin{aligned}\alpha&=-q^{4N}, & \beta&=\left(q^{\nu+N}-q^{-\nu-N-2}\right)q^{8N}(1-q)^2,\\ \gamma&=q^{2(6N-1)}\,(1-q)^4, & \delta&=\left(q^{\nu-N}-q^{-\nu+N}\right)q^{2N},\end{aligned} \tag{51}$$

の場合の解を与える。

この結果の導出は dP$_{\rm II}$の場合と同様である。まず、第 1 のステップは従属変数変換 (50) を施して、(46) を bilinear form に分解することである。(46) の右辺はパラメータが (51) のとき、因数分解できることに注意する。そこで、(50) でτ函数を導入し、適当に因子を組み合わせれば、5 本の bilinear form

$$\begin{aligned}&\tau_{N+1}^\nu(n)\tau_N^{\nu+1}(n+1)-q^{-\nu-N}\tau_{N+1}^\nu(n+1)\tau_N^{\nu+1}(n)\\ &\qquad=-(1-q)q^{n+2N}\tau_{N+1}^{\nu+1}(n)\tau_N^\nu(n+1)\ ,\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}&\tau_{N+1}^{\nu+1}(n)\tau_N^\nu(n)-q^{\nu-N+1}\tau_{N+1}^{\nu+1}(n+1)\tau_N^\nu(n)\\ &\qquad=(1-q)q^{n+2N}\tau_{N+1}^\nu(n)\tau_N^{\nu+1}(n+1)\ ,\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}&\tau_{N+1}^\nu(n)\tau_N^{\nu+1}(n+3)-q^{-\nu-N}\tau_{N+1}^\nu(n+1)\tau_N^{\nu+1}(n+2)\\ &\qquad=-(1-q)q^n\tau_{N+1}^{\nu+1}(n)\tau_N^\nu(n+3)\ ,\end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned}&\tau_{N+1}^{\nu+1}(n)\tau_N^\nu(n+3)-q^{\nu-N+1}\tau_{N+1}^{\nu+1}(n+1)\tau_N^\nu(n+2)\\ &\qquad=(1-q)q^n\tau_{N+1}^\nu(n)\tau_N^{\nu+1}(n+3)\ ,\end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}&\tau_{N+1}^\nu(n+2)\tau_N^{\nu+1}(n+1)-q^{2N}(q^{\nu-N}+q^{\nu+N})\tau_{N+1}^\nu(n+1)\tau_N^{\nu+1}(n+2)\\ &\qquad+q^{4N}\{1+(1-q)^2q^{2n}\}\tau_{N+1}^\nu(n)\tau_N^\nu(n+3)=0\ .\end{aligned} \tag{56}$$

が得られる。次に、これらを前節で用いたのと同様のテクニックで行列式の恒等式に帰着させるわけであるが、この場合は離散型 Bessel 函数の満たす漸化式

$$J_\nu(n+1) - q^{-\nu} J_\nu(n) = -(1-q)q^n J_{\nu+1}(n)\ , \tag{57}$$

$$J_\nu(n+1) - q^{\nu} J_\nu(n) = (1-q)q^n J_{\nu-1}(n)d\ , \tag{58}$$

を用い、列を「1飛ばし方向」に shift させた行列式をτ函数で表し、行列式の恒等式に帰着させる。ただし、(56) だけは、漸化式として

$$\begin{aligned} J_\nu(n+2) - (1-q)\ (1+q^{2\nu})q^{n+\nu+1} J_{\nu+1}(n+1) \\ - q^{2\nu}\{1+(1-q)^2 q^{2n}\} J_\nu(n) = 0\ , \end{aligned} \tag{59}$$

をとり、「2飛ばし方向」に列を shift させたものを考えなければならない。あとは前節と同様であるが、パラメータνが増え、さらにそれが q-integer の形で入ってくることから技術的には複雑になる。詳細は文献 [22] に譲ることにする。

4 第3種のパンルベ方程式のq-アナログ

前節で現れた離散型 Bessel 方程式 (45) で独立変数を $n \to x = q^n$ に置き換えると、

$$J_\nu(q^2x) - (q^\nu - q^{-\nu}) J_\nu(qx) + \{1+(1-q)^2x^2\} J_\nu(x) = 0\ , \tag{60}$$

が得られる。(60) は q-Bessel 方程式そのものである。従って、元の方程式も独立変数を置き換えて

$$w(qx)w(q^{-1}x) = \frac{\alpha w(x)^2 + \beta x^2 w(x) + \gamma x^4}{w(x)^2 + \delta w(x) + \alpha}\ , \tag{61}$$

を考えた方が自然であろう。すると、(61) の厳密解は、パラメータが

$$\begin{aligned} &\alpha = -q^{4N}, && \beta = \left(q^{\nu+N} - q^{-\nu-N-2}\right) q^{8N}(1-q)^2, \\ &\gamma = q^{2(6N-1)}\ (1-q)^4, && \delta = \left(q^{\nu-N} - q^{-\nu+N}\right) q^{2N}, \end{aligned} \tag{62}$$

の場合にτ函数

$$\tau_N^\nu(x) = \begin{vmatrix} J_\nu(x) & J_\nu(q^2x) & \cdots & J_\nu(q^{2N-2}x) \\ J_\nu(qx) & J_\nu(q^3x) & \cdots & J_\nu(q^{2N-1}x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ J_\nu(q^{N-1}x) & J_\nu(q^{N+1}x) & \cdots & J_\nu(q^{3N-3}x) \end{vmatrix}\ , \tag{63}$$

を用いて

$$w_n = \frac{\tau_{N+1}^\nu(qx)\tau_N^{\nu+1}(x)}{\tau_{N+1}^\nu(x)\tau_N^{\nu+1}(qx)} - q^{\nu+N}\ , \tag{64}$$

と表されることになる。ここで、$J_\nu(x)$ はν次の q-Bessel 函数である。この結果はもちろん $q \to 1$ で $\mathrm{P_{III}}$の場合に帰着する。$\mathrm{dP_{III}}$については Lax pair が知られているが [16]、そ

の結果も独立変数を置き換えてしまえば、次のようにいえる。$L_n(x;h)$, $M_n(x;h)$ をパラメータ h に依存するある行列とし、線形 q-差分方程式

$$\Phi(x;qh) = L(x;h)\Phi(x;h), \tag{65}$$
$$\Phi(qx;h) = M(x;h)\Phi(x;h), \tag{66}$$

を考える。この両立条件は

$$M(x;qh)L(x;h) = L(qx;h)M(x;h)\ , \tag{67}$$

で与えられ、L, Mとして適当な 3×3 行列を選べば (67) から (61) が得られる。

つまり、(61) は特殊解として q-Bessel 函数を要素とする行列式で表される解を持ち、Lax pair が存在し、補助線形問題が q-差分方程式で書け、さらに、$q\to 1$ の極限で $\mathrm{P_{III}}$ に帰着する、ということになる。従って、(61) は $\mathrm{P_{III}}$の q-アナログの一つ、ということができよう。また、τ函数は q-cylindrical Toda molecule 方程式 [23]（正確にはτ函数の非対称性からそれを修正したもの）を満足する。

5 結言

本稿では第２種と第３種の離散型パンルベ方程式を取り上げ、それらの離散型特殊函数で書ける厳密解を議論した。その結果、第２種の場合は離散型 Airy 函数、第３種の場合は離散型 Bessel 函数を要素とする行列式で解が書けることが明らかになった。この結果は SC の有効性に対する傍証になり得るであろう。また、第３種の場合、解に現れる離散型 Bessel 函数が簡単な独立変数の置き換えにより、q-Bessel 函数になった。これに基づいて、第３種のパンルベ方程式の q-アナログを提出した。

最後に、今後の展望をまとめておく。

- 他の離散型パンルベ方程式に対しても同様の解があることが期待される。実は、SC を用いたパンルベ方程式の離散化は一意的ではない。実際、$\mathrm{dP_I}$, についてはもう３通り，$\mathrm{dP_{II}}$, $\mathrm{dP_{III}}$ についてはもう一通りずつの離散化が知られている [16,24]。これらに対しても同様な解があるだろうか？現在、この問題の研究は進行中であり、いくつかの新しい結果も得られているが、これらの報告は別の機会に譲る。

- 離散型パンルベ方程式の持つもう一つのクラスの厳密解として有理解の存在が期待されている。

- 別のクラスの解として，$\mathrm{dP_I}$に対して，半無限の格子上でのいわゆる "Toda molecule type" の解で，連続極限でつぶれるようなものがごく最近見つかった [26]。ここで，$\mathrm{P_I}$は初等函数で書ける解を持たないことが証明されていることに注意されたい．このことは連続系より離散系の方が豊富な構造をもつことを示唆しているように見える。また，第１種以外の離散型パンルベ方程式に対しては，連続極限で生き残る解とつぶれる解，両者共に持つ，ということが予想される。これについてはまた別の機会に詳しく報告したい。

- パンルベ方程式はτ函数を媒介にして、Hamilton 系として定式化できることが知られている [18]。そこで、離散型パンルベ方程式に対してもやはりτ函数を媒介にして離散型 Hamilton 系として定式化できる可能性がある。

- 第 1 種と第 2 種の離散型パンルベ方程式は matrix model の理論で相関函数の満たす差分方程式として現れる。そこで、離散型パンルベ方程式の q-deformation を考えて、そこから matrix model の q-deformation を行なおうとする試みがある [25]。これは上記 (1) の結果と密接に関連するが、この方向の研究についてはまた別の機会に報告したい。

参考文献

[1] R. Hirota, J. Phys. Soc. Jpn., **43**(1977), 1424.

[2] Y. Ohta, R. Hirota, T. Imai and S. Tsujimoto, J. Phys. Soc. Jpn., **62**(1993), 1872

[3] T. Miwa, Proc. Japan Acad., **58 A**(1982), 9; E. Date, M. Jimbo, T. Miwa, J. Phys. Soc. Jpn., **51**(1982), 4116, 4125, **52**(1983), 388, 761, 766.

[4] M.J. Ablowitz and J. Ladik, J. Math. Phys., **16**(1975) 598.

[5] G. R. W. Quispel, J. A. G. Roberts and C. J. Thompson, Physica **D34**(1989), 183.

[6] R. Hirota, S. Tsujimoto and T. Imai, in *RIMS Kokyuroku* **822**(RIMS, Kyoto University, 1993), 144.

[7] K. Sogo, J. Phys. Soc. Jpn., **62**(1993), 1081

[8] V. G. Papageorgiou, B. Grammaticos and A. Ramani, Phys. Lett., **A179**(1993), 111.

[9] B. Grammaticos A. Ramani, and V. G. Papageorgiou, Phys. Rev. Lett., **67**(1991), 1825.

[10] see, for example, E.L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, (Dover, New York, 1956).

[11] A. Ramani, B. Grammaticos, and J. Hietarinta, Phys. Rev. Lett., **67**(1991), 1829.

[12] E. Brezin and V.A. Kazakov, Phys. Lett. **B236**(1990), 144.

[13] V. Periwal and D. Shevitz, Phys. Rev. Lett., **64**, (1990), 135.

[14] A.R. Its, A.V. Kitaev and A.S. Fokas, Usp. Mat. Nauk, **45,6**(1990), 135.

[15] V.G. Papageorgiou, F.W. Nijhoff, B. Grammaticos and A. Ramani, Phys. Lett., **A164**(1992), 57.

[16] B. Grammaticos, F.W. Nijhoff, V. Papageorgiou, A. Ramani and J.Satsuma, to appear in Phys. Lett. **A**(1994).

[17] A. Ramani and B. Grammaticos, J. Phys. A., **25**(1992), L633.

[18] K. Okamoto, Ann. Mat., (1986), 337; Japan J. Math., **13**(1987), 47; Math. Ann., **275**(1986), 221; Funkcialaj Ekvacioj, **30**(1987), 305.

[19] A. Nakamura, J. Phys. Soc. Jpn., **61**(1992), 3007.

[20] R. Hirota, J. Phys. Soc. Jpn., **46**(1979), 312.

[21] K. Kajiwara, Y. Ohta, J. Satsuma, B. Grammaticos and A. Ramani, J. Phys. A **27**(1994), 915.

[22] K. Kajiwara, Y. Ohta and J. Satsuma, in preparation.

[23] K. Kajiwara, Y. Ohta and J. Satsuma, Phys. Lett. **A180**(1993), 249.

[24] B. Grammaticos and A. Ramani, in *Applications of Analytic and Geometric Methods to Nonlinear Differential Equations* ed. by P. A. Clarkson (NATO ASI Series Vol. C413, Kluwer, 1993), 299.

[25] F. W. Nijhoff, "*On a q-Deformation of the Discrete Painlevé I equation and q-orthogonal Polynomials*", preprint (1993).

[26] 太田泰広，梶原健司，　日本物理学会春の年会（１９９４，福岡工業大）における講演