数理解析研究所講究録
第885巻 1994年 224-234

「波動関数の収縮」とEPR問題

田中　正（Sho TANAKA）*

はじめに

量子力学には、昔からSchrödingerの猫の問題に代表されるような、ややもするとわれわれを非日常的な奇怪感やミステリーに導く問題が埋めこまれている。その種の問題のあるものは、学問的にも実際に未解決で、将来の発展につながるものもあるかもしれない。そのような問題に対しては何が本質的に未解決か、どこまでが解決ずみかを、明かにしておく必要があろう。量子力学における「波動関数の収縮」の問題はその代表例である。それについての筆者の理解は、基研研究会「量子力学的観測の理論」（１９９１年、３月）での「一般討論とコメント」（素研ー基研研究会報告、Vol.83,No.6,F-162(1991)）の中で簡単に述べた。それをさらに要約すると、次のようである。観測後の、測定器系を含む全体系の統計演算子の非対角項、いわゆる干渉項は原理的に消失することは無く、ただ測定器系の自由度Nの巨大性のために、その存在を実験的に検出することが実際に不可能であると言う意味で、実質的に消失する。つまり「波動関数の収縮」は測定器系の自由度の巨大性がもたらす現実の実験精度の限界と結びついた「近似概念」のもとで正しく把握されるべきであり、専ら現在の量子力学の枠組みの中で合理的に説明可能な問題であると考える。

一方 Bohr-Einstein 論争として発展した Einstein-Podolsky-Rosen(EPR) の問題は、量子力学における「不可分離性」の問題として、今日まで続いている。しかし、これについても一部に明白な誤解がある。すなわち、測定器系とは直接相互作用を持たない部分系の「状態」に変化が生ずる等の誤解があり、それが「不可分離性」の本質であるかのように理解されがちである。「不可分離性」の問題は以下で述べるように、部分系の間の量子論的な相関の問題である。この量子力学的な「相関関係」と物理学全般にひろく現れる原因ー結果の「因果関係」とのかかわりについては、これまで必ずしも議論が尽くされているとは言いがたい。

以下では、さきに小嶋氏と共同(I.Ojima and S.Tanaka,KUNS 1026 HE(TH)90/11)で試みたEPR問題の分析を、上で述べた趣旨から、さらに深めてみたい。

[Extended EPR-stateの特徴]

系I, IIが相互作用した後、十分離れて相互作用が切れた状態を考える。系I,IIの任意の最大観測量の組をそれぞれA,B, それの規格化直交状態を $|A_i>, |B_i>$(i=1,2,...N; ただしNは、

---

* 京都大学名誉教授

ヒルベルト空間の dim.) とする。 一方 A,B の測定装置系（それぞれ A,B と略記する）の対応する（巨視的）固有状態を $|\Phi_i^A>, |\Phi_i^B>$, また測定前のそれを i=0 で記述する。

いま extended EPR-state を

$$|\psi_{AB}>\equiv \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}|A_i>|B_i> \tag{1}$$

によって定義し、(A,B) の組を EPR pair とよぶ。この時、部分系 I,II の量子力学的状態を記述する（それ以外にない事に注意）統計演算子 $\rho_{I,II}$ は

$$\begin{aligned}\rho_I &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|A_i><A_i| = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|A_i'><A_i'| = \cdots \\ \rho_{II} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|B_i><B_i| = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|B_i'><B_i'| = \cdots\end{aligned} \tag{2}$$

となる。 ここで A', B'は A, B とユニタリー変換 $U(A,A'), U(B,B')$ によって結ばれる任意の最大観測量の組である：

$$\begin{aligned}|A_i'> &= \sum_j |A_j> U_{ji}(A,A') \\ |B_i'> &= \sum_j |B_j> U_{ji}(B,B')\end{aligned} \tag{3}$$

(2) より、EPR-state の部分系 I,II のもつ、次の特徴が注目される。

(i) すべてのオブザーバブルの測定値は、完全に分散する。

(ii) 個々の部分系内では、$A, A' \cdots (B, B' \cdots)$ いずれのオブザーバブルの固有状態のアンサンブルかは原理的に識別不可能、ただ I,II 系間の相関を通じてのみ意味をもつ。実際、

$$|\psi_{AB}>=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i,j}\alpha_{ij}|A'_i>|B'_j> \tag{4}$$

$$\alpha_{ij}\equiv\sum_{l}U^*_{il}(A,A')U^*_{jl}(B,B') \tag{5}$$

このことから $|\psi_{AB}>$ に対して EPR pair は一意的では無く、無数の $pair(\widetilde{A},\widetilde{B}),\cdots$ が許される事が分かる。

$$|\psi_{AB}\rangle=\left|\psi_{\widetilde{A}\widetilde{B}}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i}\left|\widetilde{A}_i\right\rangle\left|\widetilde{B}_i\right\rangle=\cdots \tag{6}$$

ただしここで

$$U_{ij}(A,\widetilde{A})=U^*_{ij}(B,\widetilde{B}) \tag{7}$$

[EPR 問題の種々の表現]

EPR 論争では、$(A,B)\sim$ (位置)、$(\widetilde{A},\widetilde{B})\sim$(運動量) が選ばれた。 Yukawa は、EPR 問題をきわめて象徴的な形で次のように述べている (湯川著作集9、p213,p224)。

[Y]「... 運動量の決まった状態と、位置の決まった状態とは系 I にとって全く別の状態であった。 ところが、そのどちらかが、系 II についての測定によって、系 I に直接ふれることなしに選び出されることになったのである。... 当の電子 (系 I) は、自分の位置がきめられたのか、運動量がきめられたのかについて ”われ関せず” なのである。... そういう選択が一方的にできるというのは実に奇怪なことである。」

上の表現に対して、やや奇怪感の少ない表現として、つぎのものが考えられる・

[P] 系 II の測定結果 $B_i(\widetilde{B}_i)$ から、系 I の測定値 $A_i(\widetilde{A}_i)$ が、100% の確実度で予見できる。

これら[Y],[P]に対して、奇怪感を全く伴わない見解[S]がある。

[S] EPR-state $|\psi_{AB}>$ においては、任意の EPR pair(A,B),$(\widetilde{A},\widetilde{B}),\ldots$の（同時）測定に際して、測定値の間に 100 %の相関がある。

さて[Y],[P]には、程度の差はあれ、奇怪感が伴うのは、系 I および系 II の測定時間に前後関係があって、

$$
\begin{aligned}
B_i &\rightarrow |A_i> \\
\widetilde{B}_i &\rightarrow |\widetilde{A}_i>
\end{aligned}
\tag{8}
$$

のように、原因 →結果の「因果関係」が含意されているためである。そしてこの因果関係は何となく瞬時に伝播する「相互作用」* と言う考えに導く。

それに対して[S]は、因果関係とは明白に異なる「量子力学的な相関」の見地に立つものである。この「量子力学的相関」は、EPR-state が準備される過程で、あらかじめ作られていたと考えられるべきものである。以下では、それらの間の相互の関係を考察しながら、最終的にこの[S]が妥当な見地であることをしめす。

そこでまず議論の出発点として、[Y],[P],[S]のいずれにも共通して、次のことに留意すべきである。今考察のもとにある EPR-state $|\psi_{AB}>$のもとには、それによって記述される無数のアンサンブルが実験的に準備され得ること、そして I,II 系の双方にたいして、その前後関係を考えるかどうかは別として、それぞれ A および B の無限回の測定を行い得ることを前提にしている。実際、[Y]においても、II 系の測定値 $B_i(\widetilde{B}_i)$ に対して、I 系に ”選びだされる” のは、量子力学的固有状態 $|A_i>$ $\left(\left|\widetilde{A}_i\right>\right)$ なのであって、ただ（一回の測定で） $\mathrm{A}_i(\widetilde{A}_i)$ 一値が見いだされる（それだけでは偶然とみなされうる）というだけでは無く、原理的には無限回測定してつねにそうであることを意味している。

このことに関係して、つぎの d'Espagnat の問題提起[D]（「量子力学における観測の理論」町田　茂訳、p 8 7）は、以下の考察と深い関わりをもつ。それは上に述べた I,II 系の測定 A,B の前後関係を問題にするものであって、

⋆ このような「神秘的相互作用」概念の介入を許さないためにも、ハミルトニアンを通じてのみ導入される量子力学での「相互作用」概念は、正確に用いられるべきである。” 波動関数と検出器との相互作用” というような表現（並木：[素研一基研研究会 (1991.3) 報告]ibid.F-88;「量子力学入門」（岩波）p105,...）は、少なくともそのままでは不適切である。

$[D]$ ”波動関数の収縮”は、測定 A によるか、測定 B によるか。

を問題にする。そして以下で述べる様な理由で、それは時間的にはじめに行われた測定によると結論する。しかし、もしも測定 A,B が、相対論的意味で ”空間的”位置関係で行われるとすると、(互いに Lorentz 変換によって結ばれる) 観測者によって測定 A,B の前後関係は一般に変わりうる。このことは”波動関数の収縮”が観測者の主観によらない客観的、実在的なものであるとする見地を危うくする深刻な問題であると結論している。

以上の問題に対して、われわれは、0jima-Tanaka に従って、EPR pair (A,B) の測定結果の 100% 相関の本性を、non-EPR pair $(\widetilde{A}, B)$ の測定結果の (有限) 相関の極限として理解することを試みる。

[部分系と全体系]

まず以下の考察で重要となることは、EPR-state 下の部分系の統計演算子 $\rho_{I,II}$ は、相手系の測定において不変 (Appendix において証明) であるばかりでなく、自系の測定においても、その前後においては不変であることが (以下の運算でも) 容易に確かめられる。そして部分系がこの $\rho_{I,II}$ で与えられるとき、全体系の量子力学的状態は一意的に決まらないばかりでなく、表 I に見るように、無数の純粋状態 (種々の EPR-state) および無数の混合状態が許されることが、EPR 問題の本質をなしていることが分かる。

後に議論されるように、この表で注目すべきことは、EPR-state $|\psi_{AB}\rangle$ に対する A, B あるいは AB いずれの測定においても、

$$|\psi_{AB}\rangle \rightarrow \rho_{AB}(= \frac{1}{N}\sum_i |A_i\rangle |B_i\rangle \langle B_i| \langle A_i|) \tag{9}$$

のように、一挙に共通の ρ_{AB} に移行する事である。

他方、non-EPR pair $(\widetilde{A}, B)$ の場合、 $\widetilde{A}, B$ の継時的 $(sequential)$, および $\widetilde{A}B$ の同時的測定においては、図 1 に示すように、一般に相異なる混合状態 $\rho_{\widetilde{A}}, \rho_B$ および $\rho_{\widetilde{A}B} = \rho_{B\widetilde{A}}$ が出現する。

表 I　全体系 (部分系が ρ_I, ρ_{II} をもつとき)

(EPR pure states)

$$|\psi_{AB}>=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_i|A_i>|B_i>$$
$$||$$
$$|\psi_{\widetilde{A}\widetilde{B}}>=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_i|\widetilde{A}_i>|\widetilde{B}_i>$$
$$\nparallel$$
$$|\psi_{\widetilde{A}B}>=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_i|\widetilde{A}_i>|B_i>$$
$$\cdots$$

測定

$(A, B\, or\, AB)$ $(\widetilde{A}, \widetilde{B}\, or\, \widetilde{A}\widetilde{B})$ $(\widetilde{A}, B\, or\, \widetilde{A}B)$

(Mixed states)

$$\rho_{AB}\sim\frac{1}{N}\sum_i A_i>|B_i><B_i|<A_i| \leftarrow B$$
$$\nparallel$$
$$\rho_{\widetilde{A}\widetilde{B}}=\frac{1}{N}\sum_i|\widetilde{A}_i>|\widetilde{B}_i><\widetilde{B}_i|<\widetilde{A}_i| \leftarrow \widetilde{A}$$
$$\nparallel$$
$$\rho_{\widetilde{A}B}\sim\frac{1}{N}\sum_i|\widetilde{A}_i>|B_i><B_i|<\widetilde{A}_i|$$
$$\rho=\sum c_{ijkl}|A_i>|B_j><B_k|<A_l| \leftarrow \widetilde{A}B$$
$$(\sum_j c_{ijjl}=\sum_j c_{jilj}=\delta_{il})$$

図1

$$|\psi_{AB}>\xrightarrow{B}\tilde{\rho}_B\xrightarrow{\widetilde{A}}\tilde{\rho}_{B\widetilde{A}} \quad (path1)$$
$$|| \qquad \nparallel \qquad ||$$
$$|\psi_{\widetilde{A}\widetilde{B}}>\xrightarrow[\widetilde{A}]{}\tilde{\rho}_{\widetilde{A}}\xrightarrow[B]{}\tilde{\rho}_{\widetilde{A}B} \quad (path2)$$
$$\tilde{\rho}(t) \quad (path3)$$

そこで実際に、図1の それぞれの　path に沿って、変化を追ってみよう。

path 1:まず (B −測定) をおこなう。

$$\frac{1}{\sqrt{N}}(\sum_i |A_i\rangle |B_i\rangle) \left|\Phi_0^B\right\rangle \to \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i |A_i\rangle |B_i\rangle \left|\Phi_i^B\right\rangle \tag{10}$$ ★

従ってこの時の (I+II) 系の統計演算子 $\tilde{\rho}_B$ は、

$$\tilde{\rho}_B = \frac{1}{N} \sum_i |A_i\rangle |B_i\rangle \langle B_i| \langle A_i| (= \rho_{AB}) \tag{11}$$

続いて ($\widetilde{A}$ − 測定) を行う。

$$\frac{1}{\sqrt{N}}(\sum_i |A_i\rangle |B_i\rangle \left|\Phi_i^B\right\rangle) \left|\Phi_0^{\widetilde{A}}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}(\sum_{ij} U_{ij}(\widetilde{A}, A) \left|\widetilde{A}_j\right\rangle |B_i\rangle \left|\Phi_0^B\right\rangle) \left|\Phi_0^{\widetilde{A}}\right\rangle$$
$$\to \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{ij} U_{ji}(\widetilde{A}, A) \left|\widetilde{A}_j\right\rangle |B_i\rangle \left|\Phi_i^B\right\rangle \left|\Phi_j^{\widetilde{A}}\right\rangle \tag{12}$$

従って、この時の (I+II) 系の統計演算子 $\tilde{\rho}_{B\widetilde{A}}$ は、

$$\tilde{\rho}_{B\widetilde{A}} = \frac{1}{N} \sum_{ij} |U_{ji}(\widetilde{A}, A)|^2 |A_j\rangle |B_i\rangle \langle B_i| \left\langle \widetilde{A}_j \right| \tag{13}$$

(path 2):まず ($\widetilde{A}$ 測定) をおこなおう。

$$\frac{1}{\sqrt{N}}(\sum_i \left|\widetilde{A}_i\right\rangle \left|\widetilde{B}_i\right\rangle) \left|\Phi_0^{\widetilde{A}}\right\rangle \to \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i \left|\widetilde{A}_i\right\rangle \left|\widetilde{B}_i\right\rangle \left|\Phi_i^{\widetilde{A}}\right\rangle \tag{14}$$

★ 当然の事として、この過程で　系 I の量子力学的状態を記述する唯一の量、統計演算子 ρ_I は、不変である（より一般には、Appendix　をみよ。)。これに対して、(10) の両辺を、$|A_i\rangle (i = 1, 2, \cdots, N)$ の ”重ねあわせ” の様に解釈して、その ”重ねあわせ係数” $|B_i\rangle \left|\Phi_0^B\right\rangle$ (左辺) が、$|B_i\rangle \left|\Phi_i^B\right\rangle$(右辺)　に変わると見る見解がある（町田　茂「量子論の新段階」、p １１２−１１４)。そのことから、系 II の測定によって、あたかも系 I の ”状態” が変わったかのように考え、それを「不可分離性」の本質とするのは、妥当で無い。系 I の量子力学的 ”状態” を記述する量は、あくまでも統計演算子以外にはなく、それは不変である。

この段階の（I+II）系の統計演算子は

$$\tilde{\rho}_{\widetilde{A}} = \frac{1}{N}\sum_i \left|\widetilde{A}_i\right\rangle \left|\widetilde{B}_i\right\rangle \left\langle\widetilde{B}_i\right| \left\langle\widetilde{A}_i\right| (= \rho_{\widetilde{A}\widetilde{B}}) \tag{15}$$

続いて（B-測定）を行う。

$$\frac{1}{\sqrt{N}}(\sum_i \left|\widetilde{A}_i\right\rangle \left|\widetilde{B}_i\right\rangle \left|\Phi_i^{\widetilde{A}}\right\rangle) \left|\Phi_0^B\right\rangle \to \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{ij} U_{ji}(B,\widetilde{B}) \left|\widetilde{A}_i\right\rangle \left|B_j\right\rangle \left|\Phi_i^{\widetilde{A}}\right\rangle \left|\Phi_j^B\right\rangle \tag{16}$$

従ってこの時 (I+II) 系の統計演算子は、

$$\tilde{\rho}_{\widetilde{A}B} = \frac{1}{N}\sum_{ij} |U_{ji}(B,\widetilde{B})|^2 \left|\widetilde{A}_i\right\rangle \left|B_j\right\rangle \left\langle B_j\right| \left\langle\widetilde{A}_i\right| \tag{17}$$

ただし (7)　を用いて、

$$U_{ij}(\widetilde{A},A) = U_{ji}^*(A,\widetilde{A}) = U_{ji}(B,\widetilde{B}) \tag{18}$$

が成り立つことに注意すると、

$$\tilde{\rho}_{B\widetilde{A}} = \tilde{\rho}_{\widetilde{A}B} \tag{19}$$

となって、結局　図1 に示されるように、path 1 と path 2 の終状態は一致する事がわかる。

(path 3): 最後に、$B,\widetilde{A}$の同時進行の測定について考えよう。図1 が示すように、この場合、容易な考察から、

(a) I,II 系の統計演算子は一般に $\tilde{\rho}_I(t) \neq \rho_I, \tilde{\rho}_{II}(t) \neq \rho_{II}$　となり、

(b) (I+II) 系は、もはや一般に path 1,path 2 の $\tilde{\rho}_B, \tilde{\rho}_{\widetilde{A}}$ を通過せず、その統計演算子の時間発展は

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(t) &= \sum c_{ijkl}(t) \left|A_i\right\rangle \left|B_j\right\rangle \left\langle B_k\right| \left\langle A_l\right| \\ &\to_{t\to\infty} \tilde{\rho}_{B\widetilde{A}} = \tilde{\rho}_{\widetilde{A}B} \end{aligned} \tag{20}$$

となる。

さてはじめの EPR-pair (A,B) の測定は、これまでの non-EPR pair $(\widetilde{A}, B)$ の測定の極限として、図2のように示される。

図2

$$
\begin{array}{ccccccl}
|\psi_{AB}\rangle & \xrightarrow{B} & \rho_{BA} & \xrightarrow{A} & \rho_{BA} & & (path1) \\
 & & \| & & \| & & \\
|\psi_{AB}\rangle & \xrightarrow[A]{} & \rho_{AB} & \xrightarrow[B]{} & \rho_{AB} & & (path2) \\
 & \searrow & \rho(t) & \nearrow & & & (path3)
\end{array}
$$

さきに触れた様に、この極限では B あるいは A 単独の測定の段階で既に、(I+II) 系は A,B の継時的 (sequential) あるいは同時的測定の結果と同じ $\rho_{AB} = \rho_{BA}$ に移行する。d'Espagnat が "波動関数の収縮" の出現を図2の点線の時点に設定したのも、この事実に促されての結果である。しかしそこで指摘されたように、一般に Lorentz 変換のもとでは、path 1, path 2 は path 3 に移行する可能性があり、その場合は A,B の双方の測定終了時において始めて、$\rho_{AB} = \rho_{BA}$ 状態が出現する。

（むすび）

以上の考察から、まず d'Espagnat の問題提起については、EPR pair, non-EPR pair の何れの場合も、測定順序によらない、量子論的な相関状態の出現 (physical reduction) は、双方の測定の終了時点と考えるべきであることがわかる。

また EPR 問題の奇怪感の起源は次のように理解される。すなわち、$|\psi_{AB}\rangle = \left|\psi_{\widetilde{A}\widetilde{B}}\right\rangle$ にたいして、B(位置) あるいは $\widetilde{B}$(運動量) の測定を行うとき、I, II の部分系の状態は ρ_I, ρ_{II} で不変にとどまるにも拘らず、全体の $(I + II)$ 系は互いに（位置）あるいは（運動量）の 100 %相関した, 相異なる状態： $\rho_{AB} = \frac{1}{N}\sum_i |A_i\rangle |B_i\rangle \langle B_i| \langle A_i|$ および $\rho_{\widetilde{A}\widetilde{B}} = \frac{1}{N}\sum_i \left|\widetilde{A}_i\right\rangle \left|\widetilde{B}_i\right\rangle \left\langle \widetilde{B}_i\right| \left\langle \widetilde{A}_i\right|$ に移行する。このような部分系と全体系の統計演算子に関する量子論的な合成則の中に、EPR 問題の本質が合理的に理解される。

最後にこれもよく言われる 不可分離性の持つ非局所的特性、あるいは非局所的相関性に伴いがちな奇怪感について考えよう。実際量子論それ自体は、固有の長さの単位を含まないので、理論的には原子的スケールと宇宙的スケールの間にも特に質的な差は無い。しかし現実には、われわれに奇怪感をもたらす大きなスケールに亙る量子論的な相関状態を純粋に（他系との相互作用を全く

遮断して）作り出すことも、またそれを維持することもほとんど不可能であることに留意すべきである。つまりこの奇怪感はそれをもたらす状況設定の非現実性に解消される。

APPENDIX

（II 系の B 測定における I 系の時間発展について）

測定器 B を含む全体系 (I+II+B) の統計演算子 $\rho(t)$ の時間発展は

$$\dot{\rho}(t) = -i[\rho, H] \tag{A1}$$

に従う。 ここに H は、全体系の Hamiltonian で

$$H = H(I) + H(II + B)$$

であたえられる。H(II+B) は、(II+B) 系の、相互作用を含む Hamiltonian で、その固有状態を $|\Psi_\alpha\rangle$、固有値を E_α とする。また H(I) の固有状態を $\left|\Phi_i^I\right\rangle$, 固有値を E_i^I とする。

このとき I 系の統計演算子の行列要素

$$\rho_I^{(ij)}(t) \equiv \sum_\alpha \left\langle \Phi_i^I \right| \langle \Psi_\alpha | \rho | \Psi_\alpha \rangle \left| \Phi_j^I \right\rangle \tag{A2}$$

の時間発展は、次のように求められる。

$$\dot{\rho}_I^{(ij)} = -i \sum_\alpha \left\langle \Phi_i^I \right| \langle \Psi_\alpha | [\rho, H(I)] | \Psi_\alpha \rangle \left| \Phi_j^I \right\rangle - i \sum_\alpha \left\langle \Phi_i^I \right| \langle \Psi_\alpha | [\rho, H(II+B)] | \Psi_\alpha \rangle \left| \Phi_j^I \right\rangle$$

（右辺の第 2 項が消えて）

$$= -i \sum_\alpha \left\langle \Phi_i^I \right| \langle \Psi_\alpha | [\rho, H(I)] | \Psi_\alpha \rangle \left| \Phi_j^I \right\rangle = -i(E_j^I - E_i^I)\rho_I^{(ij)}(t) \tag{A3}$$

従って

$$\rho_I^{(ij)}(t) = \rho_I^{(ij)}(0) e^{-i(E_j^I - E_i^I)t} \tag{A4}$$

つまり、予想される通り、系 I は自由発展している事が分かる。

更に、いまの EPR-state の場合は、

$$\rho_I(0) = \rho_I = \frac{1}{N} \sum_i \left| \Phi_i^I \right\rangle \left\langle \Phi_i^I \right| \tag{A5}$$

の為、結局

$$\rho_I^{(ij)}(t) = \rho_I^{(ij)}(0) \tag{A6}$$

となって、時間的に不変である事がわかる。