数理解析研究所講究録
第 873 巻 1994 年 133-139

Resolvent convergence of the Schrödinger operator with a penetrable wall interaction

摂南大学　池部晃生　(Teruo Ikebe)
福井高専　島田伸一　(Shin-ichi Shimada)

1 序

形式的に次のように表されるシュレディンガー作用素を考える。

(1.1) $H_\mu = -\Delta + \mu q(x)\delta(|x|-a) \quad in \quad L_2(\mathbf{R}^3)$

ここで $q(x)$ は球面 $S_a := \{x; |x| = a\} (a > 0)$ 上で正の値をとる滑らかな関数、δは 1 次元ディラックのデルタ関数、μは実パラメータである。これは、空間に面密度$\mu q(x)$ の原点中心、半径 a の球面 があるとき、一粒子の量子力学的運動を記述する ([1]) 。H_μを自己共役作用素として確定するために次の 2 次形式を考える。

(1.2) $h_\mu[u,v] = (\nabla u, \nabla v) + \mu < q\gamma u, \gamma v >,$

$Dom[h_\mu] = H^1(\mathbf{R}^3) \quad$ (form domain),

ここで、$H^m(G)$ はソボレフ空間、$(\ ,\ )$ は $L_2(\mathbf{R}^3)$ での内積、$<,>$ は $L_2(S_a)$ での内積、γは $H^{s+1/2}(\mathbf{R}^3)$ から $H^s(S_a) \quad (s > 0)$ へのトレース作用素である。h_μは下に有界な閉形式であることが確かめられるので、h_μ に対して一意的な自己共役作用素が対応する。我々は以後この作用素を H_μとして取り扱う。H_μは次のような境界条件を持った$-\Delta$ であることが分かる。

(1.3) $Dom(H_\mu) = \{u \in H^1(\mathbf{R}^3) \cap H^2(\mathbf{R}^3 \setminus S_a);$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_+ - \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_- = \mu q \gamma u \quad in \quad L_2(S_a)\},$$

$$H_\mu = -\Delta \qquad on \quad \mathbf{R}^3 \setminus S_a.$$

ここで、$\frac{\partial}{\partial r}$は動径方向の微分、$v_+(v_-)$ は v について S_a の外側（内側）からのトレースを表す (Ikebe-Shimada[3,§1]) 。

我々は$\mu \to \pm\infty$ としたとき H_μ はどのような作用素に収束するか調べたい。(1.3) からH_μは次で定義される自己共役作用素 H_∞に収束することが期待できる。

(1.4) $Dom(H_\infty) = \{u \in H^1(\mathbf{R}^3) \cap H^2(\mathbf{R}^3 \setminus S_a); \gamma u = 0 \quad in \quad L_2(S_a)\}$,

$$H_\infty = -\Delta \qquad on \quad \mathbf{R}^3 \setminus S_a.$$

$\mu \uparrow +\infty$ のときは、(1.2) より h_μは正定値単調増加であるので Reed-Simon[8] の Theorem S.14 を用いて H_μは H_∞に強リゾルベント収束することは容易に分かる。さらに次が示せる。

Theorem 1 $\mu \uparrow +\infty$ とき H_μは H_∞にノルムリゾルベント収束する。

$\mu \downarrow -\infty$ のときの結果を述べるために次の積分作用素を導入しよう。

(1.5) $$\big(A(\kappa)u\big)(x) := \int_{S_a} \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|} u(y) dS_y \qquad (x \in S_a),$$

(1.6) $$\big(B(\kappa)u\big)(x) := \int_{S_a} \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|} u(y) dS_y \qquad (x \in \mathbf{R}^3).$$

$A(\kappa)$ は $L_2(S_a)$ 上のコンパクト作用素であり、$B(\kappa)$ は $Im\kappa > 0$ のとき $L_2(S_a)$ から $H^1(\mathbf{R}^3)$ への有界作用素となる (I-S[3,§2]) 。また、

(1.7) $\gamma B(\kappa) = A(\kappa) \qquad if \quad Im\kappa > 0.$

である。$\mu \downarrow -\infty$ の場合の我々の結果は

Theorem 2 ある $c > 0$ に対して、$\mu_k \to -\infty \quad (k \to \infty)$ かつ $\|(\mu_k{}^{-1} + \sqrt{q}A(ic)\sqrt{q})^{-1}\| = O(\mu_k{}^2)$ となるような実数列 $\{\mu_k\}$が存在するならば、その$\{\mu_k\}$について、H_{μ_k}は H_∞にノルムリゾルベント収束する。

Theorem 3 ある $c > 0$ に対して、$\mu_k \to -\infty \quad (k \to \infty)$ かつ $\|(\mu_k{}^{-1} + \sqrt{q}A(ic)\sqrt{q})^{-1}\| = O(\mu_k{}^3)$ となるような実数列$\{\mu_k\}$が存在するならば、その$\{\mu_k\}$ について、H_{μ_k} は H_∞ に強リゾルベント収束する。

注意.

(1) $\mu \uparrow +\infty$ のときは $\|(\mu^{-1} + \sqrt{q}A(ic)\sqrt{q})^{-1}\| = O(\mu) \quad (c \geq 0)$ である。

(2) $q(x)$ =定数、のときどんな$\kappa \in \mathbf{C}$ に対しても、$\mu_k \to -\infty \quad (k \to \infty)$ かつ $\|(\mu_k{}^{-1} + \sqrt{q}A(\kappa)\sqrt{q})^{-1}\| = O(\mu_k)$ となるような実数列 $\{\mu_k\}$ は存在しない。

(3) $q(x)$ =定数、のとき任意の$\kappa \in \mathbf{C}$ に対して、$\mu_k \to -\infty \quad (k \to \infty)$ かつ $\|(\mu_k{}^{-1} + \sqrt{q}A(\kappa)\sqrt{q})^{-1}\| = O(\mu_k{}^2)$ となるような実数列$\{\mu_k\}$が存在する。

(4) 十分小さい $c > 0$ に対して$\mu_k \to -\infty \quad (k \to \infty)$ かつ $\|(\mu_k{}^{-1} + \sqrt{q}A(ic)\sqrt{q})^{-1}\| = O(\mu_k{}^3)$ となるような実数列$\{\mu_k\}$は存在する。

(1) は$\sqrt{q}A(ic)\sqrt{q}$が正値作用素であることから分かる。(3),(4) については§4 を見られたい。

μ が動くとき H_μ の固有値、レゾナンスがどのように動くかについては、$q(x)$ が定数のとき [1] に議論されている。それによると変数分離して各角運動量 l の部分空間に制限したそれぞれの作用素の固有値は、$\mu \downarrow -\infty$ のとき$-\infty$ に逃げていき、レゾナンスは H_∞ の正の固有値に近づいていく。しかしこのことは H_μ の固有値がすべて$-\infty$ にいくことを意味しない。任意の $k > 0$ に対して、$-k^2$ がすべての H_{μ_j}の固有値であり、$\mu_j \to -\infty$ かつ H_{μ_j}が H_∞に強リゾルベント収束する実数列$\{\mu_j\}$を見つけることができる。H_∞のレゾナンスについては [7] で議論されている。本小論で述べた補題、定理等の詳しい証明については [4] を参照されたい。

2 証明の準備

$Y_l^m(\omega)$ $(l=0,1,2,\cdots;m=-l,-l+1,\cdots,l)$ を $L_2(S_1)$ の正規直交基底をなす球面調和関数とする。$L_2(S_a)$ の内積では

(2.1) $< Y_l^m, Y_{l'}^{m'} >= a^2\delta_{ll'}\delta_{mm'}.$

である。このとき$\kappa \in \mathbf{C}$ に対して

(2.2) $A(\kappa)Y_l^m = \lambda_l(\kappa)Y_l^m,$

(2.3) $\lambda_l(\kappa) = ia^2\kappa j_l(a\kappa)h_l^{(1)}(a\kappa),$

がわかる ([9]) 。ここで $j_l, h_l^{(1)}$はそれぞれ球 Bessel 関数、第 1 種球 Hankel 関数を表す。$j_l, h_l^{(1)}$は初等関数で表せるから直接計算して

(2.4) $\lambda_l(ic) > 0 \quad if \quad c \geq 0.$

(2.5) $\lambda_l(\kappa) = \dfrac{a}{2l+1}\Big(1+\dfrac{a^2\kappa^2}{2l^2}+O(l^{-3})\Big) \qquad as \quad l \to +\infty,$

を得る。(2.1),(2.2) から

(2.6) $A(ic) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\lambda_l(ic) < \cdot, \dfrac{1}{a}Y_l^m > \dfrac{1}{a}Y_l^m$

が分かる。(2.4)-(2.6) と $C^\infty(S_a), H^s(S_a)$ の特徴付け:

$$(*) \quad u = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} u_{lm}Y_l^m \in C^\infty(S_a) \Longleftrightarrow$$

$$\sum_{m=-l}^{l}|u_{lm}|^2 = O(l^{-N}) \quad as \quad l \to \infty \quad \text{for each fixed N ([11,p.70]).}$$

$$(**) H^s(S_a) = \Big\{u = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} u_{lm}Y_l^m; \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(l^2+l+1)^s|u_{lm}|^2 < +\infty\Big\},$$

$$\|u\|^2_{H^s(S_a)} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(l^2+l+1)^s a^2|u_{lm}|^2 \quad ([5],[10])$$

より次を得る。

Lemma 1 $c \geq 0$ とする。このとき、

(2.7) $A^t(ic)\Big(C^\infty(S_a)\Big) = C^\infty(S_a) \quad for \quad t \in \mathbf{R},$

(2.8) $A^t(ic)A^{t'}(ic) = A^{t+t'}(ic) \quad on \quad C^\infty(S_a) \quad for \quad t,t' \in \mathbf{R},$

(2.9) $A^t(ic) \in \mathbf{B}(H^s(S_a), H^{s+t}(S_a)) \quad for \quad t,s \in \mathbf{R},$

$B(\kappa)$ については球面上のフーリエ変換 ([6]) の性質を利用して

Lemma 2 $s>0, Im\kappa>0$ とする。このとき

$B(\kappa) \in \mathbf{B}(H^{-s}(S_a), H^{3/2-s}(\mathbf{R}^3))$

3 定理の証明の方針

Theorem3 の証明の概略を与えよう。 $R_\mu(z) := (H_\mu - z)^{-1}, R_\infty(z) := (H_\infty - z)^{-1}, R_0(z) := (H_0 - z)^{-1}$ とおく。ある $c > 0$ に対して、$\mu_k \to -\infty \quad (k \to \infty)$ かつ $\|({\mu_k}^{-1} + \sqrt{q}A(ic)\sqrt{q})^{-1}\| = O({\mu_k}^3)$ となるような $c > 0$ と実数列 $\{\mu_k\}$ を固定する。

(step 1)

(3.1) $R_\infty(-c^2) = R_0(-c^2) - B(ic)A^{-1}(ic)\gamma R_0(-c^2).$

を示す。これは実は Theorem 1 の証明の過程で得られる。Reed-Simon の Theorem S.14 から $\mu \uparrow +\infty$ のときは $R_\mu(z)$ は $R_\infty(z)$ に強収束することは分かっているからある作用素にノルム収束することがいえればよい。それを示すには steps 2,4 と似たことをする。

(step 2)

リゾルベント方程式

(3.2) $R_\mu(z) = R_0(z) - \mu B(\sqrt{z})q\gamma R_\mu(z)$

(I-S[3,Theorem 3.2]) と (1.7) から

(3.3) $R_\mu(z) = R_0(z)$

$$-B(\sqrt{z})\sqrt{q}(\mu^{-1} + \sqrt{q}A(\sqrt{z})\sqrt{q})^{-1}\sqrt{q}\gamma R_0(z).$$

が得られる。そこで (3.3) に $A_1(ic) := \sqrt{q}A(ic)\sqrt{q} \quad for \quad c \geq 0$ についてのリゾルベント方程式

(3.4) $(\mu^{-1} + A_1(ic))^{-1} = A_1^{-1}(ic) - \mu^{-1}(\mu^{-1} + A_1(ic))^{-1}A_1^{-1}(ic) \quad on \qquad C^\infty(S_a).$

を繰り返し代入して

(3.5) $R_{\mu_k}(-c^2) = R_0(-c^2) - B(ic)A^{-1}(ic)\gamma R_0(-c^2)$

$$+{\mu_k}^{-1}B(ic)\sqrt{q}A_1^{-2}(ic)\sqrt{q}\gamma R_0(-c^2) - {\mu_k}^{-2}B(ic)\sqrt{q}A_1^{-3}(ic)\sqrt{q}\gamma R_0(-c^2)$$

$$+{\mu_k}^{-1}B(ic)\sqrt{q}A_1^{-3/2}(ic){\mu_k}^{-2}({\mu_k}^{-1} + A_1(ic))^{-1}A_1^{-3/2}(ic)\sqrt{q}\gamma R_0(-c^2).$$

(3.5) の右辺の各作用素は "$q \in \mathbf{B}(H^s(S_a)) \quad if \quad q \in C^\infty(S_a)$" に注意して Lemmas 1,2 を用いると有界作用素であることが次から分かる。

$$BA^{-1}\gamma R_0 : L_2(\mathbf{R}^3) \xrightarrow{R_0} H^2(\mathbf{R}^3) \xrightarrow{\gamma} H^{3/2}(S_a) \xrightarrow{A^{-1}}$$

$$H^{1/2}(S_a) \hookrightarrow H^{-1/2}(S_a) \xrightarrow{B} H^1(\mathbf{R}^3),$$

$$B\sqrt{q}A_1^{-2}\sqrt{q}\gamma R_0 : L_2(\mathbf{R}^3) \xrightarrow{\gamma R_0} H^{3/2}(S_a) \xrightarrow{\sqrt{q}}$$

$$H^{3/2}(S_a) \xrightarrow{A_1^{-2}} H^{-1/2}(S_a) \xrightarrow{\sqrt{q}} H^{-1/2}(S_a) \xrightarrow{B} H^1(\mathbf{R}^3),$$

$$B\sqrt{q}A_1^{-1/2}\mu^{-1}(\mu^{-1}+A_1)^{-1}A_1^{-3/2}\sqrt{q}\gamma R_0 : L_2(\mathbf{R}^3) \xrightarrow{\sqrt{q}\gamma R_0} H^{3/2}(S_a) \xrightarrow{A_1^{-3/2}}$$

$$L_2(S_a) \xrightarrow{\mu^{-1}(\mu^{-1}+A_1)^{-1}} L_2(S_a) \xrightarrow{A_1^{-1/2}} H^{-1/2}(S_a) \xrightarrow{B} H^1(\mathbf{R}^3),$$

$$B\sqrt{q}A_1^{-3}\sqrt{q}\gamma R_0 : L_2(\mathbf{R}^3) \xrightarrow{\sqrt{q}\gamma R_0} H^{3/2}(S_a) \xrightarrow{A_1^{-3}}$$

$$H^{-3/2}(S_a) \xrightarrow{\sqrt{q}} H^{-3/2}(S_a) \xrightarrow{B} H^0(\mathbf{R}^3) = L_2(\mathbf{R}^3),$$

$$B\sqrt{q}A_1^{-3/2}({\mu_k}^{-1}+A_1)^{-1}A_1^{-3/2}\sqrt{q}\gamma R_0 : L_2(\mathbf{R}^3) \xrightarrow{\sqrt{q}\gamma R_0} H^{3/2}(S_a) \xrightarrow{A_1^{-3/2}}$$

$$L_2(S_a) \xrightarrow{({\mu_k}^{-1}+A_1)^{-1}} L_2(S_a) \xrightarrow{\sqrt{q}A_1^{-3/2}} H^{-3/2}(S_a) \xrightarrow{B} L_2(\mathbf{R}^3).$$

(setp 3)
$B\sqrt{q}A_1^{-3/2}\mu_k^{-3}(\mu_k^{-1}+A_1)^{-1}A_1^{-3/2}\sqrt{q}\gamma R_0$ が S(Schwartz 空間) 上で 0 に強収束することを示す。実際、$f \in S$ に対して Lemma 1 より $u := A_1^{-4}\sqrt{q}\gamma R_0 f \in C^\infty(S_a)$ だから ${\mu_k}^{-3}(\mu_k+A_1)^{-1}$ はμ_kについて有界であることに注意すれば (3.4) を用いて

$$B\sqrt{q}A_1^{-3/2}{\mu_k}^{-3}({\mu_k}^{-1}+A_1)^{-1}A_1^{-3/2}\sqrt{q}\gamma R_0 f$$

$$= {\mu_k}^{-3}B\sqrt{q}u - {\mu_k}^{-1}B\sqrt{q}{\mu_k}^{-3}({\mu_k}^{-1}+A_1)^{-1}u$$

$$\longrightarrow 0 \quad as \quad \mu_k \to -\infty.$$

が得られる。以上までで、$R_{\mu_k}(-c^2)$ が $R_\infty(-c^2)$ に強収束することがいえた。
(step 4)
$Imz \neq 0$ に対して強収束することをいう。このためには次の等式に注意すればよい。

$$R_\mu(z) - R_\infty(z) = \{1+(z+c^2)R_\mu(z)\}\{R_\mu(-c^2)$$

$$-R_\infty(-c^2)\}\{1+(z+c^2)R_\infty(z)\}$$

以上で証明が完了した。

4 実数列の取り方

§1 の定理の後の注意で述べたように、$q(x) = V_0$定数 >0 、のとき任意の$\kappa \in \mathbf{C}$ に対して、$\mu_k \to -\infty \quad (k \to \infty)$ かつ $\|({\mu_k}^{-1}+\sqrt{q}A(\kappa)\sqrt{q})^{-1}\| = O({\mu_k}^2)$ となるような実数列 $\{\mu_k\}$ が存在することを示そう。(2.6) より

(4.1) $\|(\mu^{-1}+\sqrt{V_0}A(\kappa)\sqrt{V_0})^{-1}\| = \sup_{l\geq 0}|\mu^{-1}+V_0\lambda_l(\kappa)|^{-1}.$

である。(2.5) より

$$(4.2)\quad V_0(Re\,\lambda_l(\kappa)) \sim \frac{V_0 a}{2} l^{-1} \quad as \quad l \to \infty$$

が分かる。$I_k = (\frac{1}{2k}, \frac{1}{k}]$ とおく。(4.2) より kが十分大のとき、I_kに入る $V_0(Re\,\lambda_l)$ の個数は高々$O(k)$ 個であることが分かる。一方、I_kの長さは$\frac{1}{2}k^{-1}$。そこで、部分区間 $J_k(\subset I_k)$ を $V_0(Re\,\lambda_l)$ を含まない長さが最大のものを取ると、その長さは $O(k^{-2})$ である。よって、$-\mu_k^{-1}$を J_kの中点に取れば、(4.1) と$-\mu_k^{-1} \sim k$より

$$\|(\mu_k{}^{-1} + \sqrt{V_0}A(\kappa)\sqrt{V_0})^{-1}\| = O(k^2) = O(\mu_k^2)$$

が得られる。一般の $q(x)$ について、十分小さい $c > 0$ に対して$\mu_k \to -\infty \quad (k \to \infty)$ かつ $\|(\mu_k{}^{-1} + \sqrt{q}A(ic)\sqrt{q})^{-1}\| = O(\mu_k{}^3)$ となるような実数列$\{\mu_k\}$が存在することを示そう。(2.2),(2.4) より$\sqrt{q}A(ic)\sqrt{q}$は正値自己共役作用素だからある CONS$\{\varphi_j\}$ があって

$$\sqrt{q}A(ic)\sqrt{q} = \sum_{j=1}^{\infty} s_j < \cdot, \varphi_j > \varphi_j \quad (s_j > 0)$$

と書ける。これより

$$\|(\mu^{-1} + \sqrt{q}A(ic)\sqrt{q})^{-1}\| = \sup_{j\geq 1} |\mu^{-1} + s_j|^{-1}.$$

が得られる。s-number の評価 [2,p.27] より

$$s_j \sim j^{-1/2} \quad as \quad j \to \infty$$

が得られる (c が小という条件はそのとき$\lambda_l(ic)$ が lについて単調減少になり s_jと容易に関係がつけられることにもちいる)。これは $q(x)$ が定数のときは各λ_lは $2l+1$ 重に縮退していたが一般のときはすべての縮退が解ける可能性があるからである。後の議論は上と同じである。I_kに入る s_jの個数が高々$O(k^2)$ 個になることに注意すればよい。

References

[1] J.P.Antoine, F.Gesztesy and J.Shabani, Exactly solvable models of sphere interactions in quantum mechanics, J. Phys. A: Math. Gen., 20 (1987), 3687–3712.

[2] I.C.Gokhberg and M.G.Krein, Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators in Hilbert space, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1969.

[3] T.Ikebe and S.Shimada, Spectral and scattering theory for the Schrödinger operators with penetrable wall potentials, J. Math. Kyoto Univ. 31 (1991) 219–258.

[4] ____,Resolvent convergence of the Schrödinger operator with a penetrable wall interaction,preprint.

[5] J.L.Lions and E.Magenes, Non-Homogeneous boundary value problems and applications, Springer, 1972.

[6] K.Mochizuki, Scattering theory for wave equations, Kinokuniya, 1984 (in Japanese).

[7] H.N.Nussenzveig, High-frequency scattering by an impenetrable sphere, Ann. Phys. 34 (1965), 23–95.

[8] M.Reed and B.Simon, Method of modern mathematical physics I: Functional analysis, Academic Press, New York, 1972.

[9] S.Shimada, Low energy scattering with a penetrable wall interaction, to appear in J. Math. Kyoto Univ.

[10] N.Shimakura, Partial differential operators of elliptic type, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1992.

[11] E.M.Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.