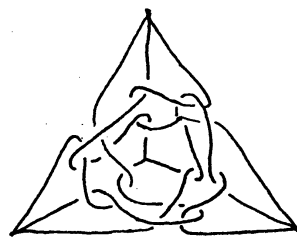
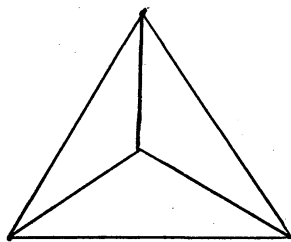


## 空間グラフについて

東女大文理 小林一章 (Kazuaki Kobayashi)

本稿では空間グラフとはどういうものかということを解説し、いくつかの問題提起をする。

$G$  を有限グラフ,  $\mathbb{R}^3$  を 3次元ユークリッド空間とし  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$  を埋め込みとしたとき  $\tilde{G} := f(G)$  を  $G$  の空間グラフ (または  $G$  の空間表現) という。従って空間グラフの理論はグラフ理論的 (離散的) 側面と結び目理論的 (連続的) 側面の二面性がある。多くの空間グラフは結び目や絡み目を含んでいるが, 結び目, 絡み目をなるべく含まない空間グラフの研究にはグラフ理論的側面が強くあらわれ, 結び目, 絡み目を出るだけ沢山含む空間グラフの研究には結び目理論的側面が強くあらわれるという特長を持っている。そこで本稿では,



- I. 結び目, 絡み目をなすべく含まない空間グラフ
- II. 結び目, 絡み目を出来るだけ沢山含む空間グラフ
- III. I, IIの橋渡しの的なるもの

と3つに分け, その各々で問題になっている概念, 問題をとり扱っていくつもりである。

以下で特にことわらばの限りグラフは有限単純連結グラフとし, 埋め込み  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$  (または3次元球面  $S^3$ ) はグラフ  $G$  の各辺上で微分可能とする。また殆んどの定理について証明が省略されているが, それらは最後に載せた参考文献を参照して下さい。

I. 空間グラフが詰り目, 詰め目をなるべく含まない方向の問題.

1. 本表現 (book presentation) と標準的な空間グラフ (standard spatial graph).

グラフ  $G$  の全ての頂点を含む  $G$  上の道 (path) があるとき,  $G$  を半ハミルトングラフ (pseudo Hamilton graph) という. またそのような道をハミルトン道 (Hamilton path) という.

定義.  $P'_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=0, y \geq 0\}$ .

$$P'_2 = \{(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x, y_2 = y \cos \theta - z \sin \theta, \\ z_2 = y \sin \theta + z \cos \theta, (x, y, z) \in P'_1, \theta = \frac{2\pi}{n}\}$$

$$P'_k = \{(x_k, y_k, z_k) \in \mathbb{R}^3 \mid x_k = x, y_k = y \cos \theta - z \sin \theta, \\ z_k = y \sin \theta + z \cos \theta, (x, y, z) \in P'_1, \theta = \frac{2(k-1)\pi}{n}\}$$

$$P'_n = \{(x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3 \mid x_n = x, y_n = y \cos \theta - z \sin \theta, \\ z_n = y \sin \theta + z \cos \theta, (x, y, z) \in P'_1, \theta = \frac{2(n-1)\pi}{n}\}$$

とし  $B_n = \bigcup_{i=1}^n P'_i$  を  $n$  シートをもつ本 (a book) という.

$\square = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=z=0\}$ ,  $P_i = P'_i - \square$  とおき,  $\square$  をバインダー (binder),  $P_i$  を  $i$ -番目のシートという.

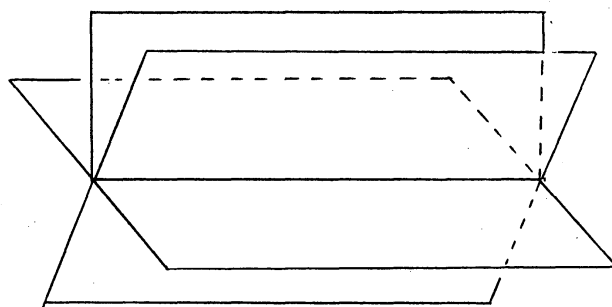
定義.  $G$  を半ハミルトングラフとし,  $\Delta$  を1つのハミルト

ン道とする。埋め込み  $\psi: (G, \Delta) \rightarrow (\mathbb{B}_n, \Sigma)$  は

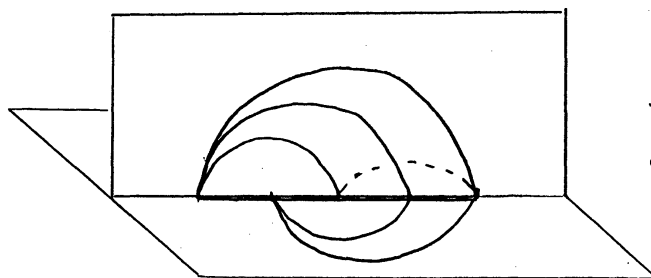
(1)  $G$  の全ての辺  $e$  に対し  $\psi(e)$  はある  $i$  番目のシート  $P_i$  に含まれる,

(2) 任意の  $P_i$  に対し  $\psi(e) \subset P_i$  となる辺  $e$  が少なくとも一つある, の2つの条件を満足する。

このとき  $\psi$  (又は  $\psi(G)$ ) を  $\Delta$  に埋める  $G$  の本表現 (a B.P.H.  $\Delta$ ) という。  $n$  が最小数のとき  $\tilde{G} := \psi(G)$  を  $G$  の標準的埋め込みグラフという。



5シートをもつ本



5頂点完全グラフ  
の本表現

★ いくつかの半ハミルトングラフ  $G$  の本表現における最小シート数  $m(G)$  の決定.

定理.  $n$  頂点完全グラフ  $K_n$  に対し  $m(K_n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ .

定理(池田). (1) 完全2部グラフ  $K_{n,n}$  に対し  $m(K_{n,n}) = n$ .

(2)  $n$ -cube graph  $Q_n$  に対し  $m(Q_n) = n-1$  ( $n \geq 3$ ),

$m(\bar{Q}_n) = n-1$  ( $n \geq 4$ )  $\bar{Q}_n$  は  $Q_n$  の補グラフ.

(3)  $K_{c(n)} = K_{\underbrace{n, n, \dots, n}_c}$  ( $c \geq 2$ ) とおいたとき,

$$m(K_{c(n)}) \begin{cases} = \left\lfloor \frac{c+1}{2} \right\rfloor & (c \geq 4, n=1) \\ = c & (c \geq 3, n=2) \\ \geq \left\lfloor \frac{(c-1)n}{2} \right\rfloor & (c \geq 2, n \geq 3) \end{cases}$$

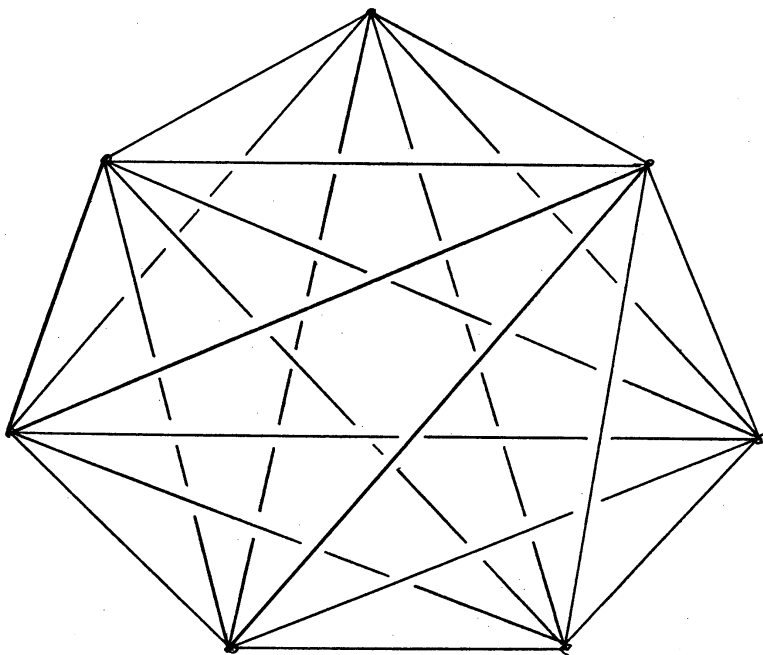
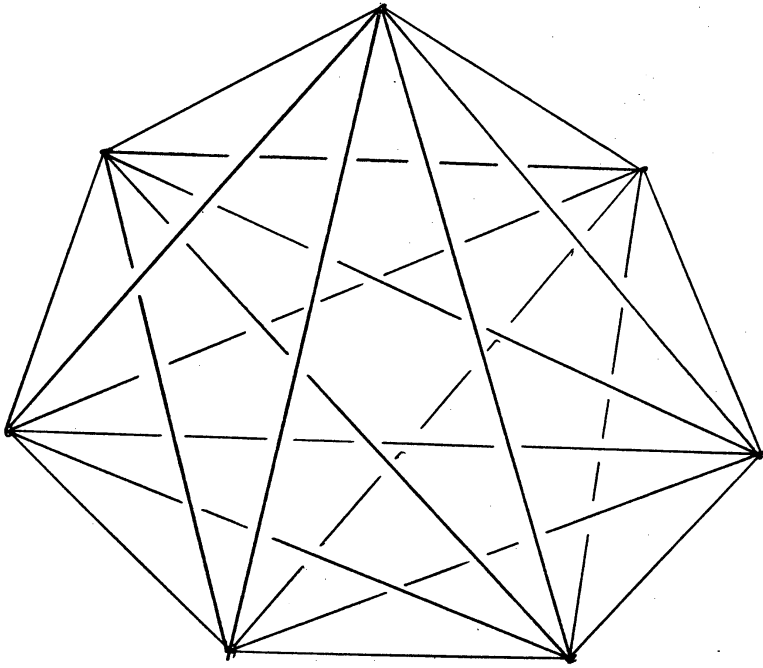
次に  $n$ 部完全グラフがどのようなとき半ハミルトングラフになるかについては以下の定理がある。

定理(鳥羽)  $n$ 部完全グラフ  $K_{m_1, m_2, \dots, m_n}$  が半ハミルトングラフである必要十分条件は  $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n$  とし

$m_1 \leq m_2 + m_3 + \dots + m_n + 1$  である。

半ハミルトングラフについて標準的空間グラフを定義したが、その定義による標準的グラフは一意的なるような同値関係がほしい。しかし結び目理論でよく使われる同値関係であるアンビエント・イソトピーは空間グラフに対しては強すぎて適当でない。次図の7頂点完全グラフの2つの空間グラフは両方共  $K_7$  の標準的空間グラフであるが、一方は右手系の三葉結び目 (right-handed trefoil knot) を含み、他

方は左手系の三葉結び目 (left-handed trefoil knot) を含  
んでいて互いにアンビエント・イソトピックでない。



そこで本 (a book) に対しシート変換という概念を導入する。

定義  $B_p = \square \cup \bigcup_{i=1}^p P_i$  を  $p$  シートをもつ本とし、同相写像

$h: B_p \rightarrow B_p$  は次の 2 条件 (1), (2) を満足するとする。

(1)  $h|_{\square} = \text{id}$ .

(2)  $h(P_i) = P_{\sigma(i)}$  ここで  $\sigma$  は  $\{1, 2, \dots, p\}$  の置換

このとき  $h$  は  $B_p$  のシート変換という。

定理 (大槻).  $K_n$  を  $n$  頂実完全グラフとし  $\psi_i: K_n \rightarrow B_p$  ( $i=$

$1, 2$ ) を  $K_n$  の 2 つの B.P.H. $\Delta$  (本表現) とし、 $p$  を最小とする (i.e.  $p = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ ).  $n$  が偶数のときシート変換  $h:$

$B_p \rightarrow B_p$  で  $h\psi_1(K_n) = \psi_2(K_n)$  となるものがある。

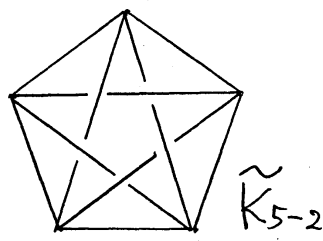
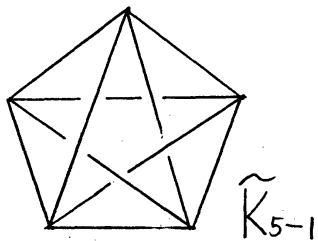
ところで半ハミルトングラフの空間グラフのうちで最小シート数をもつ本表現されたものを標準的空間グラフと定義したがシート数を大きくしても本表現されない空間グラフもある。しかしかえると本表現出来るということ自体が空間グラフにある種の制限を与えている。そのことを示すのが次の定理である。

定理 (1). 5 頂実完全グラフ  $K_5$  の任意の本表現 (B.P.H. $\Delta$ ) を  $\tilde{K}_5$  とすると  $\tilde{K}_5$  は非自明な結び目としては三葉結び目の

みを含み得る。

(2)  $\tilde{K}_5^*$  を  $K_5$  の標準的空間グラフとすると  $\tilde{K}_5^*$  は非自明な結び目を含み得ない。

従って下左図の空間グラフ  $\tilde{K}_{5-1}$  は 5 シートをもつ本表現として表現されるが三つ葉結び目を含んでいるので  $K_5$  の標準的空間グラフにはなり得ない。また下右図の空間グラフ  $\tilde{K}_{5-2}$  は  $5_1$ -結び目を含んでいるので  $K_5$  の本表現として表現出来



ないことがわかる。

6 頂点完全グラフに関しては次の事がいえる。

定理.  $K_6$  の標準的空間グラフ  $\tilde{K}_6^*$  は非自明な結び目または絡み目としては Hopf link のみを含み得る。

え. 空間グラフの位相的対称群  $TS\Gamma(\tilde{G})$ .

次に空間グラフ  $\tilde{G}$  を特長づける一つ概念として  $\tilde{G}$  の位相的対称群 (topological symmetry group) を導入する。

定義.  $G$  を有限グラフとし,  $\psi: G \rightarrow \mathbb{R}^3$  を埋め込みとし,

$\tilde{G} := \psi(G)$  とおく (したがって  $\tilde{G}$  は  $G$  の空間グラフ)

$\text{Aut}(G)$  を  $G$  の自己同型群とする。



このとき

$$\text{TSG}_+(\tilde{G}) = \{\tau \in \text{Aut}(G) \mid \exists \text{向きを保つ同相写像 } f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \text{s.t. } f \circ \psi = \psi \circ \tau\}$$

$$\text{TSG}_-(\tilde{G}) = \{\tau \in \text{Aut}(G) \mid \exists \text{向きを逆にする同相写像 } f: \mathbb{R}^3 \\ \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ s.t. } f \circ \psi = \psi \circ \tau\}$$

$\text{TSG}(\tilde{G}) := \text{TSG}_+(\tilde{G}) \cup \text{TSG}_-(\tilde{G})$  において空間グラフ  $\tilde{G}$  の位相的対称群という。  $\text{TSG}_+(\tilde{G})$  を  $\text{TSG}_+(\tilde{G}) \times \{0\}$ ,  $\text{TSG}_-(\tilde{G}) = \text{TSG}_-(\tilde{G}) \times \{1\}$  とおくことにより  $\text{TSG}(\tilde{G})$  を  $\text{Aut}(G) \times \mathbb{Z}_2$  の部分群とみなすことが出来る。

$\text{TSG}(\tilde{G})$  から  $G$  の特徴づけをする次のような結果がある。

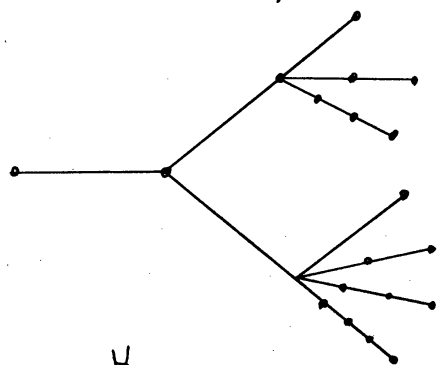
定理(谷山). (1) グラフ  $G$  の全ての空間グラフ  $\tilde{G}$  に対し  $\text{TSG}(\tilde{G}) \cong \text{Aut}(G) \times \mathbb{Z}_2$  となる必要十分条件は  $G$  が森 (即ち  $G$  のベッティ数が 0) となることである。

(2)  $\text{TSG}(\tilde{G}) \cong \text{Aut}(G) \times \mathbb{Z}_2$  となる  $G$  の空間グラフ  $\tilde{G}$  が存在する必要十分条件は  $G$  が平面的グラフである。

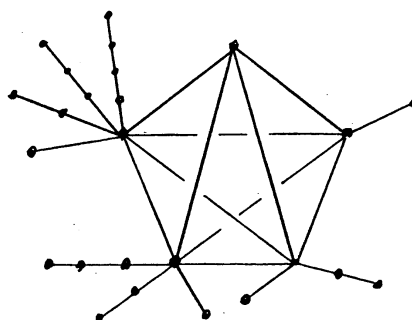
(3)  $\text{TSG}(\tilde{G}) = \{e\}$  となる空間グラフ  $\tilde{G}$  が存在する必要十分条件は  $G$  が孤立点又は位数 1 の頂点を持たないことである。

(4)  $G$  の全ての空間グラフ  $\tilde{G}$  に対し  $\text{TSG}(\tilde{G}) = \{e\}$  となる必要十分条件は  $G$  が非平面的グラフで  $\text{Aut}(G) = \{e\}$  となることである。

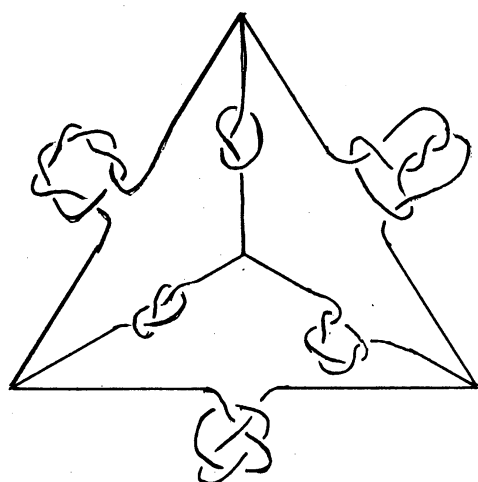
上の定理に関係するいくつかの例を挙げておく。



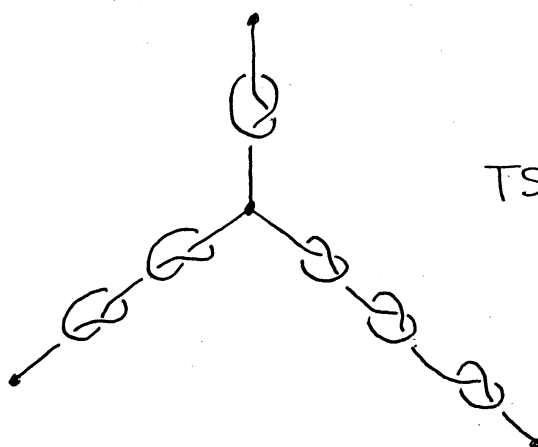
$$\text{TSG}(\checkmark \tilde{G}) \cong \text{Aut}(\tilde{G}) \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2.$$



$$\text{TSG}(\checkmark \tilde{G}) \cong \{e\}.$$



$$\text{TSG}(\tilde{K}_4) \cong \{e\}$$



$$\text{TSG}(\checkmark \tilde{G}) \cong \text{Aut}(\tilde{G}) \times \mathbb{Z}_2.$$

次に具体的な  $\tilde{G}$  に対して  $\text{TSG}(\tilde{G})$  を求めることはなるが、局所的に多くの節び目を含む空間グラフ  $\tilde{G}$  では  $\text{TSG}(\tilde{G})$  は求

めにくいのので適当な条件をみたしている空間グラフを考えることにする。

定義 写像  $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を  $p(x, y, z) = (x, y, 0)$  で定義されるものとし  $S_r^1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$

$$D_r^2 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\} \text{ とおく.}$$

埋め込み (空間表現)  $\eta: G \rightarrow \mathbb{R}^3$  は次の (1), (2) をみたすとする。

(1)  $\eta(V(G)) \subset S_r^1$

(2) 任意の辺  $e \in E(G)$  に対し  $p \circ \eta(e)$  は  $D_r^2$  内の線分。

このとき  $\eta(G)$  を  $G$  の準線形円周表現 (semi-linear circular diagram) とする。

$$SLCP(G) := \{ \tilde{G} \mid \tilde{G} = \eta(G): \text{準線形円周表現} \} / \approx$$

$$E(B_p(G)) := \{ \tilde{G} \mid \tilde{G} = \phi(G), \phi: G \rightarrow B_p: \text{本表現} \} / \approx$$

ここで  $\approx$  はアンビエント・イソトピック。

このようにおくと次が成り立つ。

命題  $G$  を半ハミルトングラフとすると

$$\bigcup_p E(B_p(G)) \subset SLCP(G).$$

特に  $n \geq 5$  のとき  $\bigcup_p E(B_p(K_n)) \subsetneq SLCP(K_n)$ .

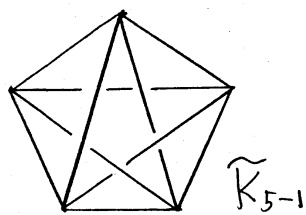
命題 (1)  $K_5$  及び  $K_{3,3}$  の標準的空中グラフ  $\tilde{K}_5^*$ ,  $\tilde{K}_{3,3}^*$  に対し

では

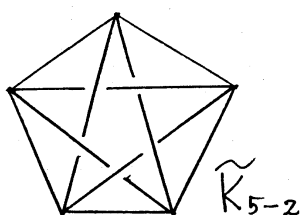
$$\text{TSG}(\tilde{K}_5^*) \cong \text{Aut}(K_5) \cong S_5 \quad (5 \text{ 次対称群})$$

$$\text{TSG}(\tilde{K}_{3,3}^*) \cong \text{Aut}(K_{3,3})$$

(2) 下図 (a), (b) の空間グラフ (準線形円周表現) に関して  
 は  $\text{TSG}(\tilde{K}_{5-1}) \cong \text{TSG}(\tilde{K}_{5-2}) \cong D_5$  (位数10の2面体群).



(a)



(b)

命題  $K_6$  の任意の空間グラフ  $\tilde{K}_6$  に対し

$$|\text{TSG}(\tilde{K}_6)| \leq |\text{TSG}(\tilde{K}_6^*)| = |S_2[S_3]| = 72$$

ここで  $\tilde{K}_6^*$  は  $K_6$  の標準的空間グラフを示し,  $|X|$  は群  $X$  の位数を示す。

### 3. 臨界グラフ

コンウェイ・ゴードン (Conway-Gordon) の定理より, 6頂点完全グラフの任意の空間グラフは非自明な絡み目を含み, 7頂点完全グラフの任意の空間グラフは非自明な結び目を含んでいる。この節ではこのような性質をもう少一般化して扱う。

定義. グラフ  $G$  の任意の空間グラフ  $\tilde{G}$  が非自明な結び目を含むとき  $G$  は結び目を内蔵しているという。同様に  $G$  の任意の

空間グラフが非自明な絡み目を含むとき  $G$  は絡み目を内蔵しているという。

定義.  $\rho$  をグラフのある性質とする。グラフ  $G$  が  $\rho$  をもち、 $G$  の任意の辺  $e$  に対しグラフ  $G - \{e\}$  が  $\rho$  を持たないとき、 $G$  は  $\rho$  に対し臨界である、または  $\rho$  に関する臨界グラフであるという。

問題.  $\rho$  を一つ定めたとき、 $\rho$  に関する臨界グラフの集合を決定せよ。

定理. (1)  $\rho$  が絡み目内蔵という性質のとき、 $K_6, K_{4,4} - \{e\}, K_{3,3,1}, G_7, G_8, G_9, P$  は絡み目内蔵に対し臨界である。

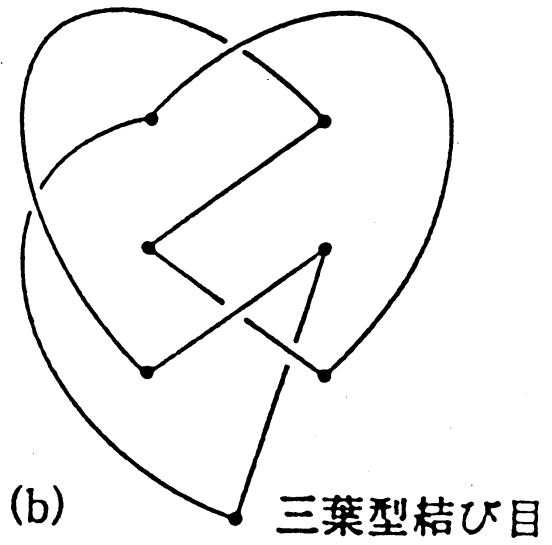
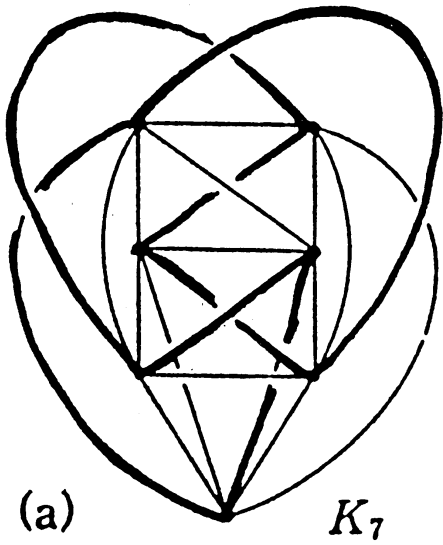
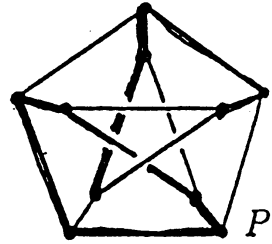
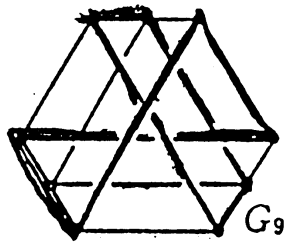
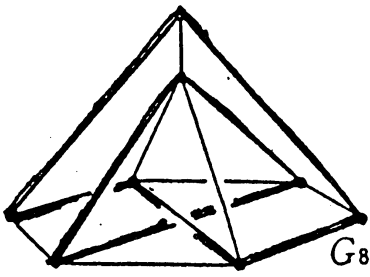
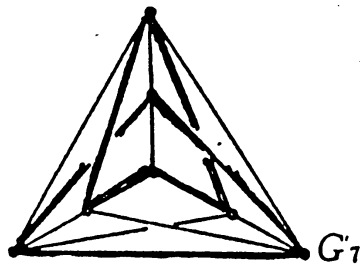
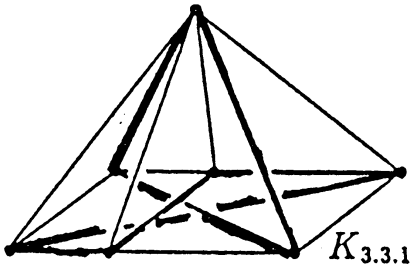
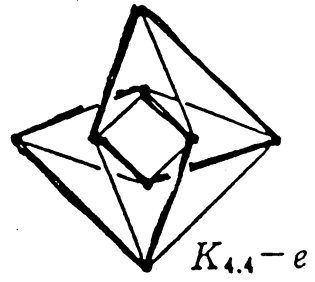
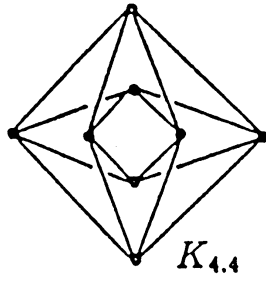
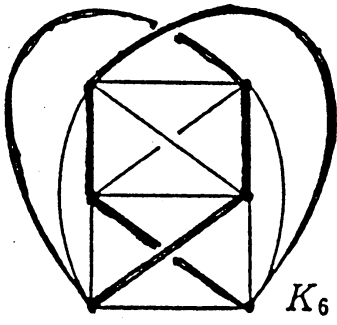
(2)  $\rho$  が結び目内蔵という性質のとき、 $K_7$  は  $\rho$  に対し臨界である。

予想.  $K_{3,3,1,1}$  は結び目内蔵に対し臨界である。

上に述べたさまざまなグラフに関しては次頁を参照のこと。

II. 空間グラフが結び目、絡み目を出来子だけ次山ふくむ方向の問題。

定義. グラフ  $G$  上の全てのサイクルの集合を  $I = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$  とする。 $G$  が順応性をもつ (adaptable) とは、 $n$  個の任意の結び目  $K_1, K_2, \dots, K_n$  に対して、埋め込み  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$  が



存在して  $f(C_i) = K_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) となる場合を言う。

例.  $K_7, K_{5,5}$  は順応性を持たない。

何故なら  $K_7, K_{5,5}$  のどんな空間グラフも非自明な詰む目を内蔵しているので  $\{K_1, \dots, K_n\}$  として全て自明な詰む目からなる集合を取ると, 埋め込み  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$  ( $G$  は  $K_7$  または  $K_{5,5}$ ) で  $f(C_i) = K_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) となるものはない。

例 (木下). グラフ  $\Theta_n$  は順応性をもつ。

山本は上の木下の例を次のように一般化した。

定理 (山本). (1)  $\Gamma = \{C_1, \dots, C_\alpha\}$  をグラフ  $G$  のあるサイクルの集合とする。  $\Gamma$  の任意の元が  $G$  の連続する 3 辺によって決まるならば, 任意に与えられた詰む目の集合  $\{K_1, K_2, \dots, K_\alpha\}$  に対して埋め込み  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$  で  $f(C_i) = K_i$  ( $i=1, \dots, \alpha$ ) となるものがある。

(2) 従って特に,  $G$  の任意のサイクルが  $G$  の連続する 3 辺によって決まるならば  $G$  は順応性をもつ。

例. 4 頂点完全グラフ  $K_4$  は順応性をもつ。

問題. 詰目内蔵に於て臨界なグラフの真部分グラフは順応性をもつか.

### III. I と II を結ぶような問題

今迄, 空間グラフ  $\tilde{G}$  がなるべく詰目, 詰め目を含まない場合と詰目, 詰め目をなるべく多く含む場合に分けて問題設定をして来たが, 以下でこれらを統合するような問題について解説する.

詰目, 詰め目の半順序 (谷山) の一般化.

定義.  $\tilde{G}$  を正則な位置にある  $G$  の空間グラフとし,  $\hat{G}$  をその射影図とする.  $\hat{G}$  から発生する空間グラフの“同値類”の集合を  $SG(\hat{G})$  とする. ここで2つの空間グラフ  $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2$  が同値であるとは同相写像  $h: (R^3, \hat{G}_1) \rightarrow (R^3, \hat{G}_2)$  が存在するときを言う. 空間グラフ型  $\tilde{G}_0$  が  $SG(\hat{G})$  の要素であるとき,  $\hat{G}$  は  $\tilde{G}_0$  の射影図であるという. 空間グラフ  $\tilde{G}_0$  の全ての正則射影図の集合を  $PROJ(\tilde{G}_0)$  で表わす.

定義. グラフ  $G$  の空間グラフ型  $\tilde{G}_1$  と  $\tilde{G}_2$  (空間グラフ型とは空間グラフの同値類を示す) について  $PROJ(\tilde{G}_1) \supseteq PROJ(\tilde{G}_2)$  であるとき,  $\tilde{G}_1$  は  $\tilde{G}_2$  より小さいという,  $\tilde{G}_1 \leq \tilde{G}_2$  または  $\tilde{G}_2 \geq \tilde{G}_1$  とかく.



命題  $\tilde{G}_1 \leq \tilde{G}_2$  のとき, 射影図または正則表示の言葉で言いかえると次のようになる。

(1)  $\tilde{G}_2$  のどんな射影図でも, その 2 重交点に適当に上下を指定すると  $\tilde{G}_1$  の正則表示になる。

(2)  $\tilde{G}_2$  のどんな正則表示でも適当に交差点を進んで上下を入れ換えると  $\tilde{G}_1$  の正則表示になる。

この大小関係  $\leq$  は次の性質をもつ。

定理.  $G$  の空間グラフ型の集合  $\mathcal{G}$  上で関係  $\leq$  は前順序 (pre-order) になる。すなわち次が成り立つ。

(1) 任意の空間グラフ  $\tilde{G}$  に対し  $\tilde{G} \leq \tilde{G}$  (反射律)

(2)  $G$  の 3 つの空間グラフ  $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{G}_3$  に対し  
 $\tilde{G}_1 \leq \tilde{G}_2, \tilde{G}_2 \leq \tilde{G}_3 \Rightarrow \tilde{G}_1 \leq \tilde{G}_3$  (推移律)

注意. 残念ながら次の (3) (対称律) は成立しない。

(3)  $\tilde{G}_1 \leq \tilde{G}_2, \tilde{G}_2 \leq \tilde{G}_1 \Rightarrow \tilde{G}_1 = \tilde{G}_2$

これは  $\text{PROJ}(\tilde{G}_1) = \text{PROJ}(\tilde{G}_2)$ , つまり  $\tilde{G}_1$  と  $\tilde{G}_2$  の射影図が全て一致しても必ずしも  $\tilde{G}_1 = \tilde{G}_2$  とはならないことを示している。



注. 結び目の集合  $(K, \leq)$  では今の所 (3) (交換律) が成立しない例は見つかっていない.

命題 (谷山) 交差数の少ない結び目及び2成分絡み目の具体的なものについて大小関係を決定している。特に最小元は自明な結び目, 自明な絡み目である。

### 参考文献

[C-G] Conway, J. H. & Gordon, C. McA. : Knots and links in spatial graphs, J. of Graph Theory vol. 7 (1983) 445-453

[E-O] Endo, T. & Otsuki : Notes on spatial representations of graphs, (preprint).

[I] Ikeda, K. : On minimum sheet numbers of graphs, (preprint).

[K] Kinoshita, S. : On  $n$ -curves in  $\mathbb{R}^3$  and their constituent knots, in Topology and Computer Science, Kinokuniya Company Ltd. (1987) 21-27

[Ko] Kobayashi, K. : Standard spatial graph, Hokkaido Math. J. 21 (1) (1992) 117-140

[K-T] Kobayashi, K. & Toba, C. : Topological symmetry

group of spatial graphs, Proc. TGRC-KOSEF 3 (1993)  
153-171.

[S] 鈴木晋一: 結び目理論入門, サイエンス社 (1991).

[T1] Taniyama, K: A partial order of knots, Tokyo J.  
Math., 12 (1989) 205-229

[T2] ————— : A partial order of links, Tokyo J.  
Math., 12 (1989) 475-484.

[Y] Yamamoto, M: Knots in spatial embeddings of the  
complete graph on four vertices, (preprint).

