数理解析研究所講究録
886巻 1994年 187-195

一様分布論における Erdős の予想に対する反例

山形大学教育 鹿野 健
(YAMAGATA UNIV. : T. KANO)

§0. 偏差関数(Discrepancy)と一様分布性.

$(x_n)_1^\infty$ を実数列とする。単位区間 $I=[0,1)$ の任意の部分区間を $J=[a,b)\subset I$ とするとき,

$$A_N(x,J)=\#\{n,\ 1\le n\le N;\ \langle x_n\rangle\subset J\} \tag{1}$$

を J の個数関数(Counting Function)という。ここに,記号 $\langle t\rangle$ は実数 t の小数部分を表すものとする。

そして,

$$D_N(x)=\sup_J\left|\frac{A_N(x,J)}{N}-|J|\right| \tag{2}$$

を,数列 $x=(x_n)$ の偏差関数(Discrepancy)とよぶ。

数列 x が一様に分布する,詳しくは,「1を法として一様分布する」(UNIFORMLY DISTRIBUTED (MOD. 1))とは

$$(3) \qquad \lim_{N\to\infty} D_N(X) = 0$$

となることをいう。このことは，直観的には，数列 X が I の中で（正しくは X の小数部分が）均一に（一様に）分布していることを表わしている。

Weyl [8] は，(3) が

$$(4) \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} = 0,$$

$$\forall h \in \mathbb{N}.$$

と同値であることを示した。個々の具体的な X についてその一様分布性を判定するには，一般に (3) よりも (4) の方が適当であることは明かであろう。実際，Weyl は (4) を用いて多くの結果を得た。例えば，x_n が n の多項式程度の増加度を有する数列ならば（大体）一様分布列であることを示した。しかし，現在もなお不明なのは，x_n の増加度が著しく大きいもの，例えば指数関数的に増大するような数列について，それらの一様分布性の判定である。

Weyl はこれについて，いわゆる "*Metric Result*" とよばれる，測度論的な論法を導入して興味ある結果を証明した。例えば，(x_n) が互に異なる(正)整数列であるとき，数列

(5) $$(\theta x_n)_1^\infty \qquad (\theta \neq 0)$$

は，ほとんどすべて（Lebesgue 測度の意味で）の実数θについて一様分布列であることを示した。 Weyl の証明では $D_N(X)$ の（Nについての）大きさが与えられていないのであるが，Erdős と Koksma [5]，および Cassels [2] は互に独立に

(6) $$N D_N(\theta X) \ll \sqrt{N}(\log N)^{\frac{5}{2}+\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon > 0$$

がほとんどすべての実数θについて成り立つことを示した。

ここで，(6)の右辺における指数 $\frac{5}{2}+\varepsilon$ は最良のものであろうか？

§1. Erdős の予想とその否定.

$X=(x_n)$ が狭義の単調増大な整数列，すなわち

(7) $$x_{n+1} - x_n \geq 1$$

を満たしているとき，$D_N(\theta X)$の大きさについて Erdős [3] は次のように予想した：

上の条件を満たすような任意の数列 Xに対して，

適当な正の定数 c を取ると，ほとんど全ての θ について

(8) $$N\,D_N(\theta X) \ll \sqrt{N}\,(\log\log N)^c.$$

が成り立つであろう。

Erdős がこの予想を得た背景の一つが，Gál との共同研究［4］であり，そこの方法によって，X が gap sequence であるとき，すなわち X が条件

(9) $$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \alpha > 1$$

を満たすときは (8) が成り立つことを知っていたからである。［(9) のとき，(7) が成り立つことを注意．］

本論の主目的は，この Erdős の予想が正しくないことを X の具体例によって示すことであるが，それに入る前に注意を一つ。　X の条件としての，整数列であることや (7) という制限がなければ，(8) が成り立たない例は比較的容易に与えられる。例えば，

(10) $$x_n = (\log n)^{\alpha}$$
$$\alpha > 1$$

がその一例である。

［定理 1］ (6)の右辺の $\log N$ の指数は，一般には $\frac{1}{4}$ 以下にならない。詳しくいえば，(7)を満たす整数列 X で，ほとんどすべての θ に対して

(11) $$N D_N(\theta X) \ll \sqrt{N}\,(\log N)^{\frac{1}{4}}$$

を満たさないような例が存在する。

実は，そのような X_n の一例は $X_n = n^2$ という単純な数列であることを以下に示すが，これは Fiedler, Jurkat, Körner による共同研究［6］中の結果の一つの系にすぎないのである。

［定理 2］(FJK)

$(g(n))_1^{\infty}$ を，広義単調増大な正数列とする。このとき，級数

(12) $$\sum^{\infty} \frac{1}{n\,g^4(n)}$$

が収束，発散するそれぞれの場合に対応して，部分和

(13) $$S_N(\theta) = \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \theta n^2}$$

はそれぞれ，ほとんどすべての実数 θ について，

(14) $$|S_N(\theta)| = O(\sqrt{N}\, g(N)),$$

あるいは

(15) $$|S_N(\theta)| \neq O(\sqrt{N}\, g(N))$$

を満たす。但し，Bachmann–Landau 記号 O に示される定数は，一般に θ に依存する。

さてこの定理 2 において，まず

(16) $$g(n) = (\log n)^{\frac{1}{4}}$$

と取ると，このとき明かに (12) の級数は発散する。従って，このときは (15) が成り立つ。すなわち，

(17) $$\left|\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \theta n^2}\right| \neq O(\sqrt{N}(\log N)^{\frac{1}{4}})$$

がほとんどすべての θ に対して成り立つのである。

さて定理 1 の証明であるが，いま

(18) $$x_n = n^2$$

に対して，(11) が（ほとんどすべての θ，あるいはある正測度をもつ θ の集合について）成り立つと仮定しよう。

すると，次の補題（cf. [7] p.143）：

(19) $$\left|\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i y_n}\right| \le 4N\, D_N(y).$$

によって，

$$\left| \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i\theta n^2} \right| = O\left(\sqrt{N}\,(\log N)^{\frac{1}{4}}\right)$$

がほとんどすべてのθについて成り立つ。 しかし，これは明かに(17)に矛盾する。 故に，定理 1が証明された。

この定理１が示すように，(6) の右辺は Erdős の予想と反し， $\log\log N$ のオーダーには一般になり得ない事がわかったが，ではその最良の評価は何かというと，それは現在も不明である。 ただ，$f(x) \in L^2$ の概収束(フーリエ級数の）に関する L. Carleson の定理を用いると，(6) の右辺の指数 $\frac{5}{2}+\varepsilon$ は，$\frac{3}{2}+\varepsilon$ までは下げられることが知られている［1］。

最後に，定理２より，(17) と併せて

$$\left| \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i\theta n^2} \right| = O\left(\sqrt{N}\,(\log N)^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right) \tag{20}$$

がほとんどすべてのθについて成り立つことを注意する。評価式 (17) と (20) は，ガウス和の大きさについての新しい視点を与えるものとして注目したい。

〈文　献〉

[1] R. C. Baker : Metric Number Theory and the Large Sieve, J. London Math. Soc. 24 (1981), 34-40.

[2] J. W. S. Cassels : Some metrical theorems in Diophantine approximation, Proc. Cambridge Phil. Soc. 46 (1950), 209-218.

[3] P. Erdős : Problems and results on Diophantine approximations, Compositio Math. 16 (1964), 52-65.

[4] P. Erdős and I. S. Gál : On the Law of the iterated logarithm, Indagationes Math. 17 (1955), 65-84.

[5] P. Erdős and J. F. Koksma : On the uniform distribution mod 1 of sequences $\{f(n, \theta)\}$, Ibid 11 (1949), 299-302.

[6] H. Fiedler, W. Jurkat and O. Körner : Asymptotic expansions of finite theta series, Acta Arithmetica 32 (1977), 129-146.

[7] L. Kuipers and H. Niederreiter : Uniform Distribution of Sequences, Wiley 1974.

[8] H. Weyl : *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, *Math. Annalen* 77 (1916), 313–352.