数理解析研究所講究録
875巻 1994年 156-167

Poisson Cohomology

舞鶴工業高専　中西靖忠 (Nobutada Nakanishi)

§1. Poisson manifolds の復習

N を C^∞-manifold とする。$C^\infty(N)$ 上の bracket $\{\ ,\ \}$ が、skew-symmetric で Jacobi 律を満たし、更に Leibniz の等式を満たす時、Poisson bracket という。

$M^k(N)$ を N 上の k-vector fields の空間とすると、$\bigoplus_k M^k(N)$ 上には、いわゆる Schouten bracket が定義される。即ち、

$$[\ ,\ ]:\ M^r(N)\times M^s(N)\longrightarrow M^{r+s-1}(N).$$

特に、単項式については次式で定義される:

$$[u_1\wedge\cdots\wedge u_r,\ v_1\wedge\cdots\wedge v_s]$$
$$=\sum_{i,j}(-1)^{i+j}[u_i,v_j]\wedge u_1\wedge\cdots\wedge\hat{u}_i\wedge\cdots\wedge u_r\wedge v_1\wedge\cdots\wedge\hat{v}_j\wedge\cdots\wedge v_s.$$

$\psi\in M^2(N)$ が Schouten bracket に関して $[\psi,\psi]=0$ をみたす時、ψ を N 上の Poisson structure という。N 上の Poisson bracket に対して、Poisson structure ψ が対応し

$f,\ g \in C^\infty(N)$ に対して，$\{f,\ g\} = \langle \psi \mid df \wedge dg \rangle$ となる。そこで、今後、組 $(N,\ \psi)$ を Poisson manifold と呼ぶことにする。（混乱の恐れが無ければ、単に N と書くこともある。）

ψ と Schouten bracket を用いて次の２つの空間を定義しておこう。

(1) $\mathcal{C} = \{ f \in C^\infty(N) \mid [f,\ \psi] = 0 \}$: Casimir functions の空間。

(2) $\mathcal{L} = \{ X \in \mathfrak{X}(N) \mid [X,\ \psi] = 0 \} = \{ X \in \mathfrak{X}(N) \mid \mathcal{L}(X)\psi = 0 \}$: $(N,\ \psi)$ の無限小変換の空間（＝Lie algebra）.

これから議論の対象となるのは、linear Poisson manifolds で、これは Poisson manifolds の典型例であって極めて興味深い。その定義の概略を述べよう。$\mathfrak{g}$ を有限次元 Lie algebra，$\mathfrak{g}^*$ をその双対空間とする。$\mathfrak{g}$ の基底 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ は自然に“多様体”$\mathfrak{g}^*$ の座標関数と見なされる。$\{C_{ij}^k\}$ を $\mathfrak{g}$ の構造定数とする時，$f,\ g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ に対して，

$$\{f,\ g\} = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} C_{ij}^k\, x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

と定めると，$\{\ ,\ \}$ は $\mathfrak{g}^*$ 上の Poisson bracket を定める。対応する Poisson structure ψ は、$\psi = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} C_{ij}^k\, x_k \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$ で与えられる。組 $(\mathfrak{g}^*,\ \psi)$ を linear Poisson manifold と呼ぶ。

$\mathfrak{g}$をLie algebraとしてもつ連結Lie groupをGとすると、Gは$\mathfrak{g}^*$上にcoadjoint actionを与える。$\mathfrak{g}^* \ni \mu$に対して、$G\cdot\mu = \{ Ad_g^* \mu \mid g \in G \}$をcoadjoint orbitという。Kostant－Kirillovの定理によれば、$G\cdot\mu$はsymplectic manifoldの構造を持ち、$\mathfrak{g}^*$は$G\cdot\mu$達のdisjoint unionとなっている。$G\cdot\mu$を今後symplectic leafと呼ぶ。一般に$G\cdot\mu$の次元は（いつも偶数次元ではあるが）μにdependして変わる。この特異性こそが本研究の興味の対象となる。

§2. Poisson Cohomologyの定義と例

$D : M^k(N) \longrightarrow M^{k+1}(N)$を$D(X) = [\Psi, X]$で定義すると，$[\Psi, \Psi] = 0$より$D\circ D = 0$が従う。よってN上のcohomology群$\mathcal{H}^k(N)$が定義できる。これをPoisson cohomologyと呼ぶ。Nがsymplectic manifoldの場合，$\mathcal{H}^k(N)$はそのde Rham－cohomology群$H^k(N)$と一致する。$\mathcal{H}^k(N)$の具体的な幾何学的意味を記そう。

$\mathcal{H}^0(N) = \{$Casimir functionsの空間$\}$,

$\mathcal{H}^1(N) = \{$Poisson vector fields$\}/\{$Hamiltonian vector fields$\}$,

$\mathcal{H}^2(N) = \{$Poisson structureのinfinitesimal deformations$\}$,

$\mathcal{H}^3(N) = \{$deformation quantizationに対する障害$\}$.

本稿では、$\mathcal{H}^1(N)$をいくつかのNについて計算する。

Nが linear Poisson manifold の場合，$\mathcal{H}^1(N)$を計算することは、解析的には、一階線形連立偏微分方程式の可解性の研究をすることと同等である。

Poisson cohomology $\mathcal{H}^1(N)$の計算例.

例1. $N=\mathbb{R}^3$, $\psi=\partial_x\wedge\partial_y$ とする。

$$\mathcal{Z}^1(N)\ni X=f\partial_x+g\partial_y+h\partial_z$$

$$\Longleftrightarrow \mathcal{L}(X)\psi=0 \quad (\text{i.e. } DX=0)$$

$$\Longleftrightarrow X=-\frac{\partial F}{\partial y}\partial_x+\frac{\partial F}{\partial x}\partial_y+h(z)\partial_z \quad ({}^{\exists}F\in C^\infty(\mathbb{R}^3))$$

$$\mathcal{B}^1(N)\ni Y=-\frac{\partial G}{\partial y}\partial_x+\frac{\partial G}{\partial x}\partial_y \quad ({}^{\exists}G\in C^\infty(\mathbb{R}^3))$$

$$(\text{i.e. } Y=DG=[\psi,G]=Y_G)$$

よって $\mathcal{H}^1(N)=\mathcal{Z}^1(N)/\mathcal{B}^1(N)\cong\{h(z)\partial_z\}$.

例2. $N=S^2\times\mathbb{R}^+\cong\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})^*-\{0\}$

Nは linear Poisson structure を持つ：

$\{x,y\}=z,\ \{y,z\}=x,\ \{z,x\}=y.$

(i.e. $\psi=z\partial_x\wedge\partial_y+x\partial_y\wedge\partial_z+y\partial_z\wedge\partial_x$)

$X=f\partial_x+g\partial_y+h\partial_z$ に対して，$\mathcal{Z}^1(N)\ni X\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} xf+yg+zh=0, \\ f_x+g_y+h_z=0. \end{cases}$$

であることがわかる。(詳細は文献[2]を参照のこと.) これより、Xは各点で symplectic leaf S^2 に接することがわか

る。また、点 (x, y, z) を通る symplectic leaf 上の Kirillov form ω は、

$$\omega = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(z\,dx\wedge dy + x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx)$$

で与えられる。$(x, y, z) \in S^2(r)$ のとき，$(r, 0, 0)$ から出発し、(x, y, z) までの $S^2(r)$ 上の path を γ とし，

$$F(x, y, z) = -\int_\gamma i(X)\omega$$

と定義すると、$S^2(r)$ は単連結だから F は N 上矛盾なく定義された C^∞ function となる。そしてこの F に対して $X = X_F$ を得る。即ち $X \in \mathcal{B}^1(N)$ となって $\mathcal{H}^1(N) = 0$ となる。

以上の例は、いずれも "regular" Poisson manifold における Poisson cohomology の計算である。(但し、例2では、$N = so(3, \mathbb{R})^*$ としてもやはり $\mathcal{H}^1(N) = 0$ を得る。) この方面の研究は、1977年の A. Lichnerowicz の論文から始まったが、最近、Yu. M. Vorobev - M. V. Karasev, I. Vaisman, Ping Xu - A. Weinstein らの研究がある。([3], [4], [5] を参照のこと。) そこで我々の目標は、"singular" Poisson manifold の場合に，その $\mathcal{H}^1(N)$ をおめる第一歩を踏み出すことである。

§3. $N = sl(2, \mathbb{R})^*$ の場合の $\mathcal{H}^1(N)$ の計算

$sl(2, \mathbb{R})^*$ の座標関数 x, y, z を次のように選べる：

$$\{x, y\} = -z, \quad \{y, z\} = x, \quad \{z, x\} = y.$$

従って，$sl(2,\mathbb{R})^*$ 上の linear Poisson structure ψ は、

$$\psi = -z\partial_x \wedge \partial_y + x\partial_y \wedge \partial_z + y\partial_z \wedge \partial_x$$

で与えられる。Lie 群 $SL(2,\mathbb{R})$ の $sl(2,\mathbb{R})^*$ 上への coadjoint action によって、coadjoint orbits は、原点，回転2葉双曲面，回転1葉双曲面及び cone に別れる。また，Casimir function は、$\varphi(x^2+y^2-z^2)$ の形全体である。

§1で定義した $\mathcal{L}$ の2つの subalgebras を定義する。

$\mathcal{S} = \{X \in \mathcal{L} \mid X$ は各点で symplectic leaf に接する$\}$,

$\mathcal{H} = \{X_f \mid f \in C^\infty(sl(2,\mathbb{R})^*)\}$.

この時、明らかに次の包含関係が成り立つ：

$$\mathcal{L} \supset \mathcal{S} \supset \mathcal{H}.$$

これら3つの Lie algebras が本当に異なることの具体例は、文献[1]を見てもらいたい。これからの目標は勿論，$\mathcal{H}'(N) = \mathcal{L}/\mathcal{H}$ の計算である。

$sl(2,\mathbb{R})^*$ を $\mathbb{R}^3$ と同一視し，$(\mathbb{R}^3, \psi)$ を linear Poisson manifold と考え、$\mathbb{R}^3$ 上の formal vector fields で ψ を不変にするもの全体を L とする。即ち，$L = \{X : \text{formal vector fields} \mid \mathcal{L}(X)\psi = 0\}$.
$\mathbb{R}^3$ 上の formal functions の空間を $F(\mathfrak{g})$ (i.e. $\mathfrak{g} = sl(2,\mathbb{R})$) とすると，$L \subset F(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}^*$ である。ここで $\mathfrak{g}^*$ の basis は、$\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$ と見なしている。また，$H = \{X_{\hat{f}} \mid \hat{f} \in F(\mathfrak{g})\}$ と

おくと $L \supset H$ が成り立つ。

一般に，有限次元 Lie algebra $\mathfrak{g}=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ について，$\mathfrak{g}$ の $F(\mathfrak{g})$ への表現 ρ を

$$(*) \qquad \rho(x_i)\tilde{f} = \sum_{j,k} C_{ij}^k x_k \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}$$

とすると，$\psi = \frac{1}{2}\sum_{i,j,k} C_{ij}^k x_k \partial x_i \wedge \partial x_j$ という linear Poisson structure に対して，次の系列の中で，∂_0 は $\tilde{f} \longmapsto X_{\tilde{f}}$ に，また、∂_1 は、$\eta \longmapsto \mathcal{L}(\eta)\psi$ と一致する。

$$F(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\partial_0} F(\mathfrak{g})\otimes \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\partial_1} F(\mathfrak{g})\otimes \Lambda^2\mathfrak{g}^* \longrightarrow$$

但し，$(\partial_0 \alpha)(\xi_1) = \rho(\xi_1)(\alpha)$，

$$(\partial_1\beta)(\xi_1\wedge\xi_2) = \rho(\xi_1)(\beta(\xi_2)) - \rho(\xi_2)(\beta(\xi_1)) - \beta([\xi_1, \xi_2]).$$

有限次元ベクトル空間 V への $\mathfrak{g}$ の表現において、$\mathfrak{g}$ が半単純ならば $H^1(\mathfrak{g}, (V, \rho))=0$ となることは良く知られている所であるが、(*)式で定義した ρ は、$F(\mathfrak{g})$ の grading を保っているので、無限次元の $F(\mathfrak{g})$ に対しても、$\mathfrak{g}$ が半単純ならば、$H^1(\mathfrak{g}, (F(\mathfrak{g}), \rho)) = 0$ が成り立つのである。

さて，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ の場合に戻ると、上の注意から、我々の場合、$L = H$ を得る。E. Borel は、$C^\infty(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow F(\mathfrak{g})$ が onto であることを示した。このことから $\mathcal{H} \longrightarrow H$ が onto であることがわかり、従って、$\mathcal{L} \longrightarrow H = L$ も onto となる。今後、この linear map を T と書き，$\mathrm{Ker}\, T = \mathcal{L}'$ とする。($\mathcal{L}'$ は $\mathcal{L}$ の ideal になる。) 以上の記号のもとでいくつかの

補題を証明しよう。

補題1.(i) $\mathcal{L} \ni X = f\partial_x + g\partial_y + h\partial_z$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f = xg_y - yg_x + zh_x + xh_z, \\ g = yf_x - xf_y + zh_y + yh_z, \\ h = zf_x + xf_z + zg_y + yg_z. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \cdot \operatorname{div} X = (xf+yg-zh)_x, \\ y \cdot \operatorname{div} X = (xf+yg-zh)_y, \\ z \cdot \operatorname{div} X = -(xf+yg-zh)_z \end{cases}$$

但し, $\operatorname{div} X = f_x + g_y + h_z$.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{ある } \varphi \in \mathcal{C} \text{ が存在して,} \\ xf + yg - zh = \varphi(x^2+y^2-z^2), \\ \operatorname{div} X = 2\varphi'(x^2+y^2-z^2). \end{cases}$$

(ii) $\mathcal{J} \ni X = f\partial_x + g\partial_y + h\partial_z$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} xf + yg - zh = 0, \\ \operatorname{div} X = 0. \end{cases}$$

補題2. 1変数の C^∞-関数 $\alpha(t)$, $\beta(t)$ が $j_0^\infty(\alpha)=0$, $j_0^\infty(\beta)=0$ をみたすとする。このとき,

$$m(t) = \begin{cases} 0, & t \leqq 0, \\ \alpha(t), & t > 0, \end{cases} \qquad s(t) = \begin{cases} \beta(t), & t \leqq 0, \\ 0 & t > 0, \end{cases}$$

とすると，$m(t)$, $s(t) \in C^{\infty}(R)$ であって，次の vector fields X_1, X_2 は $\mathcal{L}'$ に属する：

$$X_1 = \frac{x \cdot m(x^2+y^2-z^2)}{x^2+y^2}\partial_x + \frac{y \cdot m(x^2+y^2-z^2)}{x^2+y^2}\partial_y,$$

$$X_2 = \frac{y \cdot s(x^2+y^2-z^2)}{y^2-z^2}\partial_y + \frac{z \cdot s(x^2+y^2-z^2)}{y^2-z^2}\partial_z.$$

以上の補題は、いずれも直接計算によって簡単に確かめられる。

補題 3. (i) $\mathcal{L} = \mathcal{H} + \mathcal{L}'$.

(ii) $\mathcal{L}/\mathcal{H} \cong \mathcal{L}'/\mathcal{L}' \cap \mathcal{H}$.

（証明）(i) $\mathcal{L}$ の任意の元 X に対して，（$L = H$ だから）ある $Y \in \mathcal{H}$ が存在して，$T(X) = T(Y)$ が成り立つ。よって，$X - Y \in \mathcal{L}'$. (ii) は (i) から明きらか。■

$\mathcal{C} \supset \mathcal{C}' = \{\varphi \mid j_0^{\infty}\varphi = 0\}$ とする時、次が成り立つ。

補題 4. 補題 1 で定まる写像 $A: \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{C}$ $(X \mapsto \varphi)$ について、$A(\mathcal{L}') \subset \mathcal{C}'$ で $A|_{\mathcal{L}'}: \mathcal{L}' \longrightarrow \mathcal{C}'$ は onto.

（証明）$X = f\partial_x + g\partial_y + h\partial_z$ が $\mathcal{L}'$ の元であれば、f, g, h は、原点で flat である。$xf + yg - zh = \varphi(x^2+y^2-z^2)$

$= F(x,y,z)$ とおくと、$\dfrac{\partial^{2k}F}{\partial x^{2k}}(0,0,0)=0$ より $\varphi^{(k)}(0)=0$ が従う。よって $\varphi(t)\in\mathcal{E}'$ を得る。逆に、$\varphi(t)\in\mathcal{E}'$ に対して、

$$m(t)=\begin{cases}0, & t\leqq 0,\\ \varphi(t), & t>0,\end{cases}\qquad s(t)=\begin{cases}\varphi(t), & t\leqq 0,\\ 0, & t>0,\end{cases}$$

とおくと $m(t)$, $s(t)$ は C^∞-関数で、補題2のように X_1, X_2 を定めると、

$$X = X_1+X_2 = \frac{x\cdot m(x^2+y^2-z^2)}{x^2+y^2}\partial_x + \left(\frac{y\cdot m(x^2+y^2-z^2)}{x^2+y^2}+\frac{y\cdot s(x^2+y^2-z^2)}{y^2-z^2}\right)\partial_y + \frac{z\cdot s(x^2+y^2-z^2)}{y^2-z^2}\partial_z$$

とおくと、$X\in\mathcal{L}'$ で $A(X)=\varphi$ となる。■

$\mathrm{Ker}(A|_{\mathcal{L}'})=\mathcal{L}'\cap\mathcal{I}$ であるから、補題4より、$\mathcal{L}'/\mathcal{L}'\cap\mathcal{I}\cong\mathcal{E}'$ となる。従って、

(＊＊) $(\mathcal{L}'/\mathcal{L}'\cap\mathcal{H})/(\mathcal{L}'\cap\mathcal{I}/\mathcal{L}'\cap\mathcal{H})\cong\mathcal{L}'/\mathcal{L}'\cap\mathcal{I}\cong\mathcal{E}'$

であるから、あとは、$\mathcal{L}'\cap\mathcal{I}/\mathcal{L}'\cap\mathcal{H}$ の構造を明らかにすればよいことになった。そこで次の線型写像Bを考えよう。

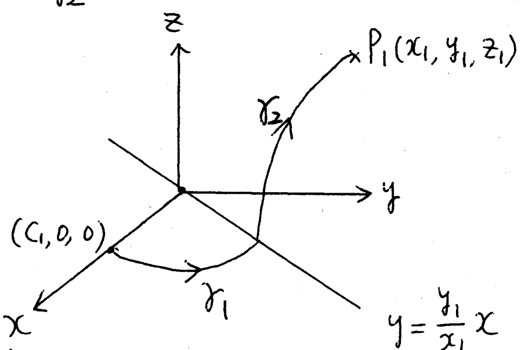
$$B:\ \mathcal{L}'\cap\mathcal{I}\longrightarrow H^1(\mathcal{F},\mathbb{R})$$
$$\quad X\longmapsto [i(X)\omega].$$

ここで $\mathcal{F}$ は、(任意の)回転1葉双曲面で、ω はその上の symplectic form である。$\mathcal{L}'\cap\mathcal{I}\ni X$ について $[i(X)\omega]$ が、$H^1(\mathcal{F},\mathbb{R})$ の generator になるかどうかは、回転1葉双曲面

$\mathcal{F}$の取り方にはよらないことを注意しておく。Bは onto で
$H^1(\mathcal{F},\mathbb{R})\cong\mathbb{R}$ であるから、$\mathcal{L}\cap\mathcal{J}/\mathrm{Ker}\,B\cong\mathbb{R}$ となる。また、
$\mathrm{Ker}\,B\supset\mathcal{L}\cap\mathcal{H}$ は明らかであるから逆を示そう。

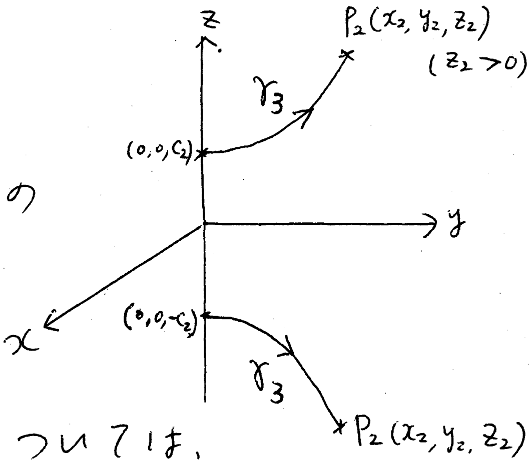
イ) 点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ が $x_1^2+y_1^2-z_1^2=c_1^2$ $(c_1>0)$ を満たす場合には、

$$F(x_1,y_1,z_1)=-\left(\int_{\gamma_1} i(X)\omega+\int_{\gamma_2} i(X)\omega\right)$$



と定義する。leaf $\mathcal{F}_1$ に沿って上記の積分で F を定めるが、$X\in\mathrm{Ker}\,B$ だから F は $\mathcal{F}_1$ 上の path の取り方によらず well-defined である。

ロ) 点 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ が $x_2^2+y_2^2-z_2^2=-c_2^2$ $(c_2>0)$ を満たす場合には、



$$F(x_2,y_2,z_2)=-\int_{\gamma_3} i(X)\omega$$

と定義する。leaf $\mathcal{F}_2$ に沿う上記の積分は、$\mathcal{F}_2$ が単連結だから well-defined である。

ハ) cone 上の点 $P(u,v,w)$ については、

$$F(u,v,w)=\lim_{P_1\to P}F(P_1)=\lim_{P_2\to P}F(P_2)$$

(P_1は一葉双曲面上の点)　(P_2は二葉双曲面上の点)

とすると、特に、二番目の等号も成り立ち、$F(u,v,w)$が確定

する。cone 上の各点で、今、定義した関数の可微分性を証明することは、少々面倒であるが、ともかく、このFがおめるもの、即ち、$X \in \mathrm{Ker}\, B$であれば、$X = X_F$ が結論される。従って、$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$についての$\mathcal{H}^1(N)$に関する最終定理は次のようにまとめられる：

定理. $\mathcal{H}^1(N) \big/ \mathbb{R} \cong C^{\prime}$.

文献表

[1] N. Nakanishi, On the structure of infinitesimal automorphisms of linear Poisson manifolds I, J. Math. Kyoto Univ., Vol. 31, No. 1, (1991), 71–82.

[2] N. Nakanishi, On the structure of infinitesimal automorphisms of linear Poisson manifolds II, J. Math. Kyoto Univ., Vol. 31, No. 1, (1991), 281–287.

[3] I. Vaisman, Remarks on the Lichnerowicz-Poisson cohomology. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 40, 4 (1990), 951–963.

[4] Yu. M. Vorobév and M. V. Karasev, Poisson manifolds and the Schouten bracket, Functional Analysis and its Applications, Vol. 22, No. 1 (1988), 1–9

[5] P. Xu, Poisson cohomology of regular Poisson manifolds, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 42, 4 (1992), 967–988.