数理解析研究所講究録
874巻 1994年 120-132

Markov Semigroups on UHF C^*-algebras

松井 卓 (Taku Matsui)
東京都立大学

§1 平衡状態の統計力学が数学的に厳密な形で研究されるようになり約30年が過ぎている。この間，古典統計力学，特にイジング模型等のFerromagnetic系では多くの結果が得られているが，量子系に関して相対的にまだ未知の部分が大きいと言える。

これまで量子系を取り扱うには，ハミルトニアンが何らかの意味で（ペロン・フロベニウスの定理での）正値性を仮定し古典的なマルコフ過程又はイジング・スピン系の問題に持ち込んで考えてきた。しかしながら物理的に見て興味深い模型（ハバード模型等）は，この今までの方法が適用しにくい。実際ハバード模型の場合"古典な基底状態"は無限に縮退していてPirogov-Sinai理論を適用して低温での相転移を研究するのは困難な作業となる。

一方，量子系でのGlauber dynamics (= Stochastic Ising模型)の研究もきわめて原始的な状態である。70年代から80年代の前半にかけて，ほとんど自由粒子系に対応する場合

だけが研究されたが，ギッブス状態・基底状態が不変状態となる量子系での Glauber dynamics については何も考察されなかった。

量子系の研究がこのように未発達なのは，一つには，ギッブス状態は量子系では局所マルコフ性をもたないためである。古典的な確率論の意味でマルコフ性を量子スピン系のギッブス状態に仮定するとハミルトニアンは非常に限られたタイプになり都合が悪い。
（ [Accardi - Frigerio] ）
しかしながら基底状態に関してはこの注意はあてはまらない。例えば Affleck Kennedy Lieb Tasaki によって解かれた反強磁性模型はある種のマルコフ性を持つ。（ [A-K-L-T] ， [F-N-W] ）
彼らの Valence bond state は構成の仕方より古典的なマルコフ測度の非可換版と見ることが出来るので（ [F-N-W] ）本質的に非可換な系での非可換確率論の重要な対象であると考えられる。
従って非可換な系でのマルコフ過程の性質を研究するのは単なる少数の数学者の趣味的な興味以上に数理物理学の上でも応用が期待される。

以下では Glauber dynamics のような無限粒子系の研究([Liggett])でのいくつかな初等的な部分は容易に量子スピン系でも行なえることを示す。特別な量子スピン系の基底状態では，この方法は古典的な場合と同様の結果を与える。

§2 非可換確率論はコンパクト空間 X 上の連続関数 $C(X)$ を C^*-代数に置き換えるところから出発する。以下では C^*-代数としては正方格子 Z^d (d：次元)上のパウリ・スピン代数のなす $A = \overline{\bigotimes_{Z^d} M_2(\mathbb{C})}^{C^*}$ を考える。($M_2(\mathbb{C})$；2×2 行列環，—C^* は C^*-代数としての完備化 Z^d は無限テンソル積の各成分は Z^d の点 $j \in Z^d$ $j=(j_1, j_2 \cdots j_d)$ で表示されているとする。)

$\sigma_x^{(j)}$ $\sigma_y^{(j)}$ $\sigma_z^{(j)}$ を j 上のパウリスピン行列とする。

$$\sigma_\alpha^{(j)} = \cdots \otimes 1 \otimes 1 \otimes \cdots 1 \otimes \sigma_\alpha \otimes 1 \cdots$$

$$\left(\quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \right)$$

量子系でのマルコフ過程は次のように考えられる。古典的なマルコフ過程と正値性を保つ $C(X)$ 上の半群と

対応関係がある。そこで非可換 C^*-代数上では
マルコフ過程のかわりにマルコフ半群を考えることにする。

<u>定義1</u> S_t が 1をもつ C^*-代数上のマルコフ半群
であるとは S_t が 1を保存する正値写像のなす
半群であること。

以下では Glauber dynamics (Stochastic Ising model) の
アナロジーとして次のタイプのマルコフ半群を考える。
最初に生成作用素 L としては並進不変な次の場合
を考える。

$$L(Q) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} L_k(Q) \tag{1}$$

$$L_k(Q) = \tau_k L_0 \tau_{-k}(Q)$$

ただし τ_k は $A = \overline{\bigotimes_{\mathbf{Z}^d} M_2(\mathbb{C})}^{C^*}$ 上のシフト

$$\tau_k(\sigma_\alpha^{(j)}) = \sigma_\alpha^{(j+k)} \qquad j, k \in \mathbf{Z}^d \quad \alpha = x, y, z$$

とする。
さらに

$$L_0(Q) = E_0(Q) - \frac{1}{2}(E_0(\mathbb{1})Q + QE_0(\mathbb{1})) \tag{2}$$

E_0 は A から A への（完全）正値写像とする。

もし C^*-代数 A が有限次元で S_t が完全正値（つまり S_t を $A \otimes M_n(\mathbb{C})$ へ $S_t \otimes (\mathrm{identity})$ と拡張しても正値となる）なるマルコフ半群の生成子は上述の形となる。

(1) (2) のような形の L がマルコフ半群を生成する十分条件を考える。［Liggett］にある方法を今の非可換系になおすと容易に次の形の結果を得る。

初めに記号を導入する。

$\mathbb{Z}^d$ の有限集合 $A\ (\subset \mathbb{Z}^d)$ に対して

$$\sigma_\alpha(A) = \prod_{A \ni j} \sigma_\alpha^{(j)} \qquad (\alpha = x, y, z) \text{。} \tag{3}$$

$$\delta_{(\alpha j)}(Q) = \frac{1}{2}\left(\sigma_\alpha^{(j)} Q \sigma_\alpha^{(j)} - Q\right) \qquad \begin{pmatrix} \alpha = x, y, z \\ j \in \mathbb{Z}^d \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$Q \in A.$$

さらに

$$|||\, Q \,||| = \sum_{\substack{\alpha = x, y, z \\ j \in \mathbb{Z}^d}} \| \delta_{(\alpha j)}(Q) \| \tag{5}$$

$$C^1(A) = \{ Q \in A \mid |||\, Q \,||| < \infty \}. \tag{6}$$

又 (2) の (完全)正値写像 E_0 は 次の形とする。

$$E_0(Q) = \sum_{\ell} a(\ell)^* \, Q \, a(\ell) \qquad (7)$$

ただし

$$a(\ell) = \sum_{\substack{A \subset \mathbb{Z}^d \\ B \subset \mathbb{Z}^d}} C_{AB}^{(\ell)} \, \sigma_x(A) \, \sigma_z(B)$$

ここで $C_{AB}^{(\ell)}$ は ($\mathbb{Z}^d$ の有限集合 A, B による) 定数で

$$\sum_{\ell} \left(\sum_{A,B} |C_{AB}^{(\ell)}| \, |A \cup B|^2 \right) < \infty \qquad (8)$$

をみたすとする。

<u>命題 1.</u> (8) が成立するとする。この時 L は $C^1(A)$ 上で定義され $\overline{L}$ (L の閉包) はマルコフ半群の生成作用素となる。この半群を S_t と置くと S_t は $C^1(A)$ を不変にして

$$|||S_t(Q)||| \le 2e^{Mt} |||Q||| \qquad Q \in C^1(A) \qquad (9)$$

が成立する。(ここで M は Q によらない定数)

(c.f. [M-1])

次に S_t のエルゴード性について述べる。

<u>定義2</u> マルコフ半群 S_t がエルゴード的であるとは S_t の不変状態が一意であること とする。

エルゴード性について精密な判定条件は知られていない。勿論 エルゴード性(不変状態が複数ある)ものはいくらでも作れる。ここで問題にするのは 格子が有限集合の時(有限自由度の量子系の時)エルゴード性が成立し 無限系を考えるとある種の相転移とともにエルゴード性が破れる場合である。

(2)の E_0 が単位元を保存する時 ($E_0(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$) 及びその摂動を加えた時には 古典的な場合と同じく量子系でも エルゴード性の十分条件は得られる。つまり命題1で $M'>0$ があり

$$|||S_t(Q)||| \leq 2e^{-M't} |||Q||| \tag{10}$$

が示され 不変状態の一意性が証明できる。

詳しくは [Liggett] と [M-1] を参照

§3　§2で与えられたマルコフ半群の不変状態としてはどのようなものが現われるか。又物理的に興味深い状態が与えられた時その状態に収束するようなマルコフ半群は構成できるかについて考えてみる。

ここで単に不変になるだけでなく，"詳細つり合いの条件"（detailed balance condition）が成立する場合を考えてみる。（数学的な文献では reversible とも呼ばれている。）

<u>定義3</u>　状態 φ がマルコフ半群 S_t に対し

$$\varphi(Q_1\ S_t(Q_2)) = \varphi(S_t(Q_1)\ Q_2) \qquad (11)$$

$$(\forall Q_1\ Q_2 \in A \qquad \forall t > 0)$$

をみたす時 φ を reversible state と呼ぶ。

もし φ が次のハミルトニアン

$$H = \sum_{k \in Z^d} d_k^* d_k$$

に対し

$$\varphi(d_k^* d_k) = 0 \qquad (\forall k \in Z^d) \qquad (12)$$

をみたすとする。 これはエネルギーを最小にすることを意味するので φ は H の基底状態であると言って良い。 この時

$$L_k(Q) = d_k^* Q d_k - \frac{1}{2}(d_k^* d_k Q + Q d_k^* d_k)$$

$$L(Q) = \sum_k L_k(Q)$$

とすると もし L が マルコフ半群を生成するならば φ は reversible state となる。

このようなタイプの基底状態は現在多く知られている。§1 の Valence bond state や [M-2] の基底状態は全てこの種のタイプである。 [M-2]で考えた基底状態については次のような結果が成立する。

$\{J_A \quad A \subset Z^d\}$ をイジングスピン系の interaction とする。つまりハミルトニアンは

$$h = \sum J_A \sigma_z(A)$$

ここで $\sigma_z(A)$ は $\{1,-1\}^{Z^d}$ 上の関数と自然に同一視する。

簡単のため interaction は finite range ($J_A = 0$ if diameter of $A > r$) 並進不変 とする。

測度 μ は ($\{1,-1\}^{Z^d}$ 上の) ギッブス測度 であるとは

$$\frac{d\mu(\sigma_k)}{d\mu(\sigma)} = \exp\left(2 \sum_{k\in A} J_A\, \sigma_z(A)\right) \qquad (13)$$

ただし 左辺は $k=(k_1 \cdots k_d)$ でのスピンの ($1 \rightleftarrows -1$) flip に関する Radon-Nikodym 微分である。

$$H = \sum d_k^* d_k$$

$$d_k = 1 - \exp\left(-\sum_{k\in A} J_A\, \sigma_z(A)\right) \sigma_x^{(k)} \qquad (14)$$

とする。

<u>命題2</u> $\varphi(d_k^* d_k) = 0 \quad {}^\forall k \in Z^d$ は 次と同値

◎ ある ギッブス測度 μ があり

$$\varphi(\sigma_x(A)\sigma_z(B)) = \mu\left(\sigma_z(B) \exp\left[\sum_{|A\cap C|:odd} J_C\, \sigma_z(C)\right]\right) \qquad (15)$$

任意のギッブス測度 μ に対し (15) で定まる State は (14) の

基底状態となる。

命題3　$E_k(Q) = d_k^* Q d_k + d_k^* \sigma_z^{(k)} Q \sigma_z^{(k)} d_k$

$$L(Q) = \sum_k \left(E_k(Q) - \frac{1}{2}\left(E_k(\mathbb{1}) Q + Q E_k(\mathbb{1}) \right) \right)$$

とすると，L の生成するマルコフ半群 S_t については次が同値となる。

(i)　φ は reversible

(ii)　$\varphi(d_k^* d_k) = 0 \quad (\forall k \in \mathbb{Z}^d)$

上の命題により reversible state と基底状態が対応することになる。

このような形で Glauber dynamics の量子系への拡張ができたことになる。

以上は古典スピン系の場合のごく初歩的段階での解析に対応しているが今後この方法をより精密化することで量子系の理解が深まることを期待している。

参考文献

[Accardi - Frigerio] Accardi, L., Frigerio, A. : Markovian Cocycle Proc. R. Ir. Acad. 83 A 251 - 263 (1983)

[A-K-L-T] Affleck, I. ennedy, T. Lieb, E. Tasaki, H. : Valence bond ground states in isotropic quantum antiferromagnets Commun. Math. Phys. 115, 477 - 528 (1988)

[F-N-W] Fannes, Nachtergaele, Werner : Finitely Correlated States on Quantum Spin Chains Commun. Math. Phys. 144, 443 - 490 (1992)

[Liggett] Liggett : Interacting Particle Systems 1985 springer

[M-1] Taku Matsui : Markov semigroups on UHF algebras Rev. Math. Phys. 5, 587 - 600 (1993)

[M-2] 同上 : Gibbs measure as quantum ground states Commun. Math. Phys. 135, 79 - 89 (1990)

その他　量子系の統計力学の数学を扱った本として "Bratteli: Robinson: Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics Springer" があるが，これはある種の"文法書"であり具体例に対しての解析手法は何も教えてくれない。

Quantum Spin を古典系の言葉に書きかえて研究する方法は，古くは1960年代後半(Ginibre ら)にさかのぼる。比較的新しくスマートな方法は次の論文にある。

M. Aizenmann　B. Nachtergaele: Geometric Aspects of Quantum Spin States (preprint)

古典スピン系についての数学的取り扱い方で，新しい本は B. Simon: The Statistical Mechanics of Lattice Gasses (Princeton Univ. Press) がある。(まだ見てないので内容については何も言えない。)