数理解析研究所講究録
第 869 巻 1994 年 30-39

共変的演算子形式でのワイトマン関数とオステンドルフ規則

京大数理研 阿部 光雄
(Mitsuo ABE)

1 序

場の量子論を Heisenberg 描像での共変的演算子形式で解くプロセスは次の２段階からなる：第１段階は場の演算子の代数的関係を与える演算子解の構成で、第２段階が演算子解の表現としての Wightman 関数の構成である。[1] 近似法としては、原理的には、それぞれの段階で考えることができる。

実際、この方法によって２次元量子重力[2)~4)] や２次元ＢＦ理論[5] の厳密解が構成できる。また、その解の正しさは、通常の（相互作用描像での）摂動論で τ 関数を計算して確かめることもできるが、２次元量子重力についてはこの摂動計算は上記の方法と比較して（微分結合を含む非多項式相互作用により）非常に複雑で見通しの悪いものになる。[6]

本講演では、まず通常の摂動論における Wightman 関数の計算則 (Ostendorf 規則)[7] について説明し、次に、一般に演算子解が（厳密に、あるいは摂動論的に）得られたとき、それから Wightman 関数を構成する方法を述べ、この方法が摂動論的な場合には Ostendorf 規則が基づいている ansatz を再現することを確かめる。また、厳密に解ける簡単なモデルについても議論する。

2 Ostendorf 規則

ここでは具体的に次の Lagrangian 密度で与えられる ϕ^3 理論について考える：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi\cdot\partial_\mu\phi - m^2\phi^2) + g\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(\phi),$$
$$\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(\phi) \equiv \frac{1}{3!}\phi^3. \tag{1}$$

よく知られているように n 点 Wightman 関数 $\langle\,\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\,\rangle \equiv \langle 0\,|\,\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\,|\,0\,\rangle$ は相互作用描像の自由場 ϕ_{I} とその真空 $|\,0_{\mathrm{I}}\,\rangle$ を用いると

$$\begin{aligned}\langle\,\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\,\rangle = \;& \langle\,0_{\mathrm{I}}\,|\,U(+\infty,{x_1}^0)\phi_{\mathrm{I}}(x_1)U({x_1}^0,{x_2}^0)\phi_{\mathrm{I}}(x_2)U({x_2}^0,{x_3}^0)\\ &\cdots\phi_{\mathrm{I}}(x_n)U({x_n}^0,-\infty)\,|\,0_{\mathrm{I}}\,\rangle\;/\;\langle\,0_{\mathrm{I}}\,|\,S\,|\,0_{\mathrm{I}}\,\rangle\end{aligned} \tag{2}$$

と書ける。ただし

$$U({x_1}^0,{x_2}^0) \equiv \mathrm{T}\exp[ig\int d^4u\,\epsilon(x_1,x_2;u)\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(\phi_{\mathrm{I}}(u))], \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\epsilon(x_1,x_2;u) &\equiv \theta({x_1}^0-u^0)-\theta({x_2}^0-u^0)\\ &= \begin{cases} 1 & {x_1}^0 > u^0 > {x_2}^0,\\ -1 & {x_1}^0 < u^0 < {x_2}^0,\\ 0 & \text{その他},\end{cases}\end{aligned} \tag{4}$$

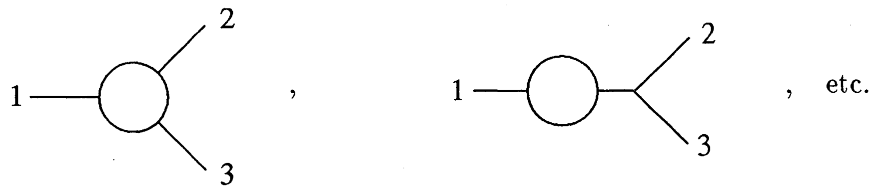
$$S \equiv U(+\infty,-\infty). \tag{5}$$

(2) から明らかなように、 Wightman 関数は部分的に T 積を含む $\phi_{\rm I}$ の積の期待値で表される。 1984 年、 A. Ostendorf は Wightman 関数の満たす摂動の次数に関する漸化式を ansatz として仮定し、それにより τ 関数に対する Feynman 規則を拡張した Wightman 関数の摂動論的計算則 (Ostendorf 規則) を構成した。[7] Ostendorf の仮定した ansatz は次の節で導かれるが、この節ではまず Ostendorf 規則について説明しておく。 Wightman 関数の g に関する巾展開の第 N 次近似を $\langle\ \cdots\ \rangle^{(N)}$ の様に書く。

Ostendorf 規則 [7]

$\langle\, \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\,\rangle^{(N)}$ の計算法についてのべる。

[O.1] 通常の Feynman 規則に従って端点 n 個、頂点 N 個 からなるすべての異なるグラフをかく (truncated Wightman 関数のときは連結なグラフになる)。例えば、 $n = N = 3$ のときは



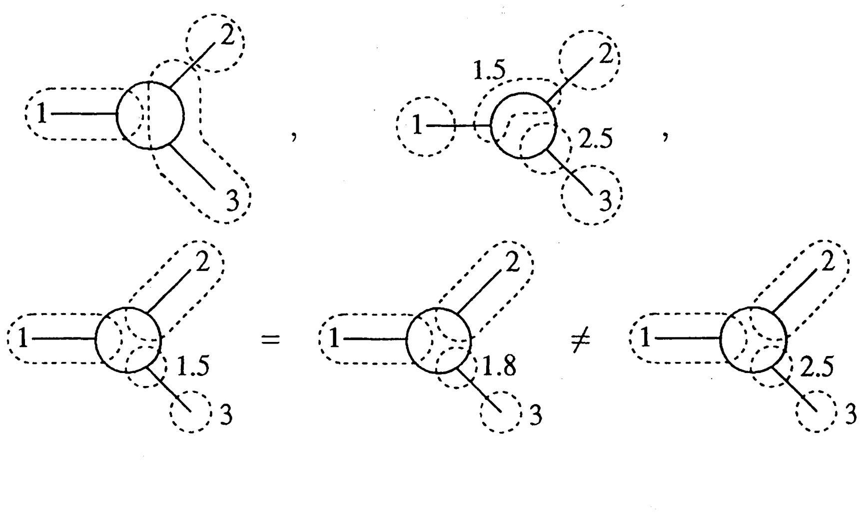
[O.2] 各グラフ（の端点と頂点）をセクターと呼ぶ部分グラフに分け、各セクターには以下の条件に従って互いに異なるセクター数を割り当てる（セクター分割）。

[2-1] 端点 $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ を含むセクターのセクター数は端点番号 $(1,\ \ldots,\ n)$ と等しい。従って、各セクターは端点を高々 1 個含むだけである。

[2-2] 端点を含まないセクター（内部セクター）には、そのセクターに隣接するセクターのセクター数のうち最大と最小のものの中間の値を割り当てる。

[2-3] セクター数の大小関係によって決まるセクター間の順序が等しいセクター数の割り当ては同一視する。

例えば、



[O.3] グラフの各セクター分割に対し、内線(もしくは外線) y_1 •——• y_2 には、y_1, y_2 がそれぞれ属するセクターのセクター数 S_1, S_2 に応じて

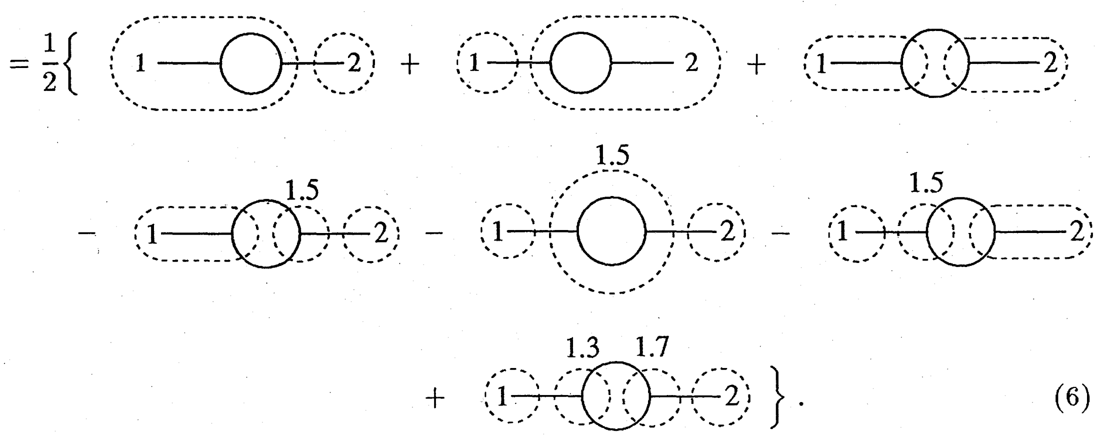
$S_1 = S_2$ のときは $\Delta_{\mathrm{F}}(y_1 - y_2)$ を、
$S_1 < S_2$ のときは $\Delta^{(+)}(y_1 - y_2)$ を、
$S_1 > S_2$ のときは $\Delta^{(+)}(y_2 - y_1)$ を

対応させ、各頂点には i を対応させる。以上を掛け合わせたものに 更に 内部セクターの数を η として $(-1)^{\eta}$ を掛ける。

[O.4] 各グラフに対し、すべてのセクター分割を足しあげ 頂点座標 u_i $(i = 1, \ldots, N)$ について積分する。最後に各グラフに統計因子、対称性因子を掛けてすべてのグラフを足しあげる。

例えば、2 点関数の第2次近似をグラフのセクター分割を使って表すと次のようになる：

$\langle\, \phi(x_1)\phi(x_2)\, \rangle^{(2)}$



(6)

この結果はもちろん(2)から直接導くこともでき、上の規則 **[2-2]** を破るセクター分割からの寄与は相殺していることがわかる。

3 Wightman 関数の構成 [3)]

この節ではとにかく演算子解は得られているとして議論する。Wightman 関数は場の多重(反)交換子によって一般に表される演算子解との整合性から構成する。従って 1 点関数については原理的に任意にとれる。 この節では簡単のため boson のみの系を考えるが一般化は容易である。

まず、多重交換子の Wightman 関数は自動的に truncate されていること(真空の中間状態が取り除かれていること) に注意する。truncated Wightman 関数は $\langle \cdots \rangle_{\mathrm{T}}$ の様に書く。

たとえば

$$
\begin{aligned}
\langle[\Phi_1,\ \Phi_2]\rangle &= \langle\,\Phi_1\Phi_2\,\rangle - \langle\,\Phi_2\Phi_1\,\rangle \\
&= \Big(\langle\,\Phi_1\Phi_2\,\rangle_{\mathrm{T}} + \langle\,\Phi_1\,\rangle_{\mathrm{T}}\langle\,\Phi_2\,\rangle_{\mathrm{T}}\Big) - \Big(\langle\,\Phi_2\Phi_1\,\rangle_{\mathrm{T}} + \langle\,\Phi_2\,\rangle_{\mathrm{T}}\langle\,\Phi_1\,\rangle_{\mathrm{T}}\Big) \\
&= \langle[\Phi_1,\ \Phi_2]\rangle_{\mathrm{T}}\,. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

3 点以上についても同様である。$\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ からなる任意の $(n-1)$ 重交換子は $(n-1)!$ 個の独立な次の形の標準形の一次結合で表される：

$$
[\![\,\Phi_1,\,\Phi_{i_2},\,\Phi_{i_3},\,\ldots,\,\Phi_{i_n}\,]\!]_0 \equiv [\,[\,[\Phi_1,\,\Phi_{i_2}],\,\Phi_{i_3}],\ldots,\,\Phi_{i_n}]. \qquad (8)
$$

ただし $i_2, \ldots, i_n$ は $2, \ldots, n$ の任意の順列。従って、まず特別な場合として次の規則が設定できる：

[1] $\Phi_1(x_1), \ldots, \Phi_n(x_n)$ の $(n-1)$ 重交換子 (8) がすべてゼロならば、それらからなる $n!$ 個の truncated Wightman 関数もすべてゼロとする。

この規則は、特に自由場 $\varphi(x)$ に対しは、よく知られている次の公式を導く：

$$
n \geqq 3 \text{ のとき} \qquad \langle\,\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)\,\rangle_{\mathrm{T}} = 0. \qquad (9)
$$

次に多重交換子がゼロにならない場合。 n 個の場からなる独立な $(n-1)$ 重交換子は $(n-1)!$ 個であるのに対し その積のとり方は $n!$ 個あるため、実際には n 点 Wightman 関数を演算子解だけから一意的に決めることはできない。そこで、ここではエネルギーの正値性の条件を課すことによって一意的に決まるものと考える。(ただし、重力場があるような場合ではこれは形式的な意味で理解すべきである。) これにより、次の規則を設定する：

[2] $n!$ 個の truncated Wightman 関数 $\langle\,\Phi_{j_1}(x_{j_1})\cdots\Phi_{j_n}(x_{j_n})\,\rangle_{\mathrm{T}}$ は、$(n-1)!$ 個の多重交換子 (8) の期待値をすべて再現し、かつ、エネルギーの正値性を満たすように決める。

ところで、演算子解は一般に複合場を含んだ形で表されるので、その期待値の評価の仕方を定義しておかなければ [2] の計算を実際に実行することはできない。 これについては、次の規則で定義する：

[3] 複合場を含む Wightman 関数は、複合場を同じ配列の基本場の異時空点の積に置きかえた untruncated Wightman 関数の表式において形式的に時空点を一致させ、結果として生じた (1 点のみの寄与による) 特異項をとり除いたもので定義する。

この規則は、自由場については、よく知られた Wick contraction を再現するものであり、繰り込み以前の問題である。例えば、自由スカラー場については、$\langle\,\varphi(x)\,\rangle = 0$, $\langle\,\varphi(x)\varphi(y)\,\rangle \equiv \Delta^{(+)}(x-y)$ として

$$
\begin{aligned}
\langle\,\varphi(x)^2\,\rangle &= 0, & (10)\\
\langle\,\varphi(x)^2\varphi(y)\varphi(z)\,\rangle &= 2\Delta^{(+)}(x-y)\Delta^{(+)}(x-z), & (11)\\
\langle\,\varphi(x)^2\varphi(y)^2\,\rangle &= 2[\Delta^{(+)}(x-y)]^2. & (12)
\end{aligned}
$$

以上の規則にしたがって、次の節では ϕ^3 理論の Wightman 関数に関する漸化式を共変的演算子形式で具体的に構成する。

4 Wightman 関数の摂動論的漸化式 [8)]

最初に、演算子解を Lagrangian 密度 (1) から得られる場の方程式と正準交換関係

$$(\Box + m^2)\phi = g\mathcal{L}_{\mathrm{I}}', \qquad \mathcal{L}_{\mathrm{I}}' \equiv \frac{\partial}{\partial\phi}\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2; \tag{13}$$

$$[\phi(x_1),\, \phi(x_2)]|_0 = 0, \tag{14}$$

$$\partial_0{}^{x_1}[\phi(x_1),\, \phi(x_2)]|_0 = -i\delta^3(x_1 - x_2) \tag{15}$$

から構成する。 ただし、$|_0$ は同時刻を表す。まず (13) から

$$(\Box + m^2)^{x_1}[\phi(x_1),\, \phi(x_2)] = g[\mathcal{L}_{\mathrm{I}}'(x_1),\, \phi(x_2)]. \tag{16}$$

(16) 及び (14) (15) で与えられる Cauchy 問題は

$$(\Box + m^2)^{x_1}\Delta(x_1 - x_2) = 0, \tag{17}$$

$$\Delta(x_1 - x_2)|_0 = 0, \quad \partial_0{}^{x_1}\Delta(x_1 - x_2)|_0 = -\delta^3(x_1 - x_2) \tag{18}$$

で定義される不変デルタ関数 $\Delta(x_1 - x_2)$ を用いると形式的に次のように解くことができる：

$$[\phi(x_1),\, \phi(x_2)] = i\Delta(x_1 - x_2) - g\int d^4u\, \epsilon(x_1, x_2; u)\Delta(x_1 - u)[\mathcal{L}_{\mathrm{I}}'(u),\, \phi(x_2)]. \tag{19}$$

ただし、$\epsilon(x_1, x_2; u)$ は (4) で定義されている。多重交換子についても同様に、$n \geqq 3$ として

$$[\![\, \phi(x_1), \phi(x_2), \ldots, \phi(x_n)\,]\!]_0 = -g\int d^4u\, \epsilon(x_1, x_2; u)\Delta(x_1 - u)[\![\, \mathcal{L}_{\mathrm{I}}'(u), \phi(x_2), \ldots, \phi(x_n)\,]\!]_0 \tag{20}$$

を得る。ただし、$\mathcal{L}_{\mathrm{I}}'(u)$ は $\phi(u)$ の複合場であるので (19) と (20) は g に関する巾展開の意味で理解するものとする。従って、次のような展開を考える：

$$\phi(x) \equiv \sum_{N=0}^{\infty} g^N \phi^{(N)}(x), \tag{21}$$

$$[\phi(x_1),\, \phi(x_2)] \equiv \sum_{N=0}^{\infty} g^N [\phi(x_1),\, \phi(x_2)]^{(N)}, \tag{22}$$

$$[\phi(x_1),\, \phi(x_2)]^{(N)} \equiv \sum_{K=0}^{N} [\phi^{(N-K)}(x_1),\, \phi^{(K)}(x_2)]. \tag{23}$$

多重交換子についても同様である。すると、次の漸化式が得られる：

$$[\phi(x_1),\, \phi(x_2)]^{(0)} = i\Delta(x_1 - x_2), \tag{24}$$

$$[\![\, \phi(x_1), \phi(x_2), \ldots, \phi(x_n)\,]\!]_0{}^{(N)} = -\int d^4u\, \epsilon(x_1, x_2; u)\Delta(x_1 - u)[\![\, \mathcal{L}_{\mathrm{I}}'(u), \phi(x_2), \ldots, \phi(x_n)\,]\!]_0{}^{(N-1)}. \tag{25}$$

ただし、$n \geqq 2$ 及び $N \geqq 1$。

次に、Wightman 関数を上で得られた演算子解との整合性とエネルギーの正値性の条件から構成する。

まず1点関数については、by definition で、簡単化のためにすべての N について

$$\langle\, \phi(x)\, \rangle_{\mathrm{T}}{}^{(N)} = 0 \tag{26}$$

とおく。

第ゼロ次近似解 (24) は自由場の解と同じであり、3節の [1] [2] から

$$\langle\, \phi(x_1)\phi(x_2)\, \rangle_{\mathrm{T}}{}^{(0)} = \Delta^{(+)}(x_1 - x_2), \tag{27}$$

$$\langle\, \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\, \rangle_{\mathrm{T}}{}^{(0)} = 0 \qquad (n \geqq 3) \tag{28}$$

を得る。ただし、$\Delta^{(+)}(x_1 - x_2)$ は $\Delta(x_1 - x_2)$ の正エネルギー部分で

$$(\Box + m^2)^{x_1}\Delta^{(+)}(x_1 - x_2) = 0, \tag{29}$$

$$\Delta^{(+)}(x_1 - x_2) - \Delta^{(+)}(x_2 - x_1) = i\Delta(x_1 - x_2), \tag{30}$$

$$[\Delta^{(+)}(x_1 - x_2)]^* = \Delta^{(+)}(x_2 - x_1) \tag{31}$$

を満たす。

N 次の n 点関数については、次の表式によってエネルギーの正値性は満たされる：

$$\begin{aligned}
&\langle\, \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\, \rangle_{\mathrm{T}}{}^{(N)} \\
&= i\int d^4u \Big[\quad \Delta^{(+)}(u - x_j)\Big\{\quad \theta(u^0 - x_1{}^0)\langle\, \mathcal{L}_{\mathrm{I}}'(u)\phi(x_1)\cdots\widehat{\phi(x_j)}\cdots\phi(x_n)\, \rangle_{\mathrm{T}}{}^{(N-1)} \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{j-1}\epsilon(x_i, x_{i+1}; u)\langle\, \cdots\phi(x_i)\mathcal{L}_{\mathrm{I}}'(u)\cdots\widehat{\phi(x_j)}\cdots\, \rangle_{\mathrm{T}}{}^{(N-1)}\Big\} \\
&\qquad + \Delta^{(+)}(x_j - u)\Big\{\quad \sum_{i=j}^{n-1}\epsilon(x_i, x_{i+1}; u)\langle\, \cdots\widehat{\phi(x_j)}\cdots\phi(x_i)\mathcal{L}_{\mathrm{I}}'(u)\cdots\, \rangle_{\mathrm{T}}{}^{(N-1)} \\
&\qquad\qquad + \theta(x_n{}^0 - u^0)\langle\, \phi(x_1)\cdots\widehat{\phi(x_j)}\cdots\phi(x_n)\mathcal{L}_{\mathrm{I}}'(u)\, \rangle_{\mathrm{T}}{}^{(N-1)}\Big\}\Big].
\end{aligned} \tag{32}$$

ただし、$j(=1, 2, \ldots, n)$ は任意で、$\widehat{\ }$ のついたものは省くことを表す。実際、エネルギーの正値性の条件は各項の各々の因子が、考えている Wightman 関数に現れる時空変数のならぶ順序で決まる時間順序 $(x_1{}^0 > x_2{}^0 > \cdots > x_n{}^0)$ のもとで、正エネルギー関数であることを要求する。従って、(32) のエネルギー正値性は明白である。(32) が j によらないことは、恒等式 $\epsilon(x_i, x_{i+1}; u_1)\epsilon(u_1, x_{i+1}; u_2) = \epsilon(x_i, x_{i+1}; u_2)\epsilon(x_i, u_2; u_1)$ を用いて N に関する帰納法により容易に証明できる。(32) が (25) と整合することは自明ではないがやはり帰納法によって

$$\begin{aligned}
&\langle\, \phi(x_1)\cdots\phi(x_{k-1})\,[\![\, \phi(x_k), \phi(x_{k+1}), \ldots, \phi(x_\ell)\,]\!]_0\phi(x_{\ell+1})\cdots\phi(x_n)\, \rangle_{\mathrm{T}}{}^{(N)} \\
&= -\int d^4u\, \epsilon(x_k, x_{k+1}; u)\Delta(x_k - u) \\
&\qquad \langle\, \phi(x_1)\cdots\phi(x_{k-1})\,[\![\, \mathcal{L}_{\mathrm{I}}'(u), \phi(x_{k+1}), \ldots, \phi(x_\ell)\,]\!]_0\phi(x_{\ell+1})\cdots\phi(x_n)\, \rangle_{\mathrm{T}}{}^{(N-1)}
\end{aligned} \tag{33}$$

を導くことにより示すことができる。

特に、(32) で $j = 1$ とすると

$$\begin{aligned}
&\langle\, \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\,\rangle_{\mathrm{T}}{}^{(N)} \\
&= i\int d^4u\,\Big[\Delta^{(+)}(u-x_1)\theta(u^0-{x_1}^0)\langle\, \mathcal{L}_{\mathrm{I}}'(u)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\,\rangle_{\mathrm{T}}{}^{(N-1)} \\
&\qquad +\Delta^{(+)}(x_1-u)\Big\{\epsilon(x_1,x_2;u)\langle\, \mathcal{L}_{\mathrm{I}}'(u)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\,\rangle_{\mathrm{T}}{}^{(N-1)} \\
&\qquad\qquad +\sum_{i=2}^{n-1}\epsilon(x_i,x_{i+1};u)\langle\, \phi(x_2)\cdots\phi(x_i)\mathcal{L}_{\mathrm{I}}'(u)\cdots\phi(x_n)\,\rangle_{\mathrm{T}}{}^{(N-1)} \\
&\qquad\qquad +\theta({x_n}^0-u^0)\langle\, \phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\mathcal{L}_{\mathrm{I}}'(u)\,\rangle_{\mathrm{T}}{}^{(N-1)}\Big\}\Big] \qquad (34)
\end{aligned}$$

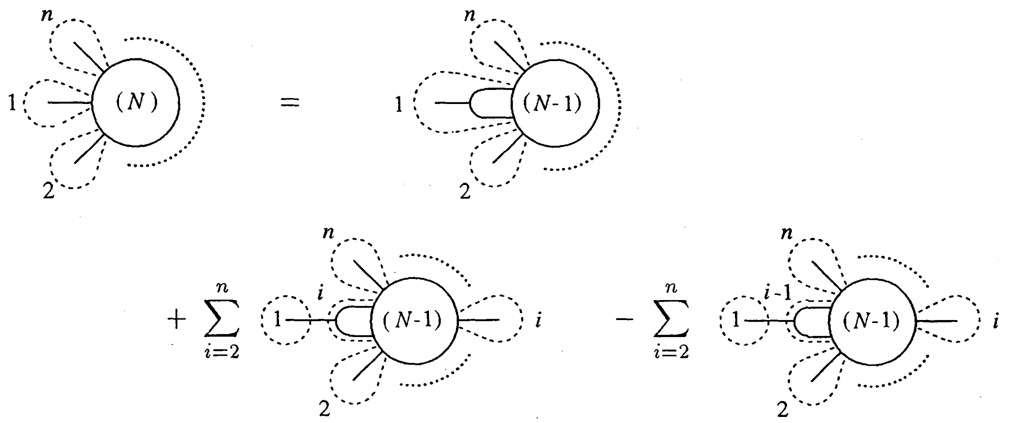
を得る。ここで、$\epsilon(x_i,x_{i+1};u)=\theta({x_i}^0-u^0)+\theta({x_{i+1}}^0-u^0)-1$ とかけるので、(34) は

$$\begin{aligned}
&\langle\, \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\,\rangle_{\mathrm{T}}{}^{(N)} \\
&= i\int d^4u\,\Big[\Delta_{\mathrm{F}}(x_1-u)\langle\, \mathcal{L}_{\mathrm{I}}'(u)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\,\rangle_{\mathrm{T}}{}^{(N-1)} \\
&\qquad +\Delta^{(+)}(x_1-u)\sum_{i=2}^{n}\Big\{\langle\cdots\phi(x_{i-1})(\mathrm{T}\mathcal{L}_{\mathrm{I}}'(u)\phi(x_i))\phi(x_{i+1})\cdots\rangle_{\mathrm{T}}{}^{(N-1)} \\
&\qquad\qquad -\langle\cdots\phi(x_{i-1})\mathcal{L}_{\mathrm{I}}'(u)\phi(x_i)\cdots\rangle_{\mathrm{T}}{}^{(N-1)}\Big\}\Big] \qquad (35)
\end{aligned}$$

と同値である。ただし、Feynman プロパゲーター $\Delta_{\mathrm{F}}(x_1-u)$ は

$$\Delta_{\mathrm{F}}(x_1-u)=\theta({x_1}^0-u^0)\Delta^{(+)}(x_1-u)+\theta(u^0-{x_1}^0)\Delta^{(+)}(u-x_1) \qquad (36)$$

と書けることに注意する。この (35) こそ、正しく Ostendorf が摂動論的 Wightman の ansatz として採用した式に他ならない。(35) をグラフで表すと



(37)

となり、Ostendorf は これから2節で述べた Wightman 関数の摂動論的計算則 (Ostendorf 規則) を導いたが、その導出については原論文[7] に譲ることにする。

5 厳密に解ける簡単なモデル

この節では、厳密に解ける一つのモデルについて議論する。このモデル (one-loop model と呼ぶ[1]) は、2次元量子重力やBF理論との類似性があり、次の Lagrangian 密度で定義される：[8)]

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \varphi \cdot \partial_\mu \tilde{\varphi} - m^2 \varphi \tilde{\varphi} + F(\varphi)\tilde{\varphi}. \tag{38}$$

ただし、$F(\varphi)$ は φ の任意の多項式でよいが、ここでは簡単のため

$$F(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi^2 \tag{39}$$

とする。まず、場の方程式と同時刻交換関係は

$$(\Box + m^2)\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2 = 0, \tag{40}$$
$$(\Box + m^2)\tilde{\varphi} - \varphi\tilde{\varphi} = 0; \tag{41}$$
$$[\,\varphi(x),\ \tilde{\varphi}(y)\,]|_0 = 0, \tag{42}$$
$$[\,\dot{\varphi}(x),\ \tilde{\varphi}(y)\,]|_0 = -i\delta^3(x-y), \tag{43}$$
$$[\,\varphi(x),\ \varphi(y)\,]|_0 = [\,\dot{\varphi}(x),\ \varphi(y)\,]|_0 = 0, \tag{44}$$
$$[\,\tilde{\varphi}(x),\ \tilde{\varphi}(y)\,]|_0 = [\,\dot{\tilde{\varphi}}(x),\ \tilde{\varphi}(y)\,]|_0 = 0 \tag{45}$$

で与えられる。(40) と (44) から

$$[\,(\partial_0)^k \varphi(x),\ \varphi(y)\,]|_0 = 0 \qquad k \geqq 0 \tag{46}$$

が得られるので、形式的な $x^0 - y^0$ に関する巾展開の意味で

$$[\,\varphi(x),\ \varphi(y)\,] = 0 \tag{47}$$

が導かれる。[2] このモデルの可解性は本質的に φ の full commutativity によるものである。φ と $\tilde{\varphi}$ の full commutator については次のように得られる：

$$[\,\varphi(x),\ \tilde{\varphi}(y)\,] = i\mathcal{D}(x,y). \tag{48}$$

ここで $\mathcal{D}(x,y)$ は Cauchy 問題

$$[\Box + m^2 - \varphi]^y \mathcal{D}(x,y) = 0, \tag{49}$$
$$\mathcal{D}(x,y)|_0 = 0, \tag{50}$$
$$\partial_0{}^y \mathcal{D}(x,y)|_0 = i\delta^3(x-y) \tag{51}$$

で定義される。実際、$[\,\varphi(x),\ \tilde{\varphi}(y)\,]$ が同じ Cauchy 問題を満たすことは (41)〜(43) 及び (47) を用いて示される。また、$\mathcal{D}(x,y)$ が

$$[\,\mathcal{D}(x,y),\ \varphi(z)\,] = 0, \tag{52}$$
$$[\,\mathcal{D}(x,y),\ \mathcal{D}(z,w)\,] = 0, \tag{53}$$
$$\mathcal{D}(x,y) = -\mathcal{D}(y,x) \tag{54}$$

---

[1] この名前は、摂動論的に解いたとき現れるグラフが one-loop までしかないことによる。

[2] Cauchy 問題の解の一意性から導くこともできる。[9)]

を満たすことも Cauchy 問題の解の一意性から示される。同様にして、以下の交換関係が得られる：

$$[\,\mathcal{D}(x,y),\ \tilde{\varphi}(z)\,] = -i\int d^4u\,\epsilon(x,y;u)\mathcal{D}(x,u)\mathcal{D}(u,y)\mathcal{D}(u,z), \tag{55}$$

$$[\,\tilde{\varphi}(x),\ \tilde{\varphi}(y)\,] = -i\int d^4u\,\epsilon(x,y;u)\mathcal{D}(x,u)\mathcal{D}(u,y)\tilde{\varphi}(u). \tag{56}$$

以上が one-loop model の厳密な演算子解である。

次の問題は Wightman 関数の構成である。簡単のため 1 点関数はゼロとする：

$$\langle\,\varphi(x)\,\rangle = \langle\,\tilde{\varphi}(x)\,\rangle = 0. \tag{57}$$

このとき $\mathcal{D}(x,y)$ の真空期待値は

$$\langle\,\mathcal{D}(x,y)\,\rangle = \Delta(x-y) \tag{58}$$

で与えられる。従って、3 節の **[2]** から

$$\langle\,\varphi(x)\tilde{\varphi}(y)\,\rangle_{\mathrm{T}} = \langle\,\tilde{\varphi}(x)\varphi(y)\,\rangle_{\mathrm{T}} = \Delta^{(+)}(x-y) \tag{59}$$

が得られる。(55) の右辺は可換な量だけで書かれているので、

$$\begin{aligned}&\langle\,[\![\,\varphi(x_1),\tilde{\varphi}(x_2),\tilde{\varphi}(x_3)\,]\!]_0\,\rangle\\ &\quad= \int d^4u\,\epsilon(x_1,x_2;u)\Delta(x_1-u)\prod_{i=2}^{3}\Delta(u-x_i)\end{aligned} \tag{60}$$

となる。従って、エネルギーの正値性と (60) との整合性から

$$\begin{aligned}&\langle\,\varphi(x_1)\tilde{\varphi}(x_2)\tilde{\varphi}(x_3)\,\rangle_{\mathrm{T}} = \langle\,\tilde{\varphi}(x_1)\varphi(x_2)\tilde{\varphi}(x_3)\,\rangle_{\mathrm{T}} = \langle\,\tilde{\varphi}(x_1)\tilde{\varphi}(x_2)\varphi(x_3)\,\rangle_{\mathrm{T}}\\
&= i\int d^4u\,\Bigg[\theta(u^0-x_1{}^0)\prod_{j=1}^{3}\Delta^{(+)}(u-x_j)\\
&\qquad +\Delta^{(+)}(x_1-u)\Big\{\epsilon(x_i,x_2;u)\prod_{k=2}^{3}\Delta^{(+)}(u-x_k)\\
&\qquad\qquad +\epsilon(x_2,x_3;u)\Delta^{(+)}(x_2-u)\Delta^{(+)}(u-x_3)\\
&\qquad\qquad +\theta(x_3{}^0-u^0)\prod_{j=2}^{3}\Delta^{(+)}(x_j-u)\Big\}\Bigg]\\
&= i\int d^4u\,\Bigg[\sum_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{i-1}\Delta^{(+)}(x_j-u)\Delta_{\mathrm{F}}(x_i-u)\prod_{k=i+1}^{3}\Delta^{(+)}(u-x_k)\\
&\qquad -\sum_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{i}\Delta^{(+)}(x_j-u)\prod_{k=i+1}^{3}\Delta^{(+)}(u-x_k)\Bigg].\end{aligned} \tag{61}$$

この結果を用いると、(56) と 3 節の **[2]** **[3]** から

$$\begin{aligned}&\langle\,\tilde{\varphi}(x_1)\tilde{\varphi}(x_2)\,\rangle\\
&= i\int d^4u_1\,\Big[\theta(u_1{}^0-x_1{}^0)\Delta^{(+)}(u_1-x_1)\langle\,\varphi(u_1)\tilde{\varphi}(u_1)\tilde{\varphi}(x_2)\,\rangle\\
&\quad +\Delta^{(+)}(x_1-u_1)\Big\{\epsilon(x_1,x_2;u)\langle\,\varphi(u_1)\tilde{\varphi}(u_1)\tilde{\varphi}(x_2)\,\rangle + \theta(x_2{}^0-u^0)\langle\,\tilde{\varphi}(x_2)\varphi(u_1)\tilde{\varphi}(u_1)\,\rangle\Big\}\Big]\end{aligned}$$

$$= i^2 \int d^4u_1\, d^4u_2 \Big[\Delta_{\rm F}(u_1 - x_1) \Big\{ \Big(\Delta_{\rm F}(u_1 - u_2)^2 - \Delta^{(+)}(u_1 - u_2)^2 \Big) \Delta^{(+)}(u_2 - x_2) + \Delta^{(+)}(u_1 - u_2)^2 \Delta_{\rm F}(x_2 - u_2) \Big\} + \Delta^{(+)}(x_1 - u_1) \Big(\Delta_{\rm F}(u_1 - u_2)^2 - \Delta^{(+)}(u_1 - u_2)^2 \Big) \Big(\Delta_{\rm F}(x_2 - u_2) - \Delta^{(+)}(x_2 - u_2) \Big) \Big] \tag{62}$$

が得られる。他の Wightman 関数についても同様に逐次計算していくことができる。

6 結び

Heisenberg 描像で場の量子論を共変的に解く方法により、通常の摂動論における Ostendorf 規則の基づく ansatz が導かれたが、この方法の摂動展開の第ゼロ次は必ずしも自由場である必要はない。量子 Einstein 重力や (非可換) ゲージ理論では展開パラメーターを ($\sqrt{\kappa}$ や g ではなく) κ や g^2 にとることによりＢＲＳ不変性を尊重した新しい摂動論が構成できるが、[1),10)] この場合の第ゼロ次近似は各々２次元量子重力やＢＦ理論に対応するものであり、いずれもここで述べた方法で厳密に解ける one-loop model の一種である。この量子重力とゲージ理論の新しい解法の概要については文献１）を参照のこと。

文献

1) 中西 襄, この講究録中の論文.

2) M.Abe and N.Nakanishi, Int. J. Mod. Phys. **A6**(1991), 3955; Prog. Theor. Phys. **86**(1991), 517.

3) M.Abe and N.Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **86**(1991), 1087; Prog. Theor. Phys. **87**(1991), 495; Prog. Theor. Phys. **87**(1991), 757.

4) M.Abe and N.Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **89**(1993), 231.

5) M.Abe and N.Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **89**(1993), 501.

6) M.Abe and N.Nakanishi, Int. J. Mod. Phys. **A7**(1992), 6405.

7) A.Ostendorf, Ann. Inst. H. Poincaré **40**(1984), 273.

8) M.Abe, Int. J. Mod. Phys. **A**, to be published.

9) M.Abe and N.Nakanishi, Preprint RIMS-914 (Kyoto).

10) M.Abe and N.Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **85**(1991), 391; Prog. Theor. Phys. **88**(1992), 975.