

Title	周期境界値問題に対する特異および特異に近い差分行列のSOR法(数値計算アルゴリズムの現状と展望)
Author(s)	石原, 和夫; 山本, 慎
Citation	数理解析研究所講究録 (1994), 880: 68-69
Issue Date	1994-07
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/84203">http://hdl.handle.net/2433/84203</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## 周期境界値問題に対する特異および特異に近い差分行列の SOR 法

大阪女子大学    石原 和夫    ( Kazuo Ishihara )  
 大阪女子大学    山本 慎    ( Makoto Yamamoto )

1. SOR 法.  $Av = b$ ,  $A = D - L - U = (a_{ij})$ ,  $1 \leq i, j \leq n$  とし,  $D, -L, -U$  は  $A$  の対角, 狭義の下三角, 狭義の上三角成分,  $a_{ii} \neq 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $J = D^{-1}(L + U)$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  を  $J$  の固有値,  $\omega$  を加速係数,  $H_\omega = (D - \omega L)^{-1} [(1 - \omega)D + \omega U]$ ,  $v_{k+1} = H_\omega v_k + \omega(D - \omega L)^{-1} b$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\rho(J) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ ,  $\gamma(J) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i|; \lambda_i \neq 1\}$ ,  $\delta(J) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i|; |\lambda_i| \neq 1\}$ , とする.

補題 1 [1, 4]. (i)  $A$  が convergent ( $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = O$ )  $\iff \rho(A) < 1$ .  
 (ii)  $\rho(A) = 1$  とする.  $A$  が semiconvergent ( $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$  が存在)  $\iff \gamma(A) < 1$  かつ  $A$  の固有値 1 に関するすべての elementary divisor が linear.

2. 差分方程式. 次のような周期境界条件の問題を考える.

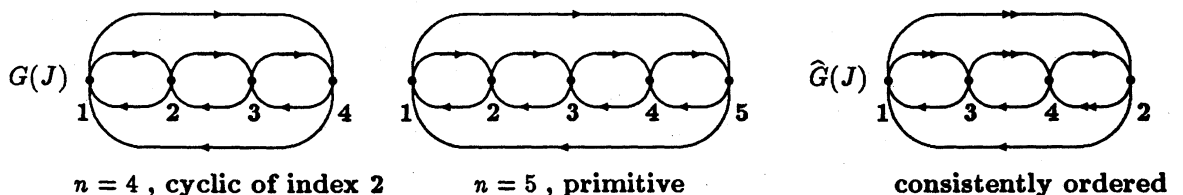
$$(1) \quad \begin{cases} y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x), & a \leq x \leq b \\ y(a) = y(b), & y'(a) = y'(b), \end{cases}$$

ここで  $p(x), q(x), r(x)$  は周期  $b - a$  の連続関数で,  $q(x) \geq 0$  とする.  $[a, b]$  を  $n$  等分し,  $h = \frac{b-a}{n}$  とし, 次のような 2 つのタイプの分点  $x_i$  を考える.



(1) を中心差分近似し,  $y(x_i)$  の近似解を  $v_i$  とすれば (1) の差分方程式は  $Av = b$  となる.

補題 2.  $h \cdot \max_{a \leq x \leq b} |p(x)| < 2$  とする.  $n$  が偶数のとき,  $J$  は cyclic of index 2,  $n$  が奇数のとき,  $J$  は primitive となる. また,  $n$  が偶数, 分割タイプ [II] ならば  $A$  は 2-cyclic, consistently ordered となる.



定理1.  $p(x) \equiv 0, q(x) \equiv 0, n$  が偶数, 分割タイプ [II],  $b \in \text{Im}A \Rightarrow A$  は特異. SOR 法は semi-convergent ( $0 < \omega < 2$ ) で,  $Av = b$  の解に収束し,  $\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \delta(J)^2}} = \frac{2}{1 + \sin \frac{2\pi}{n}}, \gamma(H_{\omega_{\text{opt}}}) = \min_{0 < \omega < 2} \gamma(H_{\omega})$ .

定理2.  $q(x) > 0, h \cdot \max_{a \leq x \leq b} |p(x)| < 2, n$  が偶数, 分割タイプ [II], とする.

$$(2) \quad \prod_{i=1}^n \left\{ 1 + \frac{1}{2} p(x_i) h \right\} = \prod_{i=1}^n \left\{ 1 - \frac{1}{2} p(x_i) h \right\}$$

$\Rightarrow A$  は正則で, SOR 法は convergent ( $\rho(H_{\omega}) < 1, 0 < \omega < 2$ ),

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - (\rho(J)^2)}}, \quad \rho(H_{\omega_{\text{opt}}}) = \min_{0 < \omega < 2} \rho(H_{\omega}),$$

$$\frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2}{2 + q_{\max} h^2}\right)^2}} \leq \omega_{\text{opt}} \leq \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2}{2 + q_{\min} h^2}\right)^2}}, \quad q_{\max} = \max_{a \leq x \leq b} q(x), \quad q_{\min} = \min_{a \leq x \leq b} q(x).$$

さらに,  $h = \frac{b-a}{n}$  が十分小ならば,  $\omega_{\text{opt}} \approx \frac{2}{1 + \sin \frac{2\pi}{n}}$ .

注意. 誤差評価  $|y(x_i) - v_i| = O(h^2)$  は得られる. 定理2の条件を満たさない時, SOR 法は種々の挙動をする. 数値例は講演時に示す. Neumann 型 2 点境界値問題の SOR 法については [3] 参照.

## 参考文献

- [1] Bermann, A. and Plemmons, R. J., Nonnegative matrices in the mathematical sciences, Academic Press, 1979.
- [2] Hadjidimos, A., On the optimization of the classical iterative schemes for the solution of complex singular linear systems, SIAM J. Alg. Disc. Math., 6 (1985), 555 - 566.
- [3] Ishihara, K. and Yamamoto, M., Optimum relaxation parameter of SOR iterations for discrete Neumann type arising from two-point boundary value problems, Math. Japon., 39 (1994), to appear.
- [4] Varga, R. S., Matrix iterative analysis, Prentice-Hall, 1962.
- [5] Young, D., Iterative solution of large linear systems, Academic Press, 1971.