数理解析研究所講究録
第 875 巻 1994 年 146-155

ある種のリー群のポアソン構造

秋田大学・教育学部　三上　健太郎 (Kentaro Mikami)

1　扱う問題と結果

V. G. Drinfel'd によると,「リー群の乗法的なポアソン構造はリー環の双対空間に新たなリー環の構造を定める.」(Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equations. *Soviet Math. Dokl.*, 27:68–71, 1983)

事実–1: リー群の自明なポアソン構造, 即ち, ゼロポアソン構造は乗法的であり, それが定める双対空間のリー環構造は可換構造である.

その対極の場合として,

事実–2: 有限次元リー群の左不変なシンプレクティック構造は, 乗法的なポアソン構造を定め, それが定める双対空間のリー環構造はもとのリー環構造と同型である.

左不変なシンプレクティック構造を持つリー群の例としては, affine Lie group や based loop group が知られている. この報告では上に述べた事実–2 がある種の based loop group (無限次元) に対しても成立する事:

定理: G が負定値 Killing-Cartan form を備えた (単連結) 半単純 Lie group である時, その based loop group ΩG が持つ left-invariant symplectic structure は乗法的 Poisson structure を定める (ことは知られている). この乗法的 Poisson structure が定める dual Lie algebra 構造は元の based loop group の Lie algebra 構造と同型である.

およびそれに付随して得られた系:

系: 前述の定理と同じ仮定の元で, loop group LG は自明でない乗法的 Poisson structure を持つ. この乗法的 Poisson 構造から誘導された dual Lie algebra structure は based loop group の Lie algebra と abelian subalgebra の直和に同型である.

を紹介する.

ポアソン構造, シンプレクティック構造のポアソンテンソルを具体的に書き出すことを方針とし, 使う道具はスカウテン括弧積である.

2 Poisson 幾何からの復習

2.1 Poisson 構造/括弧

定義 2.1 (Poisson bracket) 多様体 M の Poisson bracket とは次の性質を満たす演算を言う.

$$C^\infty(M) \times C^\infty(M) \ni (f,g) \mapsto \{f,g\} \in C^\infty(M)$$

(1) 交代 (2) $\mathbf{R}$-双線形

(3) Jacobi の恒等式 $\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0$

(4) 積の微分公式 $\{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}$ (or $\{fg,h\} = f\{g,h\} + \{f,h\}g$) .

Poisson bracket を備えた多様体を Poisson manifold と呼ぶ.

2.2 Poisson tensor と Schouten 括弧

定義 2.2 (Poisson tensor) Poisson bracket の条件から M 上に唯一つの bi-vector field π が $<\pi, df \wedge dg> := \{f,g\}$ のように定まる. π は Poisson bracket $\{\cdot,\cdot\}$ の Poisson tensor と呼ばれる.

命題 2.1 M の bi-vector field π は 2 項演算 $\{f,g\}$ を $\{f,g\} := <\pi, df \wedge dg>$ によって定める. その時, $\{\cdot,\cdot\}$ が Jacobi の恒等式を満たす必要かつ十分な条件は Schouten bracket $[\pi,\pi]_{\mathrm{Schouten}} = 0$ である.

定義 2.3 Schouten bracket は次の条件で特徴づけられる$\bigwedge^*(\mathrm{T}M)$ 上の degree -1 homogeneous bi-derivation である.

$$[\ ,\ ]_{\mathrm{Schouten}} : \bigwedge^s(\mathrm{T}M) \times \bigwedge^t(\mathrm{T}M) \to \bigwedge^{s+t-1}(\mathrm{T}M)$$

1. $[f,g]_{\mathrm{Schouten}} = 0 \quad \forall f,g \in \bigwedge^0(\mathrm{T}M) = C^\infty(M)$
2. $[X,g]_{\mathrm{Schouten}} = <X,dg> = Xg \quad \forall X \in \bigwedge^1(\mathrm{T}M), g \in \bigwedge^0(\mathrm{T}M)$
3. $[X,Y]_{\mathrm{Schouten}} = [X,Y]_{\mathrm{Liebracket}} \quad \forall X,Y \in \bigwedge^1(\mathrm{T}M)$
4. $[S,T \wedge U] = [S,T] \wedge U + (-1)^{(s-1)t} T \wedge [S,U]$
5. $[S,T] = (-1)^{(s-1)(t-1)+1}[T,S]$

6. $(-1)^{(s-1)(u-1)}[[S,T],U]+(-1)^{(t-1)(s-1)}[[T,U],S]+(-1)^{(u-1)(t-1)}[[U,S],T]=0$

ここで, 小文字 s は S の (自然な) degree を意味する. i.e., $S \in \bigwedge^s(\mathrm{T}M)$.

注意 2.1 (M_1,π_1) と (M_2,π_2) を Poisson manifolds とするとき, $(M_1\times M_2,\lambda_1\pi_1\oplus\lambda_2\pi_2)$ もまた Poisson manifold である (λ_1,λ_2 は定数). しかし逆に, M の部分多様体 N が Poisson structure を持っていてもそれを M の Poisson structure に拡張する一般的な方法はない.

2.3 Symplectic 構造

Poisson structure π は bundle map $\pi^\#:\mathrm{T}^*M\longrightarrow \mathrm{T}M$ を定義する. もしも rank $(\pi)=$ dim M (有限) ならば, $\pi^\#$ は可逆で, 非退化な 2-form ω を定義する[1]. $\omega^\flat=-(\pi^\#)^{-1}$, ここで $\omega^\flat\colon \mathrm{T}M\ni\xi\mapsto\omega(\xi,\cdot)\in\mathrm{T}M^*$. $d\omega=0$ i.e., ω が closed であることは Schouten bracket $[\pi,\pi]=0$ と同値である.

2.4 乗法的 Poisson 構造

定義 2.4 (Drinfel'd [2]) Lie group G 上の Poisson structure/bracket/tensor を考える. 群の演算 $(G\times G,\pi\oplus\pi)\ni(a,b)\mapsto ab\in(G,\pi)$ が Poisson map である, 別の言葉で, $\pi(ab)=T\ell_a\pi(b)+Tr_b\pi(a)\quad(a,b\in G)$, である時, Poisson structure/bracket/tensor π は乗法的 (multiplicative) と言う. 乗法的 Poisson structure/bracket/tensor を備えた Lie group を Poisson Lie group と呼ぶ.

Lie group G は parallelizable だから, $\mathrm{T}G$ と $G\times\mathfrak{g}$, $\bigwedge^2\mathrm{T}G$ と $G\times\wedge^2\mathfrak{g}$, ... と right translation で同一視出来る. この同一視のもと, Poisson tensor $\pi:G\longrightarrow\bigwedge^2\mathrm{T}G$ は, $\pi_r:G\longrightarrow\wedge^2\mathfrak{g}$ なる写像と見る事が出来る. $\pi_r(e)=0$ であることから, 我々は e での essential derivative, 即ち $d_e\pi_r:\mathfrak{g}\longrightarrow\wedge^2\mathfrak{g}$ を扱える.

Schouten bracket を上に述べた (right-identified-space) $G\times\wedge^*\mathfrak{g}$ に自然に持ち込める. そこでは次で特徴付けられる.

1. 定義 2.3と同じ公理系, 但し

2. $[x,y]_r=-[x,y]\quad(\forall x,y\in\mathfrak{g})$

3. $[x,f]_r(a)=\frac{d}{dt}f(\exp tx\cdot a)_{|t=0}\quad(\forall x\in\mathfrak{g}\text{ and }\forall f\in C^\infty(G))$

[1] Poisson bracket の符号は $\{f,h\}=\omega(X_f,X_h)$, 但し $\omega(X_f,\cdot)=df$ を採用.

同様に, Schouten bracket を上に述べた (left-identified-space) $G \times \wedge^* \mathfrak{g}$ にも自然に持ち込める.

命題 2.2 (Weinstein [6]) π を $\pi(e) = 0$ を満たす連結 Lie group G の bi-vector field とする. その時次は同値である.

(1) $\pi: G \to \bigwedge^2 \mathrm{T}G$ は乗法的

(2) $\pi_r: G \to \wedge^2 \mathfrak{g}$ は Adjoint representation[2]の 1-cocyle

(3) $d_e \pi_r: \mathfrak{g} \to \wedge^2 \mathfrak{g}$ は adjoint representation[3]の 1-cocycle

命題 2.3 (Drinfel'd [2]) π を連結 Lie group G の $\pi(e) = 0$ を満たす bi-vector field とする. その時, 次は同値である.

(1) $\pi: G \to \bigwedge^2 \mathrm{T}G$ は Poisson tensor である, 即ち, Schouten bracket $[\pi, \pi] = 0$ を満たす

(2) $d_e \pi_r: \mathfrak{g} \to \wedge^2 \mathfrak{g}$ の双対 (dual) $(d_e \pi_r)^*: \mathfrak{g}^* \leftarrow \wedge^2 \mathfrak{g}^*$ が $\mathfrak{g}^*$ 上に Lie algebra structure を定める.

注意 2.2 (1) と (2) は次に同値である.

(3) $\pi_r: G \to \wedge^2 \mathfrak{g}$ が Schouten bracket $[\pi_r, \pi_r]_r = 0$ を満たす.

命題 2.4 (Lu and Weinstein [4]) G は連結で半単純であるとする. その時 $\pi(e) = 0$ なる任意の乗法的 bi-vector field は次の形に限る. $\pi_r(a) = \mathrm{Ad}_a \boldsymbol{t} - \boldsymbol{t} \quad (\exists \boldsymbol{t} \in \wedge^2 \mathfrak{g})$, i.e., $\pi(a) = T\ell_a \boldsymbol{t} - Tr_a \boldsymbol{t}$ (省略して $= a\boldsymbol{t} - \boldsymbol{t}a$ とも表す).

Poisson condition は, $[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}]$ が Adjoint invariant, i.e., Schouten bracket $[x, [\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}]]$ が$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して 0 と同値である. 特に, $\boldsymbol{t}$ が $[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}] = 0$ を満たせば, $\boldsymbol{t}$ は乗法的 Poisson structure を定義する. 方程式 $[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}] = 0$ は classical Yang-Baxter equation として知られ, $[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}] = 0$ を満たす $\boldsymbol{t}$ は (classical) *r-matrix* と呼ばれている.

例題 2.1 (cf. Dazord and Sondaz [1]) G は 3 次元半単純としよう. その時任意の $\boldsymbol{t} \in \wedge^2 \mathfrak{g}$ は $[\mathfrak{g}, [\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}]] = 0$ を満たす. $G = SU(2)$ or $SO(3)$ なら classical r-matrix は 0 のみである. もし $G = SL(2, \mathbf{R})$ なら, classical *r-matrix* は $r_1{}^2 - 4r_2 r_3 = 0$ なる条件のもと

$$\boldsymbol{t} = r_1 \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 + r_2 \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1 + r_3 \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$$

である, 但しここでの基底は次の bracket relation を満たすものとする.

$$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2] = 2\boldsymbol{e}_2, \quad [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3] = -2\boldsymbol{e}_3, \quad [\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] = \boldsymbol{e}_1.$$

[2] $\Gamma: G \to \wedge^2 \mathfrak{g}$, $\Gamma(ab) = \Gamma(a) + \mathrm{Ad}_a \cdot \Gamma(b)$, $\mathrm{Ad}_a \cdot (x \wedge y) = \mathrm{Ad}_a x \wedge \mathrm{Ad}_a y$.

[3] $\gamma: \mathfrak{g} \to \wedge^2 \mathfrak{g}$, $\gamma([u, v]) = \mathrm{ad}_u \cdot \gamma(v) - \mathrm{ad}_v \cdot \gamma(u)$, $\mathrm{ad}_u \cdot (x \wedge y) = (\mathrm{ad}_u x) \wedge y + x \wedge (\mathrm{ad}_u y)$.

もし Lie group の次元が 3 より大であるならば, どのような bi-vector が classical *r-matrix* であるのかの情報を得るのは難しい.

3 Loop groups の簡単な復習

3.1 Loop group/algebra の定義

G は $\mathfrak{g}$ を Lie algebra とする連結 Lie group とする.

定義 3.1 (Loop group/algebra, cf. [5]) $LG := \{\gamma\colon S^1 \to G \mid \text{smooth}\}$ は無限次元 Lie group で, G の loop group と呼ばれる. 群の演算は

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(\theta) := \gamma_1(\theta)\gamma_2(\theta)$$

で定義する, 但し θ は S^1 の $z = e^{i\theta}$ なる座標である.

LG の Lie algebra は $L\mathfrak{g} := \{\xi\colon S^1 \to \mathfrak{g} \mid \text{smooth}\}$ で与えられる. Lie algebra の演算も自然である, i.e., $[\xi_1, \xi_2](\theta) := [\xi_1(\theta), \xi_2(\theta)]$.

定義 3.2 (Based loop group/algebra, cf. [5])

$$\Omega G := \{\gamma \in LG \mid \gamma(\theta = 0) = \gamma(z = 1) = e \in G\}$$

は LG の正規部分群である, G の based loop group と呼ばれる.

ΩG の Lie algebra は $\Omega\mathfrak{g} := \{\xi \in L\mathfrak{g} \mid \xi(0) = 0\}$ である.

命題 3.1 (cf. [5]) LG は ΩG と constant loops G の semidirect product である.

$$\gamma \leftrightarrow (\gamma\gamma(0)^{-1}, \gamma(0)) \ .$$

$L\mathfrak{g}$ は $\Omega\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}$ の semidirect product である. $\xi \leftrightarrow (\xi - \xi(0), \xi(0))$.

3.2 Loop 群の presymplectic 構造

以下, G は半単純で Killing-Cartan form は負定値であると仮定する. $<\cdot,\cdot>$ を Killing-Cartan form の scalar 倍である (Adjoint-)invariant な $\mathfrak{g}$ の inner product とする. その時

$$\ll\xi, \eta\gg = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} <\xi(\theta), \eta(\theta)> d\theta \quad (\xi, \eta \in L\mathfrak{g})$$

は $L\mathfrak{g}$ 上の正定値な inner product である.

定理 3.2 (cf. [5])

$$\omega(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}<\xi(\theta),\dot{\eta}(\theta)>d\theta \qquad (\xi,\eta\in L\mathfrak{g})$$

は LG 上の left-invariant closed 2-form を定める.

3.3 Based loop group の symplectic 構造

Theorem 3.2 の ω の annihilator が $\{\xi\in L\mathfrak{g}\mid\dot{\xi}=0\}$ であるから, 次の事がわかる.

命題 3.3 (cf. [5]) ΩG に制限した 2-form ω は非退化である, i.e., ω を備えた based loop group ΩG は symplectic manifold である.

4 結果の証明

4.1 Loop algebra の別表示

ΩG を homogeneous space LG/G と見ると自然に (almost) complex structure が考えられる (cf.[5]). しかし, 我々は ΩG を LG の部分群と見なしたい, また三角関数と Fourier 級数を自由に利用したいので, Lie algebra $L\mathfrak{g}$ と $\Omega\mathfrak{g}$ を代数的な構造をも含めて解析しよう.

$L\mathfrak{g}$ は, 対応 $\xi\leftrightarrow(\xi-\xi(0),\xi(0))$ によって $\Omega\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}$ の半直積である. 他方, vector space $L\mathfrak{g}$ を $\xi\leftrightarrow(\xi-\oint\xi,\oint\xi)$ と分解する事が出来る. 但し, $\oint\xi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi(\theta)d\theta$ (cf. Freed [3]).

$\psi(\xi):=\xi-\xi(0)+\oint\xi$ で定義される写像 $\psi\colon L\mathfrak{g}\to L\mathfrak{g}$ を考える. ψ は $L\mathfrak{g}$ の vector space isomorphism である.

$\Omega_{\mathrm{new}}\mathfrak{g}:=\psi^{-1}(\Omega\mathfrak{g})=\{\xi\in L\mathfrak{g}\mid\oint\xi=0\}$ と置く. ψ による $L\mathfrak{g}$ の Lie bracket の引き戻しを当面 $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{new}}$ で表す.

命題 4.1 $L_{\mathrm{new}}\mathfrak{g}:=(L\mathfrak{g}$ with $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{new}})$ は $\Omega_{\mathrm{new}}\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}$ の Lie algebra としての semidirect product である. 新しい bracket operation は元の bracket operation と次のように関係づいている.

$$\begin{aligned}[\xi,\eta]_{\mathrm{new}} &= [\xi,\eta]-\oint[\xi,\eta]-[\xi,\eta(0)]-[\xi(0),\eta] \quad (\forall\xi,\eta\in\Omega_{\mathrm{new}}\mathfrak{g})\\ [\xi,\mathrm{const}]_{\mathrm{new}} &= [\xi,\mathrm{const}] \quad (\forall\xi\in L\mathfrak{g})\end{aligned}$$

命題 4.2 (cf. [5]) $\Omega_{\mathrm{new}}\mathfrak{g}$ の complex structure J を

$$J(\xi)(\theta):=\sum_{n\neq0}\mathrm{sign}(n)i\xi_n e^{in\theta}$$

で定義出来る．ここで，$\xi \in \Omega_{\text{new}}\mathfrak{g}$，但し，$\xi_n \in \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ は $\xi(\theta) = \sum_{n\neq 0} \xi_n e^{in\theta}$ で定義されている．

$\{e_\alpha\}$ を $\mathfrak{g}$ の basis とする．その時，$\{e_\alpha \cos m\theta,\ e_\beta \sin n\theta\}$ は $m, n > 0$ なら $\Omega_{\text{new}}\mathfrak{g}$ の basis，$m \geq 0$ 且つ $n > 0$ なら $L\mathfrak{g}$ の basis である．complex structure J は次で特徴付けられる

$$J(e_\alpha \cos m\theta) = -e_\alpha \sin m\theta \ , \quad J(e_\alpha \sin m\theta) = e_\alpha \cos m\theta \ .$$

4.2 Poisson tensors

我々は map ψ によって $L\mathfrak{g}$ から $L_{\text{new}}\mathfrak{g}$ へ移動し，新しい Lie bracket operation を得た．presymplectic structure ω への ψ の影響を調べて見よう．

補題 4.1 ω_{new} を ψ による ω の引き戻しとする，i.e., $\omega_{\text{new}}(\xi, \eta) := \omega(\psi(\xi), \psi(\eta))$．その時，$L_{\text{new}}\mathfrak{g} = L\mathfrak{g}$ 上で $\omega_{\text{new}} = \omega$ である．

Proof: 部分積分を使って

$$\begin{aligned}
\omega_{\text{new}}(\xi, \eta) &= \omega(\xi - \xi(0) + \oint \xi, \eta - \eta(0) + \oint \eta) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} <\xi(\theta) - \xi(0) + \oint \xi, \frac{d}{d\theta}(\eta(\theta) - \eta(0) + \oint \eta)> d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} <\xi(\theta) - \xi(0) + \oint \xi, \frac{d}{d\theta}(\eta(\theta))> d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} <\xi(\theta), \frac{d}{d\theta}(\eta(\theta))> d\theta \\
&= \omega(\xi, \eta)
\end{aligned}$$

■

注意 4.1 新旧 objects の相性

$$\begin{aligned}
&\ll \Omega\mathfrak{g}, \mathfrak{g} \gg \neq 0 \quad && \ll [\xi, \eta], \zeta \gg = \ll \xi, [\eta, \zeta] \gg \\
&\ll \Omega_{\text{new}}\mathfrak{g}, \mathfrak{g} \gg = 0 \quad && \ll [\xi, \eta]_{\text{new}}, \zeta \gg \neq \ll \xi, [\eta, \zeta]_{\text{new}} \gg \ .
\end{aligned}$$

$<e_\alpha, e_\beta> = 2\delta_{\alpha\beta}$ なる $\mathfrak{g}$ の basis を選ぶ．そうすれば，$\mathfrak{g}$ の structure constants は $C^\alpha_{\beta\gamma} = C^\gamma_{\alpha\beta} = C^\beta_{\gamma\alpha}$ なる性質を持つ．

$\{e_\alpha \cos m\theta, e_\beta \sin n\theta\}$ は $\Omega_{\text{new}}\mathfrak{g}$ の正規直交基底をなす，i.e.,

$$\ll e_\alpha \cos m\theta, e_\beta \cos n\theta \gg = \delta_{\alpha\beta}\delta_{mn}$$

$$\ll e_\alpha \sin m\theta, e_\beta \sin n\theta \gg = \delta_{\alpha\beta}\delta_{mn}$$

$$\ll e_\alpha \cos m\theta, e_\beta \sin n\theta \gg = 0$$

$e_\alpha \cos m\theta$ と $Je_\alpha \cos m\theta = -e_\alpha \sin m\theta$ を $e_{\alpha m}$ と $\bar{e}_{\alpha m}$ でそれぞれ表す. その時これらの metric relations は

$$\ll e_{\alpha m}, e_{\beta n} \gg = \ll \bar{e}_{\alpha m}, \bar{e}_{\beta n} \gg = \delta_{\alpha\beta}\delta_{mn}, \quad \ll e_{\alpha m}, \bar{e}_{\beta n} \gg = 0 .$$

である.

補題 4.2 ΩG の symplectic structure ω の Poisson tensor は

$$\pi_\ell(\gamma) = \sum_{n>0,\alpha} \frac{1}{n} J(e_\alpha \cos n\theta) \wedge e_\alpha \cos n\theta \in \Omega_{\mathrm{new}}\mathfrak{g}$$

で与えられる.

Proof: 写像 $\omega^\flat \colon \Omega_{\mathrm{new}}\mathfrak{g} \ni \xi \mapsto \omega(\xi, \cdot) \in (\Omega_{\mathrm{new}}\mathfrak{g})^*$ から Poisson tensor を書き出したい. $\Omega_{\mathrm{new}}\mathfrak{g}$ 又は $L\mathfrak{g}$ は, $(\Omega_{\mathrm{new}}\mathfrak{g})^*$ 又は $(L\mathfrak{g})^*$ の metric $\ll\cdot,\cdot\gg$ に関する dense subspace である ("*smooth*" part と呼ばれる, cf. [5]). そこで双対空間をこの metric で元の空間と同一視する. この同一視のもとで, $\omega^\flat(\xi) = -\dot{\xi}$ (the differentiation) である. ω の Poisson tensor π は $\pi^\# = -(\omega^\flat)^{-1}$ で決められているので, $\pi^\#$ は integration であるはず, i.e.,

$$\pi^\#(\xi) = \int_0^\theta \xi(s)ds - \oint \int_0^\theta \xi(s)ds \quad (\forall \xi \in \Omega_{\mathrm{new}}\mathfrak{g}) .$$

$\Omega_{\mathrm{new}}\mathfrak{g}$ の定義, $\oint \xi = 0$ が効果を発揮してる.

我々の Poisson tensor を $t_\flat$ と記し,

$$\sum \left(\frac{1}{2} P_{\alpha m,\beta n} e_{\alpha m} \wedge e_{\beta n} + Q_{\alpha m,\beta n} e_{\alpha m} \wedge \bar{e}_{\beta n} + \frac{1}{2} R_{\alpha m,\beta n} \bar{e}_{\alpha m} \wedge \bar{e}_{\beta n}\right)$$

但し, $P_{\alpha m,\beta n} = -P_{\beta n,\alpha m}$ 且つ $R_{\alpha m,\beta n} = -R_{\beta n,\alpha m}$ と表す. 基底 vector との paring をとると言う計算の後, 次を得る.

$$\delta_{\alpha\beta}\delta_{mn} = -mQ_{\beta n,\alpha m} , \quad 0 = -mP_{\alpha m,\beta n} ,$$
$$0 = mR_{\alpha m,\beta n} , \quad \delta_{\alpha\beta}\delta_{mn} = -mQ_{\alpha m,\beta n} .$$

それ故,

$$t_\flat = \sum_{m,\alpha} \frac{1}{m} \bar{e}_{\alpha m} \wedge e_{\alpha m} .$$

∎

注意 4.2 補題 4.2 の t_b は, その構成から *r-matrix*, i.e., $[t_b, t_b] = 0$ を満たす事を推測出来る. 実際, 直接 Schouten bracket $[t_b, t_b] = 0$ であることを次の載せた new bracket relations を使った長い計算の後証明出来る.

補題 4.3

$$\begin{aligned}
[e_{\alpha m}, e_{\beta n}]_{\text{new}} &= \frac{1}{2} C^{\varepsilon}_{\alpha\beta} \left(e_{\varepsilon, m+n} - 2e_{\varepsilon m} - 2e_{\varepsilon n} + (1-\delta_{mn}) e_{\varepsilon, m-n} \right) \\
[e_{\alpha m}, \bar{e}_{\beta n}]_{\text{new}} &= \frac{1}{2} C^{\varepsilon}_{\alpha\beta} \left(\bar{e}_{\varepsilon, m+n} - 2\bar{e}_{\varepsilon n} - 2\bar{e}_{\varepsilon, m-n} \right) \\
[\bar{e}_{\alpha m}, \bar{e}_{\beta n}]_{\text{new}} &= \frac{1}{2} C^{\varepsilon}_{\alpha\beta} \left(e_{\varepsilon, m+n} - (1-\delta_{mn}) e_{\varepsilon, m-n} \right)
\end{aligned}$$

ここで, $e_{\alpha, -m} = e_{\alpha m}$ 但し $\bar{e}_{\alpha,-m} = -\bar{e}_{\alpha m}$.

定理 **4.3** 補題 4.2 の bi-vector t_b から $\pi(\gamma) := \gamma t_b - t_b \gamma$ で定義される bi-vector field π は LG 上の乗法的 Poisson structure である.

注意 4.3 有限和 $\displaystyle\sum_{0<n<N,\alpha} \frac{1}{n} J(e_\alpha \cos n\theta) \wedge e_\alpha \cos n\theta$ も

有限個を除いた $\displaystyle\sum_{n>N,\alpha} \frac{1}{n} J(e_\alpha \cos n\theta) \wedge e_\alpha \cos n\theta$ も *r-matrix* ではない.

4.3 Loop group の dual Lie algebra

ここでは LG の乗法的 Poisson structure から定まる $(L\mathfrak{g})^*$ の dual Lie algebra structure について調べる. 前に触れたように, $(L\mathfrak{g})^*$ の "*smooth*" part $(L\mathfrak{g})$ での様子を調べる. ここでは主に $[\cdot,\cdot]_{\text{new}}$ を使うが, 混乱のない限り, tag *new* なしの $[\cdot,\cdot]$ で表す.

Dual Lie algebra structure の定義は $<[\sigma,\tau]_\pi, \xi> := <\sigma \wedge \tau, d_e \pi_r(\xi)>$. 特に, もしも $\pi_r(\gamma) = \mathrm{Ad}_\gamma t - t$ ならば, $<[\sigma,\tau]_\pi, \xi> = <\sigma \wedge \tau, \mathrm{ad}_\xi t>$.

定理 4.3 の乗法的 Poisson structure π_b を考えよう. その時

$$\begin{aligned}
&\ll [\sigma,\tau]_\pi, \xi \gg \\
&= \sum_{n>0,\varepsilon} \frac{1}{n} \left\{ \begin{vmatrix} \ll \sigma, [\xi, \bar{e}_{\varepsilon n}] \gg & \ll \sigma, e_{\varepsilon n} \gg \\ \ll \tau, [\xi, \bar{e}_{\varepsilon n}] \gg & \ll \tau, e_{\varepsilon n} \gg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ll \sigma, \bar{e}_{\varepsilon n} \gg & \ll \sigma, [\xi, e_{\varepsilon n}] \gg \\ \ll \tau, \bar{e}_{\varepsilon n} \gg & \ll \tau, [\xi, e_{\varepsilon n}] \gg \end{vmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

長い計算の後で次を得る.

補題 4.4

$$\begin{aligned}
[e_{\alpha m}, e_{\beta n}]_\pi &= \frac{1}{2mn} C^{\varepsilon}_{\alpha\beta} \left((m-n)\bar{e}_{\varepsilon, m-n} - (m+n)\bar{e}_{\varepsilon, m+n} \right) \\
[e_{\alpha m}, \bar{e}_{\beta n}]_\pi &= \frac{1}{2mn} C^{\varepsilon}_{\alpha\beta} \left((m-n) e_{\varepsilon, m-n} + (m+n) e_{\varepsilon, m+n} - 2n e_{\varepsilon, n} \right) \\
[\bar{e}_{\alpha m}, \bar{e}_{\beta n}]_\pi &= \frac{1}{2mn} C^{\varepsilon}_{\alpha\beta} \left((m-n)\bar{e}_{\varepsilon, m-n} + (m+n)\bar{e}_{\varepsilon, m+n} - 2m\bar{e}_{\varepsilon, m} - 2n\bar{e}_{\varepsilon, n} \right)
\end{aligned}$$

定理 **4.4** Dual Lie algebra $(\Omega_{\mathrm{new}}\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\pi)$ は Lie algebra として $(\Omega_{\mathrm{new}}\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathrm{new}})$ と同型である.

Proof: 写像 $e_{\alpha m} \mapsto m\bar{e}_{\alpha m}$ $\bar{e}_{\beta n} \mapsto n e_{\beta n}$ が $(\Omega_{\mathrm{new}}\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathrm{new}})$ から dual Lie algebra $(\Omega_{\mathrm{new}}\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\pi)$ への Lie algebra isomorphism を与える事を直接確かめられる. ∎

$[\mathfrak{g}, L\mathfrak{g}]_\pi = 0$ であることから, 次を得る.

系 4.1 乗法的 Poisson loop group LG の dual Lie algebra $(L\mathfrak{g})^*$ は Lie algebra $(\Omega_{\mathrm{new}}\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\pi)$ と $\mathfrak{g}$ を含む abelian subalgebra の Lie algebra としての direct product である.

参考文献

[1] P. Dazord and D. Sondaz. Groupes de Poisson affine. In P. Dazord and A. Weinstein, editors, *Symplectic Geometry, Groupoids, and Integrable Systems – Séminaire Sud Rhodanien de Géométrie*, volume 20, pages 99–128. Mathematical Sciences Research Institute Publications, 1989.

[2] V. G. Drinfel'd. Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equations. *Soviet Math. Dokl.*, 27:68–71, 1983.

[3] D. S. Freed. The geometry of loop groups. *J. Differential Geometry*, 28:223–276, 1988.

[4] J.-H. Lu and A. Weinstein. Poisson Lie groups, dressing transformations, and Bruhat decompositions. *J. Differential Geometry*, 31:501–526, 1990.

[5] A. Pressley and G. Segal. *Loop groups.* Oxford University Press, London, 1986.

[6] A. Weinstein. Some remarks on dressing transformations. *Journal of Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1A, Math.*, 36:163–167, 1988.