数理解析研究所講究録
第880巻 1994年 112-119

重調和ディリクレ問題に対する数値－数式ハイブリッド法
（LISP による偏微分方程式の数値一般解の構成法）

天野一男 (城西大学 理学部)
(Kazuo Amano)

アブストラクト. この講演の目的は、偏微分方程式に対する数値－数式ハイブリッド法の有用性を喚起することである。ハイブリッド法をうまく用いれば、数値計算と数式処理のそれぞれの長所を引きだして融合させることが可能である。すなわち、数値計算が得意とする「高速な数値処理」と、数式処理が保証する「抽象的な数式計算 」の、それぞれがもっている良い点を生かして、これまでにない成果を得ることができる。数値－数式ハイブリッド法は、速さと一般性とを兼ね備えた、偏微分方程式の新しい数値解法を導出する。

1. はじめに

われわれの目的は、重調和ディリクレ問題

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0 & \text{in } D \\ u = \phi,\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \psi & \text{on } \partial D \end{cases} \tag{1.1}$$

に対する、**数値一般解の公式**をつくることである。具体的に言えば、境界条件 ϕ と ψ を数値的にではなくシンボリックに用いて、(1) の解 $u(x,y)$ を近似的に表現することが、われわれの目標である。ただしここで、D は2次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^2$ の領域で、区分的に滑らかな境界 ∂D をもつものとする。$\mathbf{n}$ は境界上の単位内向法ベクトルをあらわし、ϕ と ψ は滑らかな関数とする。われわれは、(1.1) のある種の解を、境界条件 ϕ と ψ をシンボリックに用いて、代数的に表現することが可能であることを証明する, *i.e.*, 任意関数 ϕ と ψ を含む、重調和方程式の **数値一般解** が存在することを証明する。

われわれの **数値一般解** の構成法は、古典的な一般解の構成法とは、まったく違うものである。第1段階：テイラーの定理をもちいて、差分作用素に関するいくつかの補助定理を証明する (§2). 第2段階：§2 の補助定理を使って、問題 (1.1) を解くための実用的な数値－数式ハイブリッド アルゴリズムを得る (§3). 第3段階：第2段のアルゴリズムを LISP のプログラムに翻訳し、そのプログラムに数値一般解の公式を、C のソースコードの形式で出力させる (§4). 第4段階：数値実験によって、われわれのシナリオの妥当性を確認する (§5). これらの数値実験は、われわれの **数値一般解** が、速いアルゴリズムを生成するという点で、既存のアルゴリズムよりも遥かに優れていることを、実証してくれる。たとえば、われわれの新しいアルゴリズムは、天野－斉藤の averaging method ([1]) よりも、**２０００倍余りも速い**ことが分かる。

2. 差分作用素に関する補助定理

はじめに、2つ差分作用素 Mf と Lf を、次式て定義する。

$$
\begin{aligned}
&Mf(x,y)\\
&=\frac{1}{4}\big(f(x+h,y+h)+f(x-h,y+h)+f(x-h,y-h)+f(x+h,y-h)\big)\ ,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

$$
Lf(x,y)=\frac{1}{h^2}\big(Mf(x,y)-f(x,y)\big)\ . \tag{2.2}
$$

ここで、$f=f(x,y)$ は実2変数関数とする。特にことわらない限り、h は十分に小さな正定数とする, *i.e.*, $0<h\ll 1$.

補題 2.1. $\mathbf{R}^2$ 上で定義された、任意の C^4 級の関数 $f(x,y)$ に対して、

$$
Mf(x,y)=f(x,y)+\frac{h^2}{2}\Delta f(x,y)+O(h^4) \tag{2.3}
$$

が、$\mathbf{R}^2$ の任意のコンパクト集合上でなりたつ。

証明. テイラーの定理によれば、

$$
\begin{aligned}
&f(x+\xi,y+\eta)=f(x,y)+\big(\xi\partial_x+\eta\partial_y\big)f(x,y)\\
&+\frac{1}{2!}\big(\xi\partial_x+\eta\partial_y\big)^2f(x,y)+\frac{1}{3!}\big(\xi\partial_x+\eta\partial_y\big)^3f(x,y)+O(\xi^4,\eta^4)
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

という等式が、任意の実数 ξ と η に対してなりたつ。(2.4) より

$$
\begin{aligned}
&f(x+h,y+h)+f(x-h,y+h)+f(x-h,y-h)+f(x+h,y-h)\\
&=4f(x,y)+2h^2f_{xx}(x,y)+2h^2f_{yy}(x,y)+o(h^4)\\
&=4f(x,y)+2h^2\Delta f(x,y)+O(h^4)
\end{aligned}
$$

が導き出される。したがって、(2.1) より、(2.3) が得られる。∎

注意. (2.3) と (2.2) より、次の等式が従う。

$$
Lf(x,y)=\frac{1}{2}\Delta f(x,y)+O(h^2)\ . \tag{2.5}
$$

補題 2.2. $\mathbf{R}^2$ 上で定義された、任意の重調和関数 $u(x,y)$ と任意の自然数 $n=1,2,\cdots$ に対して、

$$
u(x,y)=nM^{n-1}u(x,y)-(n-1)M^nu(x,y)+O(h^6)\sum_{\nu=0}^{n-1}\nu \tag{2.6}
$$

が、$\mathbf{R}^2$ の任意のコンパクト集合上でなりたつ。

証明. $n=1$ の場合 (2.6) は自明である。もし (2.6) が $n=k$ に対してなりたつならば、(2.2) により、

$$
\begin{aligned}
u &= kM^{k-1}u-(k-1)M^ku+O(h^6)\sum_{\nu=0}^{k-1}\nu \\
&= M^ku-kM^{k-1}(Mu-u)+O(h^6)\sum_{\nu=0}^{k-1}\nu \\
&= M^ku-kh^2M^{k-1}Lu+O(h^6)\sum_{\nu=0}^{k-1}\nu
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

がなりたつ。(2.2) は $u=Mu-h^2Lu$ を意味するので、(2.7) は

$$
\begin{aligned}
u &= M^k(Mu-h^2Lu)-kh^2M^{k-1}L(Mu-h^2Lu)+O(h^6)\sum_{\nu=0}^{k-1}\nu \\
&= M^{k+1}u-(k+1)h^2M^kLu+kh^4M^{k-1}L^2u+O(h^6)\sum_{\nu=0}^{k-1}\nu
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

を与える。一方、(2.5) は

$$
L^2u=\left(\frac{1}{2}\Delta\right)^2u+O(h^2)=O(h^2)
\tag{2.9}
$$

を保証する。(2.8) と (2.9) より、われわれは

$$
\begin{aligned}
u &= M^{k+1}u-(k+1)h^2M^kLu+O(h^6)k+O(h^6)\sum_{\nu=0}^{k-1}\nu \\
&= M^{k+1}u-(k+1)h^2M^kLu+O(h^6)\sum_{\nu=0}^{k}\nu
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

を得る。(2.2) と (2.10) より、

$$
\begin{aligned}
u &= M^{k+1}u-(k+1)h^2M^k\frac{1}{h^2}(Mu-u)+O(h^6)\sum_{\nu=0}^{k}\nu \\
&= (k+1)M^ku-kM^{k+1}u+O(h^6)\sum_{\nu=0}^{k}\nu
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

が従う。よって、(2.6) が $n=k+1$ に対しても成り立つことが証明された。∎

補題 2.3. $u(x,y)$ が $\mathbf{R}^2$ 上で定義された重調和関数であれば、

$$
\begin{aligned}
&(n+1)u(x,y) - nMu(x,y) \\
&= (n+k+1)M^k u(x,y) - (n+k)M^{k+1}u(x.y) + O(h^6)\sum_{\nu=n+1}^{n+k}\nu
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

が、$\mathbf{R}^2$ の任意のコンパクト集合上で、任意の自然数 $n,k=1,2,\cdots$ に対してなりたつ。

証明. (2.2), (2.9) と直接計算により、

$$
\begin{aligned}
&(n+1)u - nMu \\
&= Mu - (n+1)(Mu-u) \\
&= Mu - (n+1)h^2Lu \\
&= M(Mu-h^2Lu) - (n+1)h^2L(Mu-h^2Lu) \\
&= M^2u - (n+2)h^2MLu + (n+1)h^4L^2u \\
&= M^2u - (n+2)h^2MLu + (n+1)O(h^6) \\
&= M^2u - (n+2)M(Mu-u) + (n+1)O(h^6) \\
&= (n+2)Mu - (n+1)M^2u + (n+1)O(h^6)\ ,
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

i.e., $k=1$ のとき (2.12) はなりたつ。同様にして、

$$
\begin{aligned}
&(n+k+1)M^ku - (n+k)M^{k+1}u + O(h^6)\sum_{\nu=n+1}^{n+k}\nu \\
&= M^{k+1}u - (n+k+1)M^k(Mu-u) + O(h^6)\sum_{\nu=n+1}^{n+k}\nu \\
&= M^{k+1}u - (n+k+1)h^2M^kLu + O(h^6)\sum_{\nu=n+1}^{n+k}\nu \\
&= M^{k+1}(Mu-h^2Lu) - (n+k+1)h^2M^kL(Mu-h^2Lu) + O(h^6)\sum_{\nu=n+1}^{n+k}\nu \\
&= M^{k+2}u - (n+k+2)h^2M^{k+1}Lu + (n+k+1)h^4M^kL^2u + O(h^6)\sum_{\nu=n+1}^{n+k}\nu \\
&= M^{k+2}u - (n+k+2)h^2M^{k+1}Lu + (n+k+1)O(h^6) + O(h^6)\sum_{\nu=n+1}^{n+k}\nu \\
&= M^{k+2}u - (n+k+2)M^{k+1}(Mu-u) + O(h^6)\sum_{\nu=n+1}^{n+k+1}\nu \\
&= (n+k+2)M^{k+1}u - (n+k+1)M^{k+2}u + O(h^6)\sum_{\nu=n+1}^{n+k+1}\nu\ .
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

よって、任意の k に対して、(2.12) がなりたつ。∎

3. 数値－数式ハイブリッド アルゴリズム

補助定理 2.2 と 2.3 を再帰的に用いると、次の事実が示される：$u(x,y)$ が $\mathbf{R}^2$ 上で定義された重調和関数であるならば、

$$u(x,y)=\sum_{i,j}p_{ij}^{(n)}u(x_i^{(n)},y_j^{(n)})+O(h^6)\sum_{\nu=0}^{n}\nu \tag{3.1}$$

が、任意の自然数 $n,=1,2,3,\cdots$ に対してなりたつ。ただし、この再帰的な数式処理を無条件に行うのではなく、点 $(x_i^{(n)},y_j^{(n)})$ が境界 ∂D の $\varepsilon=2\sqrt{2}h$ 近傍に入っている場合には、何の変形も加えないものとする。ここで、$\{p_{ij}^{(n)}\}$ は $\sum_{i,j}p_{ij}^{(n)}=1$ なる数列の族を表し、$\{(x_i^{(n)},y_j^{(n)})\}$ は $\mathbf{R}^2$ の

$$(x_i^{(n)},y_j^{(n)})\in\{(x+kh,y+\ell h):\ k,\ell\in\mathbf{Z}\} \tag{3.2}$$

なる点からなる、ある種の格子点の集合の族を表す。前節で述べたように、h は十分に小さな正定数とする,*i.e.*, $0<h\ll 1$.

われわれの **数値－数式ハイブリッド法** は、(3.1) 式から従う。じっさい、われわれは $\{p_{ij}^{(n)}\}$ と $\{(x_i^{(n)},y_j^{(n)})\}$ を、n ついて帰納的に計算できるからである。

4. 数値一般解の公式

少し大雑把な言い方をすれば、(3.1) において、$u(x_i^{(n)},y_j^{(n)})$ を

$$\mu(x_i^{(n)},y_j^{(n)})=$$

$$\begin{cases}\phi\big(\wp(x_i^{(n)},y_j^{(n)})\big)+d(x_i^{(n)},y_j^{(n)})\psi\big(\wp(x_i^{(n)},y_j^{(n)})\big) & \text{if } d(x_i^{(n)},y_j^{(n)})<\varepsilon\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{4.1}$$

で置き換えることにより (*i.e.*, 点 $(x_i^{(n)},y_j^{(n)})$ が境界の ε 近傍に入っているときには、解の値 $u(x_i^{(n)},y_j^{(n)})$ を、境界条件 ϕ と ψ を用いてつくったその一次近似で置き換え、それ以外の場合はキャンセルすことにより)、われわれは 数値一般解

$$u(x,y)\sim\sum_{i,j}p_{ij}^{(n)}\mu(x_i^{(n)},y_j^{(n)}) \tag{4.2}$$

を得る。ここで、$d(x,y)=dist\big((x,y),\partial D\big)$, かつ $\varphi(x,y)$ は

$$d(x,y)=dist\big((x,y),(\xi,\eta)\big)$$

なる、境界 ∂D 上の点 (ξ,η) を表し、$\varepsilon=2\sqrt{2}h$ とする。容易に分かるように、最大値の原理より、このときの誤差のオーダーは

$$O\left(\sum_{d(x_i^{(n)},y_j^{(n)})\geq\varepsilon} p_{ij}^{(n)}\right)+O(h^6)\sum_{\nu=0}^{n}\nu \tag{4.3}$$

であることが分かる。さらに、直接計算により、

$$\sum_{d(x_i^{(n)},y_j^{(n)})\geq\varepsilon} p_{ij}^{(n)} \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty) \tag{4.4}$$

であることも分かる。

われわれは、(4.2) の右辺の計算を LISP を用いて行い、その結果を C の関数の形で出力させる。いいかえれば、(4.2) の計算のための数式処理を LISP で行い、その計算の結果得られた数式を、LISP に C の関数の形でシンボリックに表現させる。このようにして得られた C の関数が、我々の **数値一般解の公式** である。

5. 数値実験

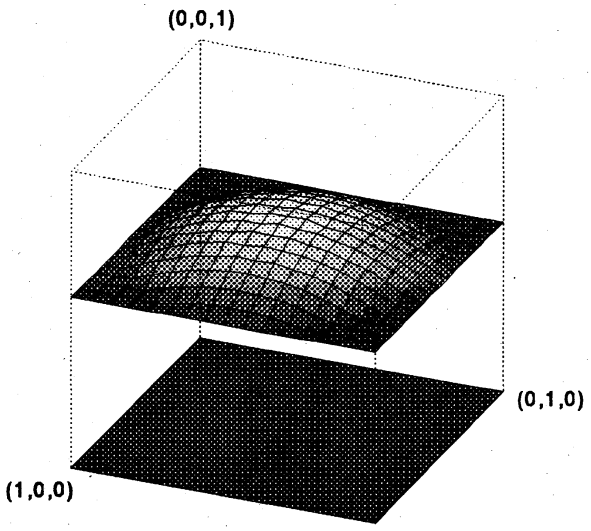
数値一般解の公式 を用いることにより、われわれは、次のようなディリクレ問題を、驚異的なスピードで解くことができる。

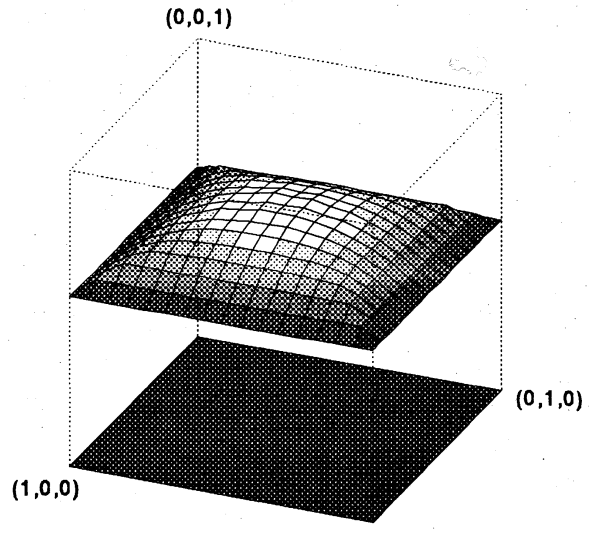
$$\begin{cases} \Delta^2 u=0 & \text{in } D \\ u=0.7-0.5^3,\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}=0.5 & \text{on } \partial D\ , \end{cases} \tag{5.1}$$

ここで $D=\big\{(x,y)\,:\,\sqrt{(x-0.5)^2+(y-0.5)^2}<0.5\big\}$ (*cf.* prob1.eps).

$$\begin{cases} \Delta^2 u=0 & \text{in } D \\ u=0.7-0.5^3,\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}=0.65 & \text{on } \partial D\ , \end{cases} \tag{5.2}$$

ここで $D=[0,1]\times[0,1]$ (*cf.* prob2.eps).





6. おわりに

§1 において、われわれは「2000 倍の速さで解ける」と述べた。確かに、この数値に嘘偽りはない。しかしながら、正直に言えば、これはフェアな表現ではない。というのは、われわれの数値一般解の公式を求めるには、LISP のプログラムを約 5 時間も走らせ続けなければならないからである。これは、単純な数値計算の約 120 倍の計算時間である。もしも、自らの手で数値一般解を構成して問題を解くのであれば、通常の数値計算の方が遥かに速いことになる。したがって、特に公式生成のアルゴリズムに興味がない限り、数値一般解の公式も他の公式と同様に、出来上がったものを利用した方が良いであろう。

参考文献

[1] K. Amano and T. Saito, Monte Carlo and averaging methods for biharmonic Dirichlet problem (to appear).

[2] Joel F. Bartlett, Scheme -> C a portable scheme-to-c compiler, *Research Report 89 1, DEC Western Research Laboratory, Palo Alto, California*, January 1989.

[3] J. H. Davenport, Y. Siret and E. Tournier, Computer Algebra, Systems and algorithms for algebraic computation, 2nd edition, *Academic Press*, 1993.

[4] T. Saito, Monte Carlo method for biharmonic boundary value problem and its application, *Thesis of Univ. Electro-Communications*, 1992 (in Japanese).