数理解析研究所講究録
872巻 1994年 150-157

$\mathrm{Int}(P)\cap\mathbb{Z}^n=\{0\}$ を満たす $\mathbb{R}^n$ 内の整凸多面体Pの双対多面体の体積の上限について

東北学院大学教養学部　土橋宏康

Pを $\mathbb{R}^n$ 内の整凸多面体とする。即ち、Pは $\mathbb{Z}^n$ の有限部分集合の凸包である。さらに、Pは $\dim P=n$, $\mathrm{Int}(P)\cap\mathbb{Z}^n=\{0\}$ を満たすと仮定する。このとき、Pの双対多面体を

$P^*=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \langle x, y\rangle\geq -1 \text{ for } {}^\forall y\in P\}$

により定義する。このようなPに対してコンパクトn次元 toric多様体 X_P が対応し、Pの境界が単体的ならば X_P は $\mathbb{Q}$－Fano多様体であり、また $(-K_X)^n=n!\mathrm{vol}(P^*)$ であることが知られている([1]を参照せよ)。逆に、すべての $\mathbb{Q}$－Fano toric多様体は上記の条件を満たす整凸多面体から得られる。現在までに知られているものの中で $\mathrm{vol}(P^*)$ が最大となる整凸多面体PはZaks,Perles&Wills[2]によって最初に発見された次の例で与えられる。

<u>例</u>　$y_1=2$, $y_2=3$, ..., $y_{k+1}=y_1y_2...y_k+1$ により数列 $\{y_n\}$ を定める。P_n を ${}^t(1,0,...,0)$, ${}^t(0,...,0,1)$, ..., ${}^t(2(1-y_n)/y_1,...,2(1-y_n)/y_{n-1},-1)$ を頂点とする単体とすれば、双対多面体 P_n^* は ${}^t(-1+y_1,-1,...,-1)$, ${}^t(-1,...,-1,-1+y_{n-1},-1)$, ${}^t(-1,...,-1,-1+2(y_n-1))$, ${}^t(-1,...,-1)$を頂点とする単体である。従って、P_n^* も整凸多面体であり、$\mathrm{Int}(P_n)\cap\mathbb{Z}^n=\mathrm{Int}(P_n^*)\cap\mathbb{Z}^n=\{0\}$ である。また $n!\mathrm{vol}(P_n^*)=y_1y_2...y_{n-1}2(y_n-1)=2(y_n-1)^2$ である。

<u>予想 A_n $(n\geq 3)$</u>　Pが $\mathrm{Int}(P)\cap\mathbb{Z}^n=\{0\}$ を満たす $\mathbb{R}^n$ 内のn次元整凸多面体ならば、$n!\mathrm{vol}(P^*)\leq 2(y_n-1)^2$.

<u>注</u>　$n=2$のときPを ${}^t(1,0)$, ${}^t(0,1)$, ${}^t(-1,-1)$ を頂点とする単体とすれば $2!\mathrm{vol}(P^*)=9>2(y_2-1)^2=8$ だからA_2は偽である。

最近、この予想は次の予想B_k ($1\leq k\leq n-1$) に帰着できることが分かった。即ち、

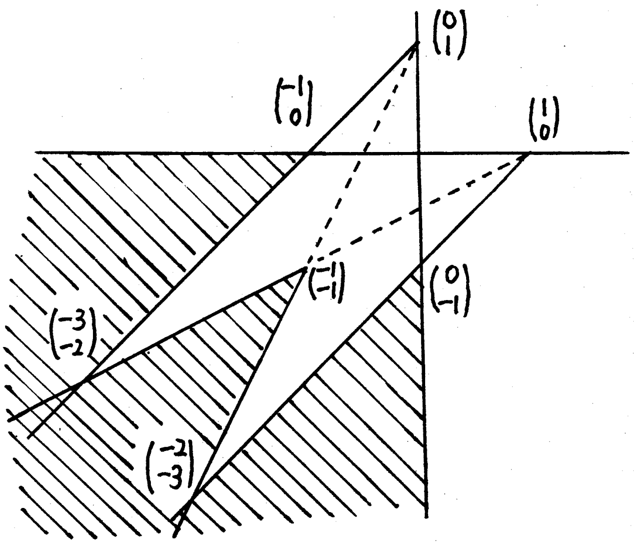
<u>定理</u> [1] $n\geq 3$のとき、B_1, B_2, . . . , B_{n-1} が正しければA_nも正しい。

<u>予想B_k</u>　任意の$x=(x_1, x_2, . . . , x_k)\in\mathbb{Q}^k_{>0}$ に対して $\mathrm{Int}(\Delta(x))\cap\mathbb{Z}^k=\{0\}$ ならば、

$1+x_1+x_2+\ ...\ +x_k\leq y_{k+1}-1$,

ここに $\Delta(x)$ は ${}^t(1,0,...,0)$, ${}^t(0,...,0,1)$, ..., $-{}^t(x_1,x_2,...,x_k)$ を頂点とする単体である。

<u>注</u>　B_1は明らかである。また、B_2も下図より明らかである。



この予想B_kが簡単なアルゴリズムにより確かめられることを示すことが本稿の目的である。

$x=(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{Q}^k_{>0}$ とし

$$\alpha_j = \frac{x_j}{1+x_1+x_2+\ldots+x_k} \quad \text{for } 1 \leqq j \leqq k$$

とする。明らかに $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k<1$ である。

補題1. Lを正の実数とするとき、$1+x_1+x_2+\ldots+x_k \leqq L$ となるための必要十分条件は $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k \leqq 1-L^{-1}$ となることである。

証明 $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=1-(1+x_1+x_2\ldots+x_k)^{-1}$ より明らか。 ■

補題2. $\mathrm{Int}(\Delta(x)) \cap \mathbf{Z}^k \neq \{0\}$ となるための必要十分条件は次の条件（＊）を満たす非負整数 $p_1, p_2, \ldots, p_k$ が存在することである。

（＊） $q:=p_1+p_2+\ldots+p_k \geqq 1$,
$(q+1)\alpha_j > p_j$ for $1 \leqq {}^{\forall} j \leqq k$.

証明 $p_1, p_2, \ldots, p_k$ を（＊）を満たす非負整数とする。

$c_{k+1}=(q+1)(1-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_k)$
$c_j=(q+1)\alpha_j-p_j$ for $1 \leqq j \leqq k$

とすれば、

$c_1+c_2+\ldots+c_{k+1}=1, \ c_j>0$ for ${}^{\forall} j$ (1)

である。また、

$p_j=c_{k+1}x_j-c_j$ for $1 \leqq j \leqq k$ (2)

だから $0 \neq -{}^t(p_1,p_2,\ldots,p_k)=c_1\,{}^t(1,0,\ldots,0)+\ldots+c_k\,{}^t(0,\ldots,0,1)+c_{k+1}\,{}^t(-x_1,-x_2,\ldots,-x_k) \in \mathrm{Int}(\Delta(x)) \cap \mathbf{Z}^k$.

逆に、$-{}^t(p_1,p_2,\ldots,p_k)$ を0と異なる $\mathrm{Int}(\Delta(x)) \cap \mathbf{Z}^k$ の元とすれば、(1),(2) を満たす有理数 $c_1, c_2, \ldots, c_{k+1}$ が存在する。このとき、

$q:=p_1+p_2+\ldots+p_k$

$$= c_{k+1}(x_1 + x_2 + ... + x_k) - c_1 - c_2 - ... - c_k$$
$$= c_{k+1}(1 + x_1 + x_2 + ... + x_k) - 1$$

だから

$$(q+1)\alpha_j = c_{k+1}(1 + x_1 + x_2 + ... + x_k)\alpha_j$$
$$= c_{k+1} x_j = p_j + c_j > p_j \quad ■$$

従って、上記の予想B_kは次の予想B_k'と同値である。

<u>予想B_k'</u>　$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$を$\Sigma_{i=1}^{k} \alpha_i < 1$を満たす正の有理数とする。

（＊）を満たす非負整数$p_1, p_2, ..., p_k$が存在しなければ　$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k \leq 1 - (y_{k+1} - 1)^{-1}$

<u>補題</u>3．$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$を$\Sigma_{i=1}^{k} \alpha_i < 1$を満たす正の有理数とするとき、（＊）を満たす非負整数$p_1, p_2, ..., p_k$が存在するための必要十分条件は2以上の整数mで

$$\lfloor m\alpha_1 \rfloor + \lfloor m\alpha_2 \rfloor + ... + \lfloor m\alpha_k \rfloor = m - 1$$

となるものが存在することである。

<u>証明</u>　$p_j = \lfloor m\alpha_j \rfloor$　とおけば十分条件は明らかであるから必要条件を示す。$m = q + 1$　とおけば　$m\alpha_j > p_j$だから

$\lfloor m\alpha_j \rfloor \geq p_j$　従って、

$$m > \lfloor m\alpha_1 \rfloor + \lfloor m\alpha_2 \rfloor + ... + \lfloor m\alpha_k \rfloor \geq q = m - 1 \quad ■$$

<u>系</u>4．次の条件を満たす正の有理数$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$が存在すれば、予想$B_k'$は偽である。

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k > 1 - (y_{k+1} - 1)^{-1},$$
$$\lfloor m\alpha_1 \rfloor + \lfloor m\alpha_2 \rfloor + ... + \lfloor m\alpha_k \rfloor < m - 1$$
$$\text{for } 2 \leq {}^\forall m \leq y_{k+1}.$$

<u>証明</u>　$K=(1-(y_{k+1}-1)^{-1}+\min(\Sigma_{j=1}^{k}\alpha_j,\ 1-y_{k+1}^{-1}))/2$ とし、$\beta_j=\alpha_j K/(\Sigma_{i=1}^{k}\alpha_i)$ とすれば、$1-y_{k+1}^{-1}>K=\Sigma_{i=1}^{k}\beta_i>1-(y_{k+1}-1)^{-1}$ である。また、$2\leqq m\leqq y_{k+1}$ を満たすすべての整数 m に対して

$$\Sigma_{i=1}^{k}\lfloor m\beta_i\rfloor\leqq\Sigma_{i=1}^{k}\lfloor m\alpha_i\rfloor<m-1 \quad \text{である。}$$

一方、$m>y_{k+1}$ ならば

$$\begin{aligned}\Sigma_{i=1}^{k}\lfloor m\beta_i\rfloor&<\Sigma_{i=1}^{k}m\beta_i=mK\\&<m-my_{k+1}^{-1}<m-1.\end{aligned}$$

従って、補題3より $\alpha_j:=\beta_j$ に対して(＊)を満たす非負整数 $p_1, p_2, ..., p_k$ は存在しない。■

$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ を $\Sigma_{i=1}^{k}\alpha_i<1$ を満たす正の有理数とする。$\alpha_1\geqq\alpha_2\geqq...\geqq\alpha_k$ と仮定してよい。補題3により $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ が条件

(＊＊) 2以上のすべての整数 m に対して $\Sigma_{i=1}^{k}\lfloor m\alpha_i\rfloor<m-1$

を満たすならば、$\Sigma_{i=1}^{k}\alpha_i\leqq 1-(y_{k+1}-1)^{-1}$ であることがいえれば予想 B'_k は正しい。以下、$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ が(＊＊)を満たすと仮定する。このとき、明らかに $\alpha_1\leqq 2^{-1}$, $\alpha_2\leqq 3^{-1}$ である。また、$\alpha_j\leqq(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_j)/j<j^{-1}$ である。次に、$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ を $\alpha_j\leqq\beta_j$ を満たす有理数とする。$\Sigma_{i=1}^{k}\beta_i\leqq 1-(y_{k+1}-1)^{-1}$ ならば $\Sigma_{i=1}^{k}\alpha_i\leqq 1-(y_{k+1}-1)^{-1}$ だから、$\Sigma_{i=1}^{k}\beta_i>1-(y_{k+1}-1)^{-1}$ と仮定しよう。$2\leqq m\leqq y_{k+1}$ を満たすすべての整数 m に対して $\Sigma_{i=1}^{k}\lfloor m\beta_i\rfloor<m-1$ ならば、系4により B'_k は偽である。そこで、ある2以上の整数 m に対して $q:=\Sigma_{i=1}^{k}\lfloor m\beta_i\rfloor\geqq m-1$ であると仮定する。ここで、仮に各 i に対して $\alpha_i>\beta'_i:=\lfloor m\beta_i\rfloor/(q+1)$ とすれば、$\Sigma_{j=1}^{k}\lfloor(q+1)\alpha_j\rfloor\geqq\Sigma_{j=1}^{k}\lfloor m\beta_j\rfloor=q$ となり最初の仮定に矛盾する。従って、ある i に対して $\alpha_i\leqq\beta'_i\ (<\beta_i)$ となる。以上のことから、下記のプログラムにより予想 B'_k が確かめられることが分る。また、β'_i の分母 $q+1$ が ky_{k+1} 以下であることに注意すれば、このプログラムが有限時間で終了することも分

る。

```
#define dim 4
int L;

main()
{
    int i,y; rational b[dim]; void ex();
    for(i=1,L=2;i<dim;i++) {
        y=L+1;
        L*=y;
    } /* L=y1y2...ydim=ydim+1-1 */
    b[0]=(rational)1/(rational)2;
    b[1]=(rational)1/(rational)3;
    for(i=2;i<dim;i++) b[i]=(rational)1/(rational)(i+1);
    ex(b);
    printf("Conjecture Bdim is true \n");
}

void ex(b)
    rational b[];
{
    int i,j,m,q,p[dim]; rational a[dim],s; void ex();
    for(s=i=0;i<dim;i++) s+=b[i];
    if((1-s)*L>=1) return;
    for(m=2;m<=L+1;m++) {
        for(q=i=0;i<dim;i++)
            q+=(p[i]=m*b[i]-(rational)1/(rational)(dim*L));
                /* = ⌊m*b[i]⌋ */
        if(q>=m-1) {
            for(i=0;i<dim;i++) a[i]=b[i];
```

```
                for(i=0;i<dim;i++) {
                    if(p[i]==0) break; /* p[j]==0 for j>i */
                    a[i]=(rational)p[i]/(rational)(q+1);
                    for(j=i+1;j<dim;j++)
                        if(a[i]<b[j]) a[j]=a[i];
                        else break;  /* α_j ≦ α_i  if i<j */
                    ex(a);
                    a[i]=b[i];
                }
                return;
            }
        }
        printf("Conjecture B_dim is false\n");
        exit(0);
}
```

注　dim ＝ 3，4 のときは上記プログラムの始めに

#define rational double

の一行を付け加えるか、またはint 型の変数が32bit ならば

```
typedef struct rational {
    int p,q;
} rational;
```

を付け加えてrational型の変数に対する演算子　+，－，*，／の多重定義をすればよい。前者の場合は浮動小数点の演算の誤差が y_{dim+1}^{-2} 以下であり、後者の場合は整数の演算が　$-2^{31}\sim 2^{31}$ の範囲内で行われる。いずれの場合も、ごく短時間で計算は終了し、B_3 および B_4 が（従って A_4 および A_5 も）正しいことが確かめられた。

dim ≧ 5　のときは多倍長演算をサポートしたプログラム言語が必要である。

文献

[1] H. Tsuchihashi, The upper-bound of the volume of the dual polytopes of integral convex polytopes P in $\mathbb{R}^n$ with $\mathrm{Int}(P) \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$, in preparation.

[2] J. Zaks, M. A. Perles and J. M. Wills, On the lattice vertex polytopes having interior lattice points, Elmente der Math., 37 No. 2, (1982), 44-46.