

## On the sum of four cubes and a product.

---

Koichi Kawada (University of Tsukuba)

川田 浩一 (筑波大学大学院)

### § 1. はじめに。

加法的整数論と呼ばれる分野では, Goldbach問題, 双子素数問題, Waring問題, 加法的約数問題などのように, 素数や, 平方数, 立方数などの中乗数, あるいは指定された個数の因子の積による和(または差)の形で, 自然数を表す問題を扱う。上に例として挙げた有名な問題はいずれも, 素数だけの和, 立方数だけの和, といって, たよりに一種類のタイプの数の和に関する問題であるが, それ以外に, 素数と2個の平方数の和などのように異なった種類の数の和 (mixed sum などといわれる) に関しても多くの研究がある。

単に mixed sum といってもいろいろな形がありうる。が, 自然数  $N$  を指定された形の和を表すときの表し方の個数に対する漸近式 (asymptotic formula) を得ることを目標とした場合, この分野での有力な方法である Hardy-Littlewood の circle method に関してすでに得られている結果を用いて簡単に扱えるものを

除くと，自然数  $N$  の mixed sum による表し方として次の四種類がある。

(ア)  $N = m_1^2 + m_2^3 + m_3^5$  のようないくつかの中乗数の和。

(イ)  $N = p + (\text{いくつかの中乗数の和})$  の形。(ただし，以下  $p$  は常に素数を表す。)

(ウ)  $N = n_1 n_2 \cdots n_l + (\text{いくつかの中乗数の和})$  の形。(  $l \geq 2$  ,  $n_j$  は自然数)

(エ)  $N = p + n_1 n_2 \cdots n_l$  の形。(  $l \geq 2$  ,  $n_j$  は自然数)

このうち本稿では，(イ) および (ウ) の形について扱う。内容の詳しい部分については，プレプリント [6] を参照されたい。

## §2. circle method を用いる場合。

自然数  $N$  に対して，

$$N = p + m_1^k + m_2^k + \cdots + m_u^k \quad (p \text{ は素数, } k \geq 2, m_j \text{ は自然数})$$

の解の個数を  $L_{k,u}(N)$  とし，

$$N = n_1 n_2 \cdots n_l + m_1^k + m_2^k + \cdots + m_u^k \quad (l \geq 2, k \geq 2, n_j, m_j \text{ は自然数})$$

の解の個数を  $R_{l,k,u}(N)$  とする。これらを扱う際には， $u$  は小さくなるほど，また  $l$  は大きくなるほど，問題は難しくなる。

$L_{k,u}(N)$  および  $R_{l,k,u}(N)$  に対して予想される漸近式がほとんどすべての  $N$  について成立することは， $u=1$  の場合の Misch

( $k=2$ ) および筆者 ( $k \geq 3$ ) の議論によりわかってゐる。そこで、 $u$  をどのくらい大きくすれば、すべての (十分大きい)  $N$  に対して漸近式を示すことができるか、を考えることにする。まず、この §2 では Circle method を用いてこの問題を扱う際のポイントについて触れておく。

次のように関数を定義する。

$$P(\alpha) = \sum_{p \leq N} e(p\alpha), \quad D_k(\alpha) = \sum_{n \leq N} d_k(n) e(n\alpha), \quad F_k(\alpha) = \sum_{m \leq N^{1/k}} e(m^k \alpha)$$

ここで、 $e(\alpha) = e^{2\pi i \alpha}$  であり、 $d_k(n)$  は自然数  $n$  を  $k$  個の自然数の積として  $n = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$  と表すときの因子の組  $(n_1, n_2, \dots, n_k)$  の個数である。すると、

$$I_{k,u}(N) = \int_0^1 P(\alpha) F_k(\alpha)^u e(-N\alpha) d\alpha,$$

$$R_{k,u}(N) = \int_0^1 D_k(\alpha) F_k(\alpha)^u e(-N\alpha) d\alpha$$

とかけると、どちらも同様なので、しばらく  $R_{k,u}(N)$  についてのみかくことにする。

$\mu$  を  $x - \tau - Q_1$ ,  $Q$  (これらはあとどうまく選ぶわけだが) に対して、

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{g \leq Q} \bigcup_{\substack{a=1 \\ (a,g)=1}}^g \left[ \frac{a}{g} - \frac{1}{gQ}, \frac{a}{g} + \frac{1}{gQ} \right]$$

$$\mathfrak{m} = \left[ \frac{1}{Q}, 1 + \frac{1}{Q} \right] \setminus \mathfrak{M}$$

と定義し,

$$I_{\text{maj}} = \int_{\text{maj}} D_{\ell}(\alpha) F_k(\alpha)^u e(-N\alpha) d\alpha,$$

$$I_m = \int_m D_{\ell}(\alpha) F_k(\alpha)^u e(-N\alpha) d\alpha$$

とすれば,

$$R_{\ell, k, u}(N) = I_{\text{maj}} + I_m$$

となる。  $R_{\ell, k, u}(N)$  の予想される大きさは  $N^{\frac{u}{k}} (\log N)^{\ell-1}$  の定数倍くらいなので,  $R_{\ell, k, u}(N)$  の漸近式を示すためには,

$$I_{\text{maj}} = (\text{期待される主項}) + o(N^{\frac{u}{k}} (\log N)^{\ell-1})$$

$$I_m = o(N^{\frac{u}{k}} (\log N)^{\ell-1}) \quad \dots \textcircled{1}$$

を示せばよいわけである。この二つを比べると後者のほうが難しく, 結局  $R_{\ell, k, u}(N)$  に対する漸近式が得られるための  $u$  の条件は, ①が示せる  $u$  の条件ということになる。そこで, いわゆる minor arc 上の積分  $I_m$  をどうおさえるかが問題になる。

その  $I_m$  をおさえる簡単な方法は二つあり, 一つは Cauchy-Schwartz の不等式を用いて,

$$|I_m| \leq \left( \int_0^1 |D_{\ell}(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_m |F_k(\alpha)|^{2u} d\alpha \right)^{\frac{1}{2}}$$

とするものである。ここで,

$$\int_0^1 |D_{\ell}(\alpha)|^2 d\alpha = \sum_{n \leq N} d_{\ell}(n)^2 \ll N (\log N)^{\ell^2-1}$$

であるから, ①を示すには, 任意に固定した正の定数  $A$  に対して,

$$\int_m^N |F_k(\alpha)|^{2u} d\alpha \ll N^{\frac{2u}{k}-1} (\log N)^{-A} \quad \dots\dots (2)$$

が示せば十分である。この(2)は、大雑把にいうと、 $N$ を $2u$ 個の $k$ 乗数の和として表す Waring 問題について、その表し方の個数に対する漸近式が示せる、ということである。

例えば、Hua の不等式により  $2u \geq 2^k + 1$  ならば(2)は示せるので、

$$u \geq 2^{k-1} + 1 \quad \text{ならば} \quad R_{l,k,u}(N) \text{ の漸近式は示せる}$$

ということになる。

もう一つの方法は、

$$|I_m| \leq \max_{\alpha \in m} |D_l(\alpha)| \int_0^1 |F_k(\alpha)|^u d\alpha$$

とするもので、これは例えば

$$u = 2^{k-1}, \quad l \leq k-1$$

のときに(2)を、したがって  $R_{l,k,u}(N)$  の漸近式を与える。

### §3. $R_{l,k,u}(N)$ について。

さて、 $R_{l,k,u}(N)$  を初めて扱ったのは Page である。彼の議論 [8], [9] は circle method に基づくもので、それにより  $k=2$  のとき、 $u \geq 3$ ,  $l \geq 2$  および  $u=2$ ,  $l=2$  の場合に  $R_{l,2,u}(N)$  の漸近式が示された。 $k=2$  の場合はその後 Hooley [3] により  $u=1$ ,  $l=2$  の場合が解決され、Linnik [7] は彼の dispersion method により  $u=2$ ,  $l \geq 3$  の場合も扱えることを示した。以上

をまとめると (下の図1参照),  $k=2$  の場合に残って いるのは  $u=1, l \geq 3$  のときとなる。

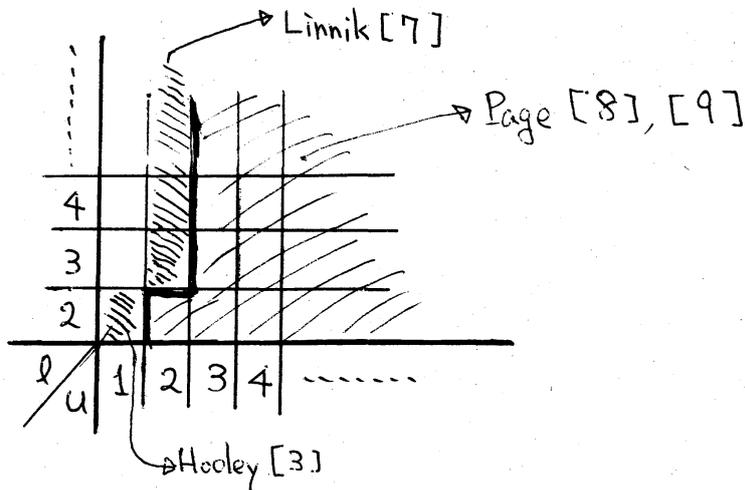


図1...  $k=2$  のときの  $R_{l,2,u}(N)$  の漸近式の示された部分

次に  $k=3$  の場合を考える。§2. で示したように,

$$u \geq 5 \quad \text{および} \quad u=4, l=2$$

のときは circle method により  $R_{l,3,u}(N)$  の漸近式が比較的容易に証明できる。その限界を越えるため, Hooley は circle method と異なるアプローチを考え, その方法によって

$$u=4, l=3 \quad ([4]) \quad \text{および} \quad u=3, l=2 \quad ([5])$$

の場合を解決した (図2)。

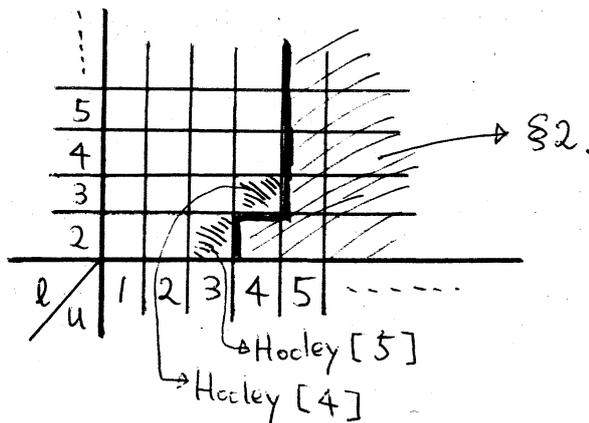


図2.  $k=3$  のときの  $R_{l,3,u}(N)$  の漸近式の示された部分

本稿で報告する主結果の一つは、 $u=4, l \geq 3$  の場合である。

定理1.  $l \geq 3$  に対して,

$$R_{l,3,4}(N) = N^{\frac{4}{3}} \sum_{j=0}^2 \xi_l^{(j)}(N) (\log N)^{l-1-j} + O\left(N^{\frac{4}{3}} (\log N)^{l-4} (\log \log N)^{\frac{l(l-1)(l+4)}{6} + 3}\right)$$

ここで  $\xi_l^{(j)}(N)$  は具体的に表しできる数で、 $\xi_l^{(j)}(N) \ll 1$ , また  $\xi_l^{(0)}(N) \gg 1$  をみたす。O記号や  $\ll$  記号に含まれる定数は  $l$  のみに依存する。

$l=3$  の場合、この定理1は [4] に含まれる Hooley の結果の改良になっている。

§4.  $I_{k,u}(N)$  について。

$k=2$  の場合は、 $u \geq 3$  なら §2 で扱ったように circle method でできるわけだが、その限界をこえて Linnik [7] によって  $I_{2,2}(N)$  の漸近式が示されている。

$k=3$  の場合は、§2 で扱ったようにできる限界は  $u \geq 5$  である。  $u=4$  に対しては、十分大きい  $N$  に対して  $I_{3,4}(N) > 0$  となること、つまり十分大きい自然数は1つの素数と4つの立方数の和として表わせることは知られている。これは Davenport [1] による「ほとんどすべての自然数は4つの立方数の和と

して表せる」という形の結果から容易に導かれるものである。  
この  $I_{3,4}(N)$  に対しての漸近式を、定理1と同じ方法によって示すことができる。

定理2.

$$I_{3,4}(N) = \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)^3 G_0(N) \int_2^N \frac{(N-t)^{\frac{1}{3}}}{\log t} dt + O\left(\frac{N^{\frac{4}{3}} (\log \log N)^4}{(\log N)^4}\right)$$

ここで  $\Gamma$  はガンマ関数を表し、 $G_0(N)$  は特異級数と呼ばれる具体的に表すことができる数で、 $1 \ll G_0(N) \ll 1$  をみたす。

### §5. 証明の概略。

1986年, Vaughan [10] は Waring問題の研究において, circle method に関して新しい巧妙な方法を開発した。それによって, Huaの結果を改良して  $2u=2^k$ , つまり  $u=2^{k-1}$  に対して不等式②が証明された ( $k \geq 3$ )。ただし, ②における定数  $A$  はいくらでも大きくとれるわけではなく, ある正の定数  $A$  に対して②を示したのである。例えば  $k=3$  の場合は  $0 < A < 1$  なければならない。よって §2 で示したように Cauchy-Schwartz の不等式を用いて  $R_{k,3,4}(N)$  や  $I_{3,4}(N)$  の扱いをすぐに Waring問題の Vaughanの結果に帰着することはできない。そこで, この点にもう一つ工夫を加えるわけである。

いま、適当に固定する正の定数  $B (\geq 5)$  に対し、

$$\mathcal{A} = \{m \leq N^{\frac{1}{3}}; m \text{ は } (\log N)^{5B} < p \leq N^{\frac{1}{21}} \text{ なる素因数 } p \text{ をもたない}\}$$

とし、 $\overline{\mathcal{A}}$  を  $N^{\frac{1}{3}}$  以下の自然数全体に対する  $\mathcal{A}$  の補集合、つまり、

$$\overline{\mathcal{A}} = \{m \leq N^{\frac{1}{3}}; m \text{ は } (\log N)^{5B} < p \leq N^{\frac{1}{21}} \text{ なる素因数 } p \text{ をもつ}\}$$

とする。また集合  $\mathcal{B}$  に対して

$$F(\alpha; \mathcal{B}) = \sum_{\substack{m \leq N^{\frac{1}{3}} \\ m \in \mathcal{B}}} e(m^3 \alpha)$$

とおく。すると Vaughan [10] の方法は、任意の集合  $\mathcal{B}$  に対し

$$\int_m |F(\alpha; \overline{\mathcal{A}})|^2 |F(\alpha; \mathcal{B})|^4 |F_3(\alpha)|^2 d\alpha \ll N^{\frac{5}{3}} (\log N)^{-B} \dots \textcircled{3}$$

を示すことができるのである。もちろん  $m$  をうまく定義して、つまり「 $\alpha$  - ター  $Q_1, Q$  をうまく選んで」ということである。そこで

$$V_1(N) = \sum_{\substack{m_1^3 + m_2^3 + m_3^3 + m_4^3 < N \\ m_1, m_2, m_3 \in \mathcal{A}}} d_Q(N - m_1^3 - m_2^3 - m_3^3 - m_4^3)$$

とおき、

$$V_0(N) = R_{Q,3,4}(N) - V_1(N)$$

とすると、

$$V_0(N) = \int_0^1 D_Q(\alpha) F_3(\alpha)^4 e(-N\alpha) d\alpha - \int_0^1 D_Q(\alpha) F(\alpha; \overline{\mathcal{A}})^3 F_3(\alpha) e(-N\alpha) d\alpha$$

となる。この右辺の2つの積分を major arc  $\mathcal{M}$  上の積分と、minor arc  $\mathcal{m}$  上の積分とに分けると、§2で述べたように  $\mathcal{M}$  上の積分については、知られている結果を用いて十分な漸近式を得ることができる。  $\mathcal{m}$  上の積分については、

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{m}} D_{\ell}(\alpha) \{F_3(\alpha)^3 - F(\alpha; \mathcal{A})^3\} F_3(\alpha) e(-N\alpha) d\alpha \\ &= \int_{\mathcal{m}} D_{\ell}(\alpha) F(\alpha; \overline{\mathcal{A}}) \{F_3(\alpha)^2 + F_3(\alpha)F(\alpha; \mathcal{A}) + F(\alpha; \mathcal{A})^2\} F_3(\alpha) e(-N\alpha) d\alpha \\ &\ll \left( \int_0^1 |D_{\ell}(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathcal{m}} |F(\alpha; \overline{\mathcal{A}})|^2 \{ |F_3(\alpha)|^4 + |F(\alpha; \mathcal{A})|^4 \} |F_3(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

とすれば、最後の部分に③を用いて

$$\begin{aligned} &\ll \left( N(\log N)^{\ell^2-1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( N^{\frac{5}{3}} (\log N)^{-B} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\ll N^{\frac{4}{3}} (\log N)^{-\frac{1}{2}(B-\ell^2+1)} \end{aligned}$$

したがって  $B$  を大きくとるとおけば minor arc  $\mathcal{m}$  上の積分に対して十分な評価が得られる。これによつて  $V_0(N)$  に対しての漸近式を示すことができる。

一方、§3の方法によつて、集合  $\mathcal{A}$  に含まれる自然数の個数  $\#\mathcal{A}$  について、

$$\#\mathcal{A} \ll \frac{N^{\frac{1}{3}} \log \log N}{\log N}$$

を示すことができる。これをもとにして、

$$V_1(N) \ll N^{\frac{4}{3}} (\log N)^{l-4} (\log \log N)^{C_l} \quad (C_l \text{ は } l \text{ のみに依存する定数})$$

が証明できる。以上をあわせて、

$$R_{l,3,4}(N) = V_0(N) + V_1(N)$$

に対して、目標とする漸近式を得ることができるとある。

$I_{3,4}(N)$  に対する証明も同様である。

上の方法は、不等式②において定数  $A$  を十分大きくとれなくとも、Vaughan による結果の場合は、 $R_{l,k,u}(N)$  および  $I_{k,u}(N)$  についての漸近式を与えることを示している。

この Vaughan の方法と Heath-Brown [2] の Hua の不等式の改良の方法を合わせると、 $k \geq 6$  ならば  $2u \geq \frac{7}{8} \cdot 2^k$ 、つまり  $u \geq 7 \cdot 2^{k-4}$  に対して不等式②を示すことができる（ある正の定数  $A$  に対して、であるが）。したが、て上に示した方法と合わせること、

$$u \geq 2^{k-1} \quad (3 \leq k \leq 5)$$

$$u \geq 7 \cdot 2^{k-4} \quad (6 \leq k \leq 9)$$

に対して  $R_{l,k,u}(N)$ ,  $I_{k,u}(N)$  の漸近式を得ることができる。

$k \geq 10$  の場合は、Wooley による Vinogradov method の改良 [11] を用いて、§2 の議論と合わせた方がいい結果となる。

## References.

- [1] Davenport, H. "On Waring's problem for cubes", *Acta Math.*, 71(1939) pp. 123-143.
- [2] Heath-Brown, D.R. "Weyl's inequality, Hua's inequality and Waring's problem", *J. London Math. Soc.* (2) 38 (1988) pp. 216-230
- [3] Hooley, C. "On the representation of a number as the sum of a square and a product", *Math. Z.* 69 (1958) pp. 211-227.
- [4] Hooley, C. "On a new approach to various problems of Waring's type," in *Recent Progress in Analytic Number Theory vol. I* (Academic Press, 1981) pp. 127-191.
- [5] Hooley, C. "Waring's problem for two squares and three cubes," *J. Reine Angew. Math.* 328(1981) pp. 161-207
- [6] Kawada, K. "On the sum of four cubes and a product of  $k$  factors," preprint.
- [7] Linnik, Ju. V. "An asymptotic formula in an additive problem of Hardy-Littlewood," *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 24 (1960) pp. 629-706. (Russian)
- [8] Page, A. "On the representation of a number as a sum of squares and products, I. and II.," *Proc. London Math. Soc.* (2) 36 (1933) pp. 241-256 and pp. 471-484.
- [9] Page, A. "On the representation of a number as a sum of squares and products, III.," *Proc. London Math. Soc.* (2) 37 (1934) pp. 1-16.

[10] Vaughan, R.C. "On Waring's problem for cubes", *J. Reine Angew.*

*Math.* 365 (1986) pp. 122-170.

[11] Wooley, T.D. "On Vinogradov's mean value theorem", *Mathematika*,

39 (1992) pp. 379-399