

非線形摩擦項を持つ波動方程式の エネルギー減衰と解の漸近挙動

東京都立大 理学部 望月 清 (Kiyoshi Mochizuki)

東京外大 留学生日本語教育センター

塚 隆博 (Takahiro Motai)

§ 1 序と結果

次の初期値問題の解のエネルギーについて考察する。

$$(1.1) \begin{cases} w_{tt}(x,t) - \Delta w(x,t) + \lambda w(x,t) + b(x,t)|w_t(x,t)|^{p-1}w_t(x,t) = 0 \\ w(x,0) = w_1(x), \quad w_t(x,0) = w_2(x) \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \end{cases}$$

ここで $\lambda \geq 0$ 、 $b(x,t) \geq 0$ 、 $p \geq 1$ とする。エネルギーノルムを次で与える。

$$\left\| \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\|_E^2 = \frac{1}{2} \left\{ \|w_2\|_{L^2}^2 + \|\nabla w_1\|_{L^2}^2 + \lambda \|w_1\|_{L^2}^2 \right\}$$

特に $\left\| \begin{pmatrix} w(t) \\ w_t(t) \end{pmatrix} \right\|_E$ の場合は $\|w(t)\|_E$ と書く。この方程式の解について形式的には次のエネルギー等式が成り立つ。

$$(1.2) \quad \|w(t)\|_E^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} b(x,\tau) |w_t(x,\tau)|^{p+1} dx d\tau = \|w(0)\|_E^2 \quad (0 \leq t < \infty)$$

$b(x,t) \geq 0$ なので $\|w(t)\|_E^2$ は減少する。そこで、その減少の様子と $b(x,t)$ と p の関係を調べてみよう。この問題について以

下のことが知られている。

エネルギー減衰

次の条件下でエネルギーは減衰する。

• Matsumura [3]

$$\lambda = 0, \quad \rho = 1, \quad N \geq 1, \quad b_1 > 0, \quad b_2 > 0 \text{ が存在して}$$

$$b_1 (1 + |x| + t)^{-1} \leq b(x, t) \leq b_2 \quad \text{かつ} \quad b_t(x, t) \leq 0$$

• Nakao [11]

$$\lambda > 0, \quad b(x, t) \equiv 1, \quad N \geq 1, \quad 1 < \rho \leq 1 + \frac{2}{N}$$

エネルギー非減衰

次の条件下でエネルギーは減衰しない。

• Mochizuki [4, 5, 6]

$$\lambda = 0, \quad N \geq 2, \quad b_3 > 0 \text{ が存在して}$$

$$0 \leq b(x, t) \leq b_3 (1 + |x|)^{-\delta} \quad (0 \leq \delta \leq 1) \quad \text{かつ} \quad \rho > 1 + \frac{2(1-\delta)}{N-1}$$

または

$$0 \leq b(x, t) \leq b_3 (1 + |x|)^{-\delta} \quad (\delta > 1) \quad \text{かつ} \quad \rho = 1$$

• Motai [10]

$$\lambda > 0, \quad b(x, t) \equiv 1, \quad \rho > 1 + \frac{2}{N}$$

また、エネルギーが非減衰の場合の解の漸近挙動については Mochizuki [5] と Motai [10] で考察されている。これ

らの結果から、特に $\lambda=0$ で非線形の摩擦項の場合の減衰の結果が何も無いことがわかる。そこで、それに対する結果を中心に非減衰、漸近性の結果を報告する。

解の存在定理を述べるために、ソボレフノルムとして次を定義する。

$$\|u\|_{H_p^{s,s}} = \|\mathcal{F}^{-1}(|z|^s (1+|z|^2)^{s/2} \hat{u}(z))\|_{L^p}$$

ここで特に $p=2$ のときは p を、 $s=0$ のときは s を省略する。次の存在定理が成り立つ。

定理 1 (存在)

$\lambda \geq 0$ 、 $N \geq 1$ とする。 $b(x,t)$ は、正定数 C が存在して

$$|b_t(x,t)| + |\nabla b(x,t)| \leq C b(x,t)$$

を満たし、 $\rho > 1$ とする。このとき初期値 $(w_1(x), w_2(x))$

$\in H^2 \times (H^1 \cap L^{2\rho})$ に対し、次を満たす解が一意に存在する。

$$\lambda = 0 \text{ ならば } w(t) \in L^\infty((0, \infty); H^{0,2} \cap H^{0,1}) \cap C([0, \infty); H^1) \\ \cap C^1([0, \infty); L^2),$$

$$\lambda > 0 \text{ ならば } w(t) \in L^\infty((0, \infty); H^2) \cap C([0, \infty); H^1) \\ \cap C^1([0, \infty); L^2),$$

$$\text{かつ } w_\pm(t) \in L^\infty((0, \infty); H^1) \\ b(x,t) |w_\pm(t)|^{\rho-1} w_\pm(t) \in L^{\frac{\rho+1}{\rho}}((0, \infty); H^{\frac{1}{\rho}}) \cap L^\infty((0, \infty); L^2).$$

さらに、ほとんどのいたるところ t に関する 2 階微分が存在し

$$w_{tt}(t) \in L^\infty((0, \infty); L^2)$$

かつ、(1.1) を L^2 の意味で満たす。

これ以後 (1.1) の解とは定理 1 で存在が証明された解とする。減衰の結果を述べるために重み付きエネルギーを次で定義する。

$$(1.3) \quad \|w(t)\|_{E_\varphi}^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} [\varphi(r+t) \{ |w_t(x,t)|^2 + |\nabla w(x,t)|^2 + \lambda |w(x,t)|^2 \} - \varphi''(r+t) |w(x,t)|^2] dx$$

ここで $r = |x|$ で、 φ として

$$(1.4) \quad \varphi(s) = \{ \log(a+s) \}^\mu \quad (\mu > 0)$$

または

$$(1.5) \quad \varphi(s) = (a+s)^\nu \quad (0 < \nu < 1)$$

を考え、 a は μ と ν に応じて決めるものとする。

定理 2 (減衰)

(i) $\lambda \geq 0$ 、 $N \geq 1$ とする。 $0 \leq \delta < 1$ 、 $b_1 > 0$ 、 $b_2 > 0$ に対し、 ρ と $b(x,t)$ は

$$(1.6) \quad b_1 (1+|x|+t)^{-\delta} \leq b(x,t) \leq b_2 \quad \text{かつ} \quad 1 < \rho \leq 1 + \frac{2(1-\delta)}{N}$$

を満たすとする。さらに $\lambda = 0$ の場合 $b_t(x,t) \leq 0$ と仮定する。 $\varphi(\cdot)$ は (1.4) で与えられたものとし、 μ は

$$(1.7) \quad 0 < \mu < \frac{2}{p-1}$$

を満たす。このとき、初期値 $(w_1, w_2) \in H^2 \times (H^1 \cap L^{2p})$ が $\|w(0)\|_{E_\varphi} < \infty$ を満たすとき、定数 $K_1 > 0$ が存在して

$$(1.8) \quad \|w(t)\|_E^2 \leq K_1 \{\log(a+t)\}^{-\mu}$$

が成り立つ。

(ii) $\lambda > 0$, $N \geq 1$ とする。 $0 \leq \delta < 1$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ に対し、 ρ と $b(x,t)$ は

$$(1.9) \quad b_1(1+|x|+t)^{-\delta} \leq b(x,t) \leq b_2 \quad \text{かつ} \quad 1 < \rho < 1 + \frac{2(1-\delta)}{N}$$

を満たすとする。 $\varphi(\cdot)$ は (1.5) で与えられたものとし、 ν は

$$(1.10) \quad 0 < \nu < \frac{2(1-\delta)}{\rho-1} - N \quad \text{かつ} \quad \nu \leq 1$$

を満たす。このとき、初期値 $(w_1, w_2) \in H^2 \times (H^1 \cap L^{2p})$ が $\|w(0)\|_{E_\varphi} < \infty$ ならば、定数 $K_2 > 0$ が存在して

$$(1.11) \quad \|w(t)\|_E^2 \leq K_2 (a+t)^{-\nu}$$

が成り立つ。

次に非減衰と漸近挙動の結果を述べるために (1.1) に対する自由な系の方程式

$$(1.12) \quad \begin{cases} w_{0tt}(x,t) - \Delta w_0(x,t) + \lambda w_0(x,t) = 0 \\ w_0(x,0) = w_1(x), \quad w_{0t}(x,0) = w_2(x) \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \end{cases}$$

を考える。初期値 (w_1, w_2) に対し、この方程式の解を $U_0(t)$ で

$$U_0(t) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0(t) \\ w_{0t}(t) \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

と対応させる。よく知られているように、この作用素はエネルギーノルムから定まる関数空間上の1パラメータユニタリ一群となる。

定理3 (非減衰)

$0 \leq \delta \leq 1$ と正定数 $b_3 > 0$ に対し、 ρ と $b(x, t)$ は次を満たすとする。

$$(1.13) \quad \lambda = 0, \quad N \geq 2, \quad 0 \leq b(x, t) \leq b_3 (1 + |x|)^{-\delta}, \quad \rho > 1 + \frac{2(1-\delta)}{N-1}$$

$$(1.14) \quad \lambda > 0, \quad N \geq 1, \quad 0 \leq b(x, t) \leq b_3 (1 + |x|)^{-\delta}, \quad \rho > 1 + \frac{2(1-\delta)}{N}$$

さらに、 $(w_1, w_2) \in H^2 \times (H^1 \cap L^{2\rho})$ に対する自由な系(1.12)の解 $w_0(t)$ が

$$(1.15) \quad \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} b(x, \tau) |w_{0\tau}(x, \tau)|^{\rho+1} dx d\tau < \infty$$

を満たすとする。 $\varepsilon > 0$ をこれに対して

$$(1.16) \quad \varepsilon^{\rho-1} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} b(x, \tau) |w_{0\tau}(x, \tau)|^{\rho+1} dx d\tau < 2^{\rho+1} \|w_0(0)\|_E^2$$

を満たすように取る。このとき、初期値 $(\varepsilon w_1, \varepsilon w_2)$ に対する(1.1)の解のエネルギーは減衰しない。

定理4 (漸近挙動)

$b(x, t) \equiv 1$ とする。

(i) $\lambda = 0, \quad N \geq 2$ とする。 $1 + \frac{4}{N-1} \leq \rho < \rho_N$ に対し $\frac{1}{p} = \frac{1}{2}$ とし、 $1 + \frac{2}{N-1} < \rho \leq 1 + \frac{4}{N-1}$ に対し、

$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p+1} \right)$ とする。ここで $\rho_N = \infty$ ($1 \leq N \leq 6$)、 $N/(N-6)$ ($N \geq 7$) である。このとき、(1.1) の解の組 $(w(t), w_\varepsilon(t))$ に対し $(w_1^+, w_2^+) \in (H^{0,2} \cap H^{0,1}) \times H^1$ が一意に存在し

(1.17) $\| U_0(-t) \begin{pmatrix} w(t) \\ w_\varepsilon(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_1^+ \\ w_2^+ \end{pmatrix} \|_{H_p^{0,1} \times L^p} \rightarrow 0$ (as $t \rightarrow \infty$) を満たす。

(ii) $\lambda > 0$ 、 $N \geq 1$ とする。 $1 + \frac{4}{N} \leq \rho < \rho_N$ に対し $\frac{1}{p} = \frac{1}{2}$ 、 $1 + \frac{2}{N} < \rho \leq 1 + \frac{4}{N}$ に対し $\frac{1}{p} = \frac{1}{\rho+1}$ とする。このとき、(1.1) の解の組 $(w(t), w_\varepsilon(t))$ に対し $(w_1^+, w_2^+) \in H^2 \times H^1$ が一意に存在し

(1.18) $\| U_0(-t) \begin{pmatrix} w(t) \\ w_\varepsilon(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_1^+ \\ w_2^+ \end{pmatrix} \|_{H_p^1 \times L^p} \rightarrow 0$ (as $t \rightarrow \infty$) が成り立つ。

[注意]

(1) $\frac{1}{p} = \frac{1}{2}$ のとき、 $H_p^{0,1} \times L^p$ 、 $H_p^1 \times L^p$ のノルムはエネルギーノルムと一致する。

(2) この講演後 (i) の結果は次のように拡張できることがわかった。

$\lambda = 0$ 、 $N \geq 3$ とする。 $0 < \sigma \leq 1$ 、 $b_3 > 0$ に対し、 $0 \leq b(x,t) \leq b_3(1+|x|)^{-\sigma}$ とする。 $1 + \frac{4(1-\sigma)}{N-1} < \rho < \rho_N$ に対し $\frac{1}{p} = \frac{1}{2}$ 、 $1 + \frac{2(1-\sigma)}{N-1} < \rho \leq 1 + \frac{4}{N-1}$ に対し $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \eta_\rho$

とする。ここで $\eta_\rho > 0$ で、 ρ に依存した定数である。このとき (i) の結論が成り立つ。

以上が今回の主要な結果である。定理 1 に関連して、弱解の存在定理は摩擦項の単調性により、既に Lions - Strauss [2]、Strauss [12] 等で証明されている。ここでは、特に定理 4 の結果を得るために強解の存在定理の形で述べた。

定理 2 と定理 3 を比べると $\lambda = 0$ の場合

$$1 + \frac{2(1-\sigma)}{N} < \rho \leq 1 + \frac{2(1-\sigma)}{N-1}$$

に対して、減衰・非減衰が明らかになっていないことがわかる。 $\lambda > 0$ の場合の結果から、この条件下ではエネルギー減衰が起こると予想されるが、未解決の問題である。

定理 3 では (1.15) を満たす初期値が存在することが重要となる。実は (1.13) と (1.14) はそれを保証するための条件である。(1.15) は自由な系の解の L^∞ 評価を使うことにより示すことができる。 $\lambda = 0$ の場合は Klainerman [1] の一般化されたソボレフの不等式を、 $\lambda > 0$ の場合は $L^\infty - L^1$ 評価を使えばよい。詳しい証明は Mochizuki - Motai [8] を参照してほしい。

定理 4 の $\lambda > 0$ で $1 + \frac{4}{N} \leq \rho < \rho_N$ の場合は既に Motai [10] で示されている。また、漸近性を調べるための抽象的枠組も

Mochizuki-Motai [7] で報告されている。定理4の証明は Mochizuki-Motai [9] で与える予定である。

また、ここで報告された結果を与える方法は他の摩擦項にも適用できる。例えば $(\nabla_x * |w_\varepsilon|^2) w_\varepsilon$ ($\nabla_x = |x|^{-\delta}$ ($0 < \delta < N$) * は x に関する合成積) に対しても同様の結果を得ることができ。この場合についても Mochizuki-Motai [8, 9] を参照してほしい。

次の節では定理2の証明の概略を与える。

§2 定理2の証明の概略

$\Psi(\cdot)$ は (1.4) または (1.5) で与えられたものとする。このとき次を得る。

補題1

初期値 $(w_1, w_2) \in H^2_x \times (H^1 \cap L^{2p})$ を $\|w(0)\|_{E_\Psi} < \infty$ を満たすように選び、対応する (1.1) の解を $w(t)$ とする。このとき (1.4) または (1.5) の a を十分大きく取れば、定数 $k > 1$ が存在して、次の不等式がなりたつ。

$$(2.1) \quad \frac{k-1}{k} \|w(t)\|_{E_\Psi}^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Psi(r+\tau) b(x,\tau) |w_\varepsilon(x,\tau)|^{p+1} dx d\tau \\ \leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Psi'(r+\tau) \{ 2|w_\varepsilon(x,\tau)|^2 + b(x,\tau) |w_\varepsilon(x,\tau)|^p |w(x,\tau)| \} dx d\tau \\ + \frac{k+1}{k} \|w(0)\|_{E_\Psi}^2 \quad (0 \leq t < \infty)$$

証明の概略

$\{\varphi(r+t)w(x,t)\}_t$ を (1.1) の両辺にかけ、計算すると次を得る。

$$(2.2) \quad X_t + \nabla \cdot Y + Z = 0$$

$$X = \frac{1}{2} \varphi \{w_t^2 + |\nabla w|^2 + \lambda w^2\} - \frac{1}{2} \varphi'' w^2 + \varphi' w_t w$$

$$Y = -\varphi \nabla w w_t - \varphi' \nabla w w + \frac{\lambda}{2r} \varphi'' w^2$$

$$Z = \varphi b(x,t) |w_t|^{p+1} + \varphi' b(x,t) |w_t|^{p-1} w_t w \\ + \frac{1}{2} \varphi' \{|\nabla w|^2 - 3w_t^2 + 2w_t \nabla w\} + \frac{1}{2} \left\{ \lambda \varphi' - \frac{N-1}{r} \varphi'' \right\} w^2$$

また、 φ の a を十分大きく取れば、定数 $k > 1$ が存在して

$$(2.3) \quad k^2 \varphi'(s)^2 \leq \lambda \varphi(s) - \varphi(s) \varphi''(s)$$

が成り立つ。これより

$$|\varphi' w_t w| \leq \frac{1}{2k} \varphi \{w_t^2 + \lambda w^2\} - \frac{1}{2k} \varphi'' w^2$$

を得る。また、 $\varphi'(s) > 0$ 、 $\varphi''(s) \leq 0$ に注意すれば (2.2)

を $[0, T] \times B(R)$ ($B(R) = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| < R\}$) 上で積分し、

$R \rightarrow \infty$ とすれば (2.1) を得る。 ▮

そこで、定数 $M_1 > 0$ 、 $M_2 > 0$ が存在して

$$(2.4) \quad \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} 2\varphi' w_t^2 dx d\tau \leq M_1 \left(\int_0^t \int \varphi b(x,\tau) |w_t|^{p+1} dx d\tau \right)^{\frac{2}{p+1}}$$

$$(2.5) \quad \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \varphi' b(x,\tau) |w_t|^p |w| dx d\tau \leq M_2 \left(\int_0^t \int \varphi b(x,\tau) |w_t|^{p+1} dx d\tau \right)^{\frac{p}{p+1}}$$

を示すことができれば、この補題より定理3が証明できる。
 そこで、ここでは定理3 (i)の証明の一部である(2.4)を
 示す。(2.5)についても同様に示すことができる。詳細は
 Mochizuki-Motai [8] を参照してほしい。

(2.4) の証明

ヘルダーの不等式により

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \varphi' w_\varepsilon^2 dx d\tau \leq \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \varphi b(x, \tau) |w_\varepsilon|^{p+1} dx d\tau \right)^{\frac{2}{p+1}} \\ \times \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} (\varphi b)^{-\frac{2}{p-1}} (\varphi')^{\frac{p+1}{p-1}} dx d\tau \right)^{\frac{p-1}{p+1}}$$

を得る。そこで右辺の第2項を1とおけば、 $M_1 < \infty$
 を示せば(2.4)を証明できたことになる。(1.6)と(1.4)によ
 り

$$(\varphi b)^{-\frac{2}{p-1}} (\varphi')^{\frac{p+1}{p-1}} \leq C \{ \log(a+r+t) \}^{\mu - \frac{p+1}{p-1}} (a+r+t)^{-1 - \frac{2(1-d)}{p-1}}$$

となる。そこで(1.6)と(1.7)に注意すれば

$$-\frac{2(1-d)}{p-1} \leq -N, \quad \mu - \frac{p+1}{p-1} < -1$$

なので

$$M_1 \leq C \int_0^\infty \{ \log(a+\tau) \}^{\mu - \frac{p+1}{p-1}} d\tau \int_0^\infty (a+r+\tau)^{-2} dr \\ \leq C \int_0^\infty \{ \log(a+\tau) \}^{\mu - \frac{p+1}{p-1}} (a+\tau)^{-1} d\tau < \infty$$

となり、(2.4)が示せた。□

参考文献

- [1] S. Klainerman, *Comm. Pure Appl. Math.*, 40 (1987), 111-116.
- [2] J.L. Lions, W.A. Strauss, *Bull. Soc. Math. France*, 93 (1965), 43-96.
- [3] A. Matsumura, *Proc. Japan Acad.*, 53 (1977), 232-236.
- [4] K. Mochizuki, *Lecture Notes in Physics* 39, Springer (1975), 486-490.
- [5] _____, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 12 (1976), 383-390.
- [6] _____, 波動方程式の散乱理論, 紀伊國屋書店 (1984).
- [7] K. Mochizuk, T. Motai, 数理解析研究所講究録 795 (1992), 122-152.
- [8] _____, *Tokyo Metropolitan University Mathematics Preprint Series* 16 (1993).
- [9] _____, In preparation.
- [10] T. Motai, *Tsukuba J. Math.*, 15 (1991), 151-160.
- [11] M. Nakao, *Funkcialaj Ekvacioj*, 26 (1983), 237-250.
- [12] W.A. Strauss, The Energy Method in Nonlinear Partial Differential Equations, Brasil Inst. Math. Pure e Aplicada. 1969.