数理解析研究所講究録
第869巻1994年1-9

Polyakov String における Virasoro Anomaly と Trace Anomaly について

茨城大・理 藤原 高徳 (Takanori Fujiwara)
新潟大・教育 五十嵐 尤二 (Yuji Igarashi)
金沢大・教養 久保 治輔 (Jisuke Kubo)
茨城大・理 田部井 哲夫 (Tetsuo Tabei)

§1. はじめに

共形場が2次元重力場と相互作用する系では, 共形対称性が量子効果で破れ重力場の Liouville mode (LM) が力学的な振舞いをするようになる. これは最初に Polyakov によって経路積分に基づく研究で明らかにされた. 彼は2次元重力場の有効作用 (Liouville 作用) が場について非局所的な関数で書けることを見いだした[1].

ここでは Polyakov 弦を正準形式に基づいて調べ, この理論のもつ一般共変性や Weyl 不変性と Virasoro anomaly (VA), trace anomaly (TA) の関係を明確にし, 正準理論の立場でも自然に Liouville 作用が導かれることを示す. ただし, ここで得られた Liouville 作用は Polyakov が与えたものとは対照的

に重力場について局所的な関数である．最近の研究で，この作用が光円錐ゲージ[2]や共形ゲージ[3] を用いて得られた基本的な結果を再現することを明らかにした．(これについては文献[4]を参照.)

次節においてエネルギー・運動量テンソルの保存則を調べ，VA と理論の一般共変性の関係を明確にする．§3 では一般共変性を回復するための相殺項 (counterterm) の導出を行う．驚くべきことに，相殺項として非局所的なものを許容するなら，一般共変性と Weyl 不変性を同時に満足するものが見いだすことができる．さらに局所性を課すことにより Weyl 不変性が破れ TA が現れることを示す．このようにして得られた局所的な相殺項がちょうど Liouville 作用になっていることをみる．最後に§4 でまとめを行う．

§2. Virasoro anomaly

古典的な Polyakov 作用は $X^\mu(x)$ $(\mu = 0, 1, \cdots, D-1)$ を弦の座標，$g_{ab}(x)$ $(a, b = 0, 1)$ を世界面の計量とすれば

$$S_{\mathrm{X}} = \int d^2x \left(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu \right) \tag{1}$$

により与えられる．ここでは平坦な計量として $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1, 1)$, $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1)$ を採用する．

作用 (1) は正準形式では Virasoro 条件

$\varphi_\pm(x) \equiv \frac{1}{4}(P \pm X')^2 = 0$

を持つ拘束系を記述する．ここで P_μ は X^μ に共役な運動量である．重力場 g_{ab} を非力学的な外場とみなす立場では $\varphi_\pm$ は運動方程式

$$\dot{\varphi}_\pm \mp 2\lambda'_\pm \varphi_\pm \mp \lambda_\pm \varphi'_\pm = 0 \tag{2}$$

により記述され, 古典的な Virasoro 代数

$$\{\varphi_\pm(x), \varphi_\pm(y)\} = \pm\{\varphi_\pm(x) + \varphi_\pm(y)\}\partial_x \delta(x-y), \qquad \{\varphi_+(x), \varphi_-(y)\} = 0$$

を満足する．ここで $\lambda_\pm = \dfrac{\sqrt{-g} \pm g_{01}}{g_{11}}$ である．また $\dot{A} = \partial_0 A$, $A' = \partial_1 A$ を用いた.

作用 (1) の世界面上での一般座標変換と局所 Weyl 変換の下で不変性は, エネルギー・運動量テンソル T_{ab} が保存則を満たし traceless であることを導く．実際, T_{ab} の各成分は $\varphi_\pm$ を用いて

$$T_{11} = (\lambda^+)^2 \varphi_+ + (\lambda^-)^2 \varphi_-, \quad T_{01} = T_{10} = \lambda^+ \varphi_+ - \lambda^- \varphi_-, \quad T_{11} = \varphi_+ + \varphi_- \tag{3}$$

のように表されるので, これが共変的な保存則を満たし traceless であることは (2) と $\lambda^\pm$ の性質から直ちに導かれる．これらの結果は重力場 g_{ab} を力学変数とみなす場合のエネルギー・運動量条件 $T_{ab} = 0$ と両立する.

以上は古典論での話であるが, 量子論に移行すると $\varphi_\pm$ の交換関係に VA が現れその結果 (3) は一般に保存しなくなる．簡単のため以下では g_{ab} は古典的な背景場とし, 弦の変数 X^μ

だけを量子化された演算子とみなす.

Virasoro 演算子を定義するために, ここで演算子の正規積について触れておく. いま X^μ, P^μ を次のように Fourier 展開しよう;

$$X^\mu = \frac{i}{2\sqrt{\pi}} \int \frac{dk}{k}(a_k^\mu e^{-ikx} + b_k^\mu e^{ikx}), \qquad P^\mu = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int dk(a_k^\mu e^{-ikx} + b_k^\mu e^{ikx}).$$

ただし x は世界面上の空間座標を表す. また $a_k^{\mu\dagger} = a_{-k}^\mu$, $b_k^{\mu\dagger} = b_{-k}^\mu$ を満たす. X^μ と P^ν の交換関係は

$$[a_k^\mu, a_{k'}^{\nu\dagger}] = [b_k^\mu, b_{k'}^{\nu\dagger}] = \eta^{\mu\nu} k\delta(k-k'), \qquad \text{他の交換関係は } 0,$$

とおくことにより満足される. (無限に長い弦を念頭においているが, それにともなう赤外発散についてはここでは考えない.) いま a_k^μ, b_k^μ $(k > 0)$ により消される状態を Fock 真空に選ぶと, これにより演算子の正規積が定義される.

正規積により定義された Virasoro 演算子 $\varphi_\pm$ は交換関係

$$[\varphi_\pm(x), \varphi_\pm(y)] = \pm i\{\varphi_\pm(x) + \varphi_\pm(y)\}\partial_x\delta(x-y) \pm i\kappa_0\partial_x^3\delta(x-y),$$

を満たし, VA が現れる. ただし $\kappa_0 = -\dfrac{D}{24\pi}$ である. そのために運動方程式 (2) も修正を受け

$$\dot{\varphi}_\pm \mp 2\lambda'_\pm\varphi_\pm \mp \lambda_\pm\varphi'_\pm = \pm\kappa_0\lambda^{\pm'''},$$

が得られる. これは直ちに $\boldsymbol{T}_{ab} = \sqrt{-g}T_{ab}$ の保存則の破れ

$$\nabla_a \boldsymbol{T}^{0a} = \kappa_0 \frac{\lambda_+''' - \lambda_-'''}{\sqrt{-g}}, \quad \nabla_a \boldsymbol{T}^{1a} = -\kappa_0 \frac{\lambda_+\lambda_+''' + \lambda_-\lambda_-'''}{\sqrt{-g}} \tag{4}$$

を導く. 直交ゲージ $g_{ab} = e^\rho\eta_{ab}$ では $\lambda^\pm = 1$ となるため $\boldsymbol{T}_{ab}$ は保存されるが, 一般の背景場に対しては保存則が成立しな

い. これは作用 (1) の一般共変性が VA により破れることを意味する. 他方, $T^a_a = 0$ なので TA は現れず, Weyl 不変性は保たれていることがわかる.

§3. Trace Anomaly と Liouville 作用

一般共変性が破れ Weyl 不変性が残るという前節の結論は従来の理解とは全く矛盾するようにみえる. 共変性が失われる原因は T_{ab} の定義に用いた正規積が一般共変でないことにある. したがって (4) に現れる anomaly は適当な相殺項を作用 (1) に導入することで消去できる可能性がある. 実際 $\phi_\pm$ を

$$\dot{\phi}_\pm \mp 2\lambda^{\pm\prime}\phi_\pm \mp \lambda^\pm \phi'_\pm = \pm\lambda^{\pm\prime\prime\prime},$$

を満たす関数とし, 新しい Virasoro 演算子 $\tilde{\varphi}_\pm$ を

$$\tilde{\varphi}_\pm = \varphi_\pm + \kappa_0 \phi_\pm$$

により導入すれば, (3) において $\varphi_\pm$ を $\tilde{\varphi}_\pm$ で置き換えて得られるエネルギー・運動量テンソル $\widetilde{T}_{ab}$ は traceless の性質を保ったまま保存則を満足することがわかる.

このような $\widetilde{T}_{ab}$ を与える相殺項を S_V とするとそれは g_{ab} の汎関数で

$$\delta S_V = \int d^2x \delta g^{ab} \frac{\delta S_V}{\delta g^{ab}} = \kappa_0 \int d^2x (\phi_+ \delta\lambda^+ + \phi_- \delta\lambda^-)$$

を満たさなければならないことが示される. この式を積分するために $\phi_\pm$ が

$\dot{f}_\pm \mp \lambda^\pm f'_\pm = 0$

により定義される関数 $f_\pm$ の Schwarz 微分 $\mathcal{D}$ を用いて

$$\phi_\pm = \mathcal{D} f_\pm, \qquad \text{ただし} \quad \mathcal{D} f = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

のように表されることに注意しよう．関数 $f_\pm$ を用いれば S_V は

$$S_V = \frac{\kappa_0}{2} \int d^2x (\lambda^{+''} \ln f'_+ + \lambda^{-''} \ln f'_-)$$

により与えられる．Weyl 変換の下で $\lambda^\pm$, $f_\pm$ は不変なので S_V も不変である．したがって全作用 $S_X + S_V$ は一般共変でしかも Weyl 不変となる．

計量 g_{ab} の汎関数とみなすと S_V は非局所的な形をしているので，この点は重力場の量子化の妨げになる．さいわい S_V の非局所性は一般共変な新たな相殺項 S_T の導入で取り除くことができる．重力場を $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$ のように弱場 h_{ab} で展開するとき S_V は h_{ab} の最低次で

$$S_V = \frac{\kappa_0}{4} \int d^2x \left(h_{++} \frac{\partial_-^3}{\partial_+} h_{++} + h_{--} \frac{\partial_+^3}{\partial_-} h_{--} + \text{local terms} \right)$$

により与えられることから S_T が容易に見いだされる．すなわち

$$S_T = \frac{\kappa_0}{4} \int d^2x \int d^2y \sqrt{-g} R(x) K(x,y) \sqrt{-g} R(y), \tag{5}$$

ここで R はスカラー曲率であり，$K(x,y)$ は

$$\partial_a (\sqrt{-g} g^{ab} \partial_b) K(x,y) = \delta^2(x-y)$$

を満たす．(光円錐座標は $x^\pm = x^0 \pm x^1$ である．また $\partial_\pm =$

$\partial_0 \pm \partial_1$ と定義した.)

式 (5) より S_T は一般共変なので $\widetilde{T}_{ab}$ の保存則を壊さないが Weyl 変換 $g_{ab} \to g_{ab} + \delta\sigma g_{ab}$ の下で不変ではなく, TA の関係式

$$\delta S_T = -\frac{\kappa_0}{2}\int d^2x\sqrt{-g}R\delta\sigma$$

を再現する. すなわち作用に局所性を課すことで TA が現れたといえる. 作用 (5) は Polyakov により見いだされた Liouville 作用に外ならない.

このような非局所項の相殺が厳密に成立することは調和座標

$$\tilde{x}^{\pm} = f_{\pm}(x)$$

を導入することにより示される. この座標系では背景場 g_{ab} は η_{ab} に共形同値になるので (5) を簡単化できる. ここではその導出を省略するが, 最終的に g_{ab} を用いて表された重力場の有効作用 S_L は次式により与えられる;

$$\begin{aligned} S_L &= S_V + S_T + S_{\mathrm{cosm}} \\ &= \frac{\kappa_0}{2}\int d^2x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{ab}\partial_a\xi\partial_b\xi + R\xi - \mu^2 - 2g^{00}\left\{\left(\frac{g_{01}}{g_{11}}\right)'\right\}^2\right). \end{aligned} \tag{6}$$

ここで $\xi = \ln g_{11}$ であり, ξ は本質的に重力場の LM に対応している. また S_{cosm} は宇宙項を表す. この項を禁止する対称性はもはや存在しない.

作用 (6) は Polyakov が与えた Liouville 作用 (5) とは対照的に一般共変ではないが局所的である. しかし, 全作用 $S =$

$S_X + S_L$ は一般共変性を満足し, TA を正しく再現する.

§4. まとめ

任意の背景計量場が与えられた Polyakov 弦を調べ, 理論の一般共変性, VA, TA, 局所性の相互関係を明確にし, 2 次元重力場の有効作用を見いだした. 正準形式に基づいた考察でも Liouville 作用が自然に導かれることを示した.

理論に局所性を課さなければ 2 次元重力場の有効作用として一般共変で Weyl 不変なものが得られる. この作用が重力場も含めて量子論として意味のあるものになっているならば, 重力場に関係した力学的励起をもたない 2 次元量子重力理論を記述するであろう.

理論に局所性を課すことにより LM が力学的な自由度として現れ, Liouville 作用 (6) により記述される. この作用の特徴は計量場について局所的な点である. これは一般共変性を犠牲にすることにより可能になる. 物質場の作用も含めれば理論は全体として一般共変性を保持している.

ここで得られた結果が既に知られている結果の単なる言い換えに過ぎないのか, それとも 2 次元量子重力の研究に新しい知見をもたらすのか, 今後の研究に乞ご期待.

文献

[1] A. M. Polyakov, Phys. Lett. **B103**(1981)207

[2] A. M. Polyakov, Mod. Phys. Lett. **A2**(1987)893
V. G. Knizhnik, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, Mod. Phys. Lett. **A3**(1988) 819

[3] F. David, Mod. Phys. Lett. **A3**(1988)1651
J. Distler and H. Kawai, Nucl. Phys. **B321**(1989)509

[4] T. Fujiwara, T. Tabei, Y. Igarashi, J. Kubo and K. Maeda, Kanazawa University preprint, KANAZAWA-92-15