数理解析研究所講究録
886巻 1994年 149-169



# ふたつの素数の和について

三河寛／筑波大学
Mikawa H.

## 序

$x$ 以下の偶数のうち ふたつの素数の和へ分割できないものの個数を $E(x)$ とする。

$$E(x) \ll 1 \tag{1}$$

と信じられている(イ)けれども 一般リーマン予想の下でさえ

$$E(x) \lll \sqrt{x} \tag{2}$$

程度のことしか言えない。すると (1) をもたらす まっとうな仮説をみつけること および (2) を仮定無しに証明することが一時的な目標となる。しかし やはりむずかしい。ここでは残念ながら大きく譲って 小さな $\theta>0$ に対し

$$E(x+x^{\theta})-E(x)=o(x^{\theta}) \tag{3}$$

を示すことを問題とする。もし $\theta<\frac{1}{2}$ なる $\theta$ について (3) が証明できるなら (2) の見地から 少しの意味はあることと言ってもよいだろう。

$\theta=1$ のとき (3) は実質上 三素数定理のことであり、そして $\frac{7}{12}<\theta\leq 1$ の範囲で (3) を正当化するのは簡単である。この $\frac{7}{12}$

---

(イ) 書誌学としてよいのは
潘承洞-潘承彪：哥德巴赫猜想，科学出版社 1981.
Wang Yuan (ed.): Goldbach conjecture, World Scientific 1984.

はＬ函数の零点密度評価[ロ]に由来する。すると $\frac{1}{2}<\theta\leq 1$ が(3)の技術的限界のように思われる。しかし これは近頃越えられるようになった。[ハ]

この問題に関して考えたことをここに書残しておきたい。

---

(ロ) H.-E. Richert : Sieve methods, Tata 1976. Chap. 6 および Chap 13 Note.

(ハ) G. Dufner : Binäres Goldbachproblem in kurzen Intervallen I, II, Studia Sci. Math. Hungarica (to appear).

H. Mikawa : On prime twins, Tsukuba J. Math. 15 (1991) 19-29.

H. Mikawa : On the exceptional set in Goldbach's problem, Tsukuba J. Math. 16 (1992) 513-543.

A. Perelli and J. Pintz : On the exceptional set in the 2k-twin primes problem, Compositio Math. 82 (1992) 355-372.

A. Perelli and J. Pintz : On the exceptional set for Goldbach's problem in short intervals, J. London Math. Soc. (2) 47 (1993) 41-49.

D. Wolke : Über das Primzahl-Zwillingsproblem, Math. Ann. 283 (1989) 529-537.

壱

自然数 $n>1$ の素因数分解を $\prod_p p^m$ としてパラメーター $z \geqq 2$ に対し

$$n = \prod_{p<z} p^m \cdot \prod_{p \geqq z} p^m = n^{(1)} n^{(2)}$$

とかく。空積は 1 とする。そして

$$\Phi_z(n) = \begin{cases} 1, & n^{(1)} = 1 \\ 0, & n^{(1)} > 1 \end{cases}, \quad \Psi_z(n) = \begin{cases} 1, & n^{(2)} = 1 \\ 0, & n^{(2)} > 1 \end{cases}$$

$\Phi_z(1) = \Psi_z(1) = 1$ と定めれば $\Phi$、$\Psi$ は共に完全乗法的となる。エラトステネスの篩とは

$$\Phi_z(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \Psi_z(d)$$

および

$$\left| \sum_{\substack{d|n \\ d>D}} \mu(d) \Psi_z(d) \right| \leqq \sum_{\substack{d|n \\ D \leqq d < Dz}} \mu^2(d) \Psi_z(d) \quad (D>1) \qquad (4)$$

のことである。(4) はブシュタフの公式(ニ)

$$\Phi_z(n) = 1 - \sum_{\substack{p|n \\ p<z}} \Phi_p(n)$$

から従う。また次の不等式が成立つ(ホ); もし $x \to \infty$ のとき $z = z(x) \to \infty$ かつ $s = \frac{\log x}{\log z} \to \infty$ ならば

$$\sum_{n \leqq x} \Psi_z(n) \ll x \exp\left(-\frac{1}{2} s \log s\right) \qquad (5)$$

$\sqrt{x}<n\leqq x$ が素数かどうかは $\Phi_{\sqrt{x}}(n)$ をみればよい。

ブシュタフの公式から

$$\Phi_{\sqrt{x}}(n)=\Phi_{\frac{\sqrt{x}}{v}}(n)-\sum_{\substack{p\mid n\\ \frac{\sqrt{x}}{v}\leqq p<\sqrt{x}}}\Phi_p(n)$$

右辺の第2項は　$v=\exp(2\sqrt{\log x})$　と撰べば気にする必要はないだろう。さらに

$$\Phi_{\frac{\sqrt{x}}{v}}(n)=\Phi_{\sqrt[3]{x}}(n)-\sum_{\substack{p\mid n\\ \sqrt[3]{x}\leqq p<\frac{\sqrt{x}}{v}}}\Phi_p(n)$$

第2項においては　$\Phi_p(n)=\Phi_{\sqrt[3]{x}}(n)$　だから

$$\Phi_{\frac{\sqrt{x}}{v}}(n)=\Bigl(1-\sum_{\substack{p\mid n\\ \sqrt[3]{x}\leqq p<\frac{\sqrt{x}}{v}}}1\Bigr)\Phi_{\sqrt[3]{x}}(n)\tag{6}$$

$w=\exp(\sqrt[3]{\log x})$　として再びブシュタフの公式、そしてエラトステネスの篩を使えば

$$\Phi_{\sqrt[3]{x}}(n)=\Bigl(\sum_{\substack{d\mid n\\ d<\sqrt{v}}}+\sum_{\substack{d\mid n\\ \sqrt{v}\leqq d}}\Bigr)\mu(d)\Psi_w(d)-\sum_{\substack{p\mid n\\ w\leqq p<\sqrt[3]{x}}}\Phi_p(n)$$

---

(ニ) H. Halberstam: Lectures on the linear sieve, in Topics in analytic number theory. Texas Austin 1985, 165－220.
　この論文の中の Basic lemma から (4) がわかる。

(ホ) K. Prachar: Primzahlverteilung, Springer 1957. Kap.V. §5.
　Ju.V. Linnik: Dispersion method in binary additive problems, Leningrad 1961. (翻訳, A.M.S.) Chap.1.

これを(6)に代入する。すると(6)において第1項は

[I] $$\sum_{\substack{n=k\ell \\ k\leq\sqrt{\frac{x}{v}}}} a_k$$

と書き直せる。係数$(a_k)$は約数函数で押えられる。そして第2項は(5)から 無視できると思える。第3項は $p$, $\frac{n}{p}$ の係数が独立となるように細工して

[II] $$\sum_{\substack{n=k\ell \\ w\leq\ell<\sqrt[3]{x}}} a_k b_\ell$$

のように書けるであろう。$(b_\ell)$は素数の定義函数と思ってよい。このように $\Phi_{\sqrt{x}}(n)$ の主要部分は[I]および[II]の型に分解した。(ハ)

次に $2|n$, $x\leq\frac{X}{2}<n\leq X$ として

$$R_x(n)=\sum_{\substack{p_1+p=n \\ p_1\leq x}} 1$$

を考える。$p_1$ を $\Phi_{\sqrt{x}}(m)$ でおきかえ そして分解する。[I]の型のものは

$$\sum_{\substack{k\ell+p=n \\ k\ell\leq x \\ k\leq\sqrt{\frac{x}{v}}}} a_k = \sum_{\substack{k\leq\sqrt{\frac{x}{v}} \\ (k,n)=1}} a_k \sum_{\substack{n-x<p<n \\ p\equiv n \pmod{k}}} 1 \quad + 誤差$$

となり、$x \ggg X$ のときには平均素数定理で計算できる。

しかし[II]の型から生ずるものには全く手が出ない。ここで諦めて n に関して平均することを考える。$y=X^{\theta}\ (0<\theta<1)$

$2|n,\ n\in\,]X-y,\,X]$ に対して

$$R_x(n) > \text{主項} + \text{誤差擬} \qquad (7)$$

を示すことを目指す。この主項は常に $\gg \frac{x}{\log^2 x}$ となるある量で、誤差擬とは 2乗平均が小さいこと すなわち

$$\sum_{\substack{X-y<n\leq X\\ 2|n}} |\cdot|^2 = o\left(y\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)^2\right) \qquad (8)$$

の意味である。

これが成立つ範囲の $\theta$ に対して(3)が言える。というのは、もし n がふたつの素数の和として表せないならば $R_x(n)=0$ すなわち

$$E(X)-E(X-y) \leq \sum_{\substack{X-y<n\leq X\\ 2|n\\ R_x(n)=0}} 1$$

すると誤差擬は主項を相殺するから その絶対値は主項程度 $\gg \frac{x}{\log^2 x}$ の大きさになる。つまり

$$\sum_{\substack{n\\ R_x(n)=0}} \left(\frac{x}{\log^2 x}\right)^2 \ll \sum_{\substack{n\\ R_x(n)=0}} |\text{誤差擬}|^2$$

したがって

$$E(X)-E(X-y) = o(y)$$

となる。

式

区間 $]X-y, X]$, $y \leqq x$, の中の $n$ が $n = p_1 + p$, $p_1 \leqq x$, と書けるなら いつでも $X - 2x < p < X$ だから

$$R_x(n) = \int_0^1 \Bigl( \sum_{p_1 \leqq x} e^{2\pi i \alpha p_1} \Bigr) \Bigl( \sum_{X-2x<p\leqq X} e^{2\pi i \alpha p} \Bigr) e^{-2\pi i n \alpha} d\alpha$$

$$= \int_0^1 S(\alpha) V(\alpha) e^{-2\pi i n \alpha} d\alpha$$

$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leqq \frac{1}{q^2}$, $(a, q) = 1$, と有理数で近似したとき エラトステネスの篩を用いて

$$S(\alpha) \lll \frac{x}{\sqrt{q}} + x \exp\left(-\sqrt{\log x}\right) + \sqrt{qx}$$

とできる。(ト) この評価は $\log^B x < q < x \log^{-B} x$ (チ) のときには意味がある。$q < \log^B x$ のときには $S(\alpha)$ の期待される主部を $T(\alpha)$ として

$$S(\alpha) = T(\alpha) + \text{誤差}$$

となる。$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \log^B x \ll 1$ ならば この誤差項は自明ではない。そこで

$$Q_1 = \log^B x, \quad Q = x Q_1^{-3}$$

---

(ヘ) 前出 Prachar の書, Kap. VI, Satz 6.1.

(ト) 同上

(チ) ある〈不特定の定数〉を表すのに 文字 B を用いる。記号 $\lll$ は $\ll \log^B x$ のことである。

と撰び

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{q \leq Q_1} \bigcup_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a,q)=1}} I_{q,a}$$

$$I_{q,a} = I_{q,a}(Q) = \left[ \frac{a}{q} - \frac{1}{qQ} , \frac{a}{q} + \frac{1}{qQ} \right]$$

と書いて

$$U(\alpha) = \begin{cases} S(\alpha) - T(\alpha) , & \alpha \in \mathfrak{M} \\ S(\alpha) , & \alpha \notin \mathfrak{M} \end{cases}$$

と置けば $\alpha$ について一様に

$$U(\alpha) \ll x \log^{-B} x \tag{9}$$

と知れる。

ベッセルの不等式により

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{X-y<n\leq X \\ 2|n}} \left| \int_0^1 U(\alpha)V(\alpha)e^{-2\pi i n\alpha} d\alpha \right|^2 &\leq \int_0^1 \left| U(\alpha)V(\alpha) \right|^2 d\alpha \\ &\leq \max_{\alpha} \left| U(\alpha) \right|^2 \cdot V(0) \\ &\ll x^3 \log^{-B} x \end{aligned} \tag{10}$$

誤差擬(8)となるには、この評価が $o(yx^2\log^{-4}x)$ すなわち $x \lll y$ でなくてはならない。

一方、主項となるはずの

$$\int_{\mathfrak{M}} T(\alpha)V(\alpha)e^{-2\pi i n\alpha} d\alpha$$

は簡単な計算により

$$= \sum_{q \le Q_1} \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \sum_{\substack{d|q \\ (d,n)=1}} d\mu\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{\substack{n-x<p<n-1 \\ p\equiv n \pmod d}} \log^{-1}(n-p) + 誤差$$

となる。この内側の和は　$X-y<n\le X$，$x \lll y \le x$ だから　$n$ に関して平均をとる効果はない。そして $d \le Q_1 = \log^B x$　だから　算術級数定理の短区間版[1]が適用できる。このようにして　主項を書き出すためには

$$x \geqq X^{\frac{7}{12}+\delta} \quad (\delta>0)$$

であることが要請される。

結局

$$R_x(n) = \int_{\mathfrak{M}} T(\alpha)V(\alpha)e^{-2\pi i n\alpha}d\alpha + \int_0^1 U(\alpha)V(\alpha)e^{-2\pi i n\alpha}d\alpha$$
$$= 主項 + 誤差擬$$

とするために

$$y \ggg x \geqq X^{\frac{7}{12}+\delta}$$

なる制限が付いた。そして　$y \ggg x$　の限定を除かないことには、つまりベッセルの不等式(10)を使う限りにおいて、これ以上のことは望めない。

---

(1) Prachar の書 Kap. IX. および Richert の冊子 Chap. 6.

参

$$\int_0^1 U(\alpha)V(\alpha)e^{-2\pi i n\alpha}d\alpha$$

を $2|n,\ n\in]X-y,X]$ に関して2乗平均するのであった。
このとき $n\alpha \pmod 1$ が相殺をひきおこすことになる。
$\alpha$ を分母 $q$ の有理数で近似するなら $n \pmod q$ である。
すなわち $n$ の動く長さ $y$ より $q$ が大きいなら もはや
相殺は期待できない。したがって前章でのパラメーター $Q$ を

$$Q = yQ_1^{-3}$$

に取替えておく。

単位区間を長さ $\frac{1}{\Delta}$ , $\Delta \asymp y\log^{-B}x$, の小区間どもに分割し
順番に並べて $I_j$ $(1\leq j\leq J)$ とする。$J$ は偶数にできる。
まず奇数の $j$ だけ集めたものについて計算する。

$$\sum_{\substack{X-y<n\leq X\\ 2|n}}\left|\sum_{j:\mathrm{odd}}\int_{I_j}UV(\alpha)e^{-2\pi i n\alpha}d\alpha\right|^2$$

$$\ll \sum\sum_{j,k:\mathrm{odd}}\int_{I_j}\int_{I_k}|UV(\gamma_1)||UV(\gamma_2)|\min\left(y,\frac{1}{\|\gamma_1-\gamma_2\|}\right)d\gamma_1 d\gamma_2$$

$j=k$ なら $\min(\ ,\ )$ の項を $y$ととる。$j\neq k$ なら $I_j$ と $I_k$
との間に偶数番の小区間があるから

$$\|\gamma_1-\gamma_2\|^{-1} \ll \Delta$$

したがって

$$\ll y\sum_{j:\mathrm{odd}}\left(\int_{I_j}|UV(\gamma)|d\gamma\right)^2+\Delta\left(\sum_{j:\mathrm{odd}}\int_{I_j}|UV(\gamma)|d\gamma\right)^2$$

$$\leq y\sum_j\int_{I_j}|U(\gamma)|^2d\gamma\int_{I_j}|V(\alpha)|^2d\alpha+\Delta\left(\int_0^1|UV(\gamma)|d\gamma\right)^2$$

$$\leq y\max_j\int_{I_j}|U(\gamma)|^2d\gamma\cdot\int_0^1|V(\alpha)|^2d\alpha+\Delta\int_0^1|U(\gamma)|^2d\gamma\int_0^1|V(\alpha)|^2d\alpha$$

$$\ll yx\left(\max_j\int_{I_j}|U(\gamma)|^2d\gamma+x\log^{-B}x\right)$$

偶数の $j$ どもについても同じである。したがって (9) に代えて小区間 $I_j$ での積分を $\ll x\log^{-B}x$ と押えればよいことになった。 $I_j$ は $\mathfrak{M}$ の $I_{q,a}$ を 2 つ含むことはないから件の積分は

$$=\max_j\left(\int_{I_j\cap\mathfrak{M}}+\int_{(I_j\cup\mathfrak{M})\setminus\mathfrak{M}}\right)|U(\gamma)|^2d\gamma$$

$$\leq\max_{\substack{(a,q)=1\\ q\leq Q_1}}\int_{-1/qQ}^{+1/qQ}\left|(S-T)\left(\frac{a}{q}+\beta\right)\right|^2d\beta$$

$$+\max_{\alpha\notin\mathfrak{M}}\int_{-1/\Delta}^{+1/\Delta}|S(\alpha+\beta)|^2d\beta \tag{11}$$

ここで一時的に一般の形にして $(a_n)$ を複素数、

$2\leq\Delta\leq\frac{x}{2}$ として次の積分を考える。

$$\Delta^2\int_{-1/\Delta}^{+1/\Delta}\left|\sum_{x<n\le 2x} a_n e^{2\pi i\beta n}\right|^2 d\beta \tag{12}$$

これはプランチェレルの関係式により 次の三通りに書換えられる。

$$\sum_{|r|\le\Delta}(\Delta-|r|)\sum_{x<n\le 2x}\bar{a}_n a_{n+r} \tag{13}$$

$$\int_x^{2x}\left|\sum_{t<n\le t+\Delta}a_n\right|^2 dt \tag{14}$$

$$\Delta^2 x^{2\sigma-1}\int_{\sigma-i\frac{x}{\Delta}}^{\sigma+i\frac{x}{\Delta}}\left|\sum_n a_n n^{-s}\right|^2|ds| \tag{15}$$

そして $(a_n)$ の性質に応じて 種々な手法を適用できる。とはいうものの 上手に使えば道具は何んでもよく 結果は同じとも言える。

懸案の (11) に戻る。まず後者からみる。

$$\Delta^2\int_{-1/\Delta}^{+1/\Delta}\left|\sum_{p\le x}e^{2\pi i(\alpha+\beta)p}\right|^2 d\beta \quad (\alpha\notin\mathfrak{M})$$

このときには $\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\le\frac{1}{q^2}$, $(a,q)=1$, $Q_1<q\le Q$ なる有理数が存在する。第一章でのように 素数 $p$ を [I] と [II] とに展開する。[I] は (13) から

$$\Delta^2\int_{-1/\Delta}^{+1/\Delta}\left|\sum_{k\le\sqrt{\frac{x}{U}}}\sum_{kl\le x} a_k e^{2\pi i(\alpha+\beta)kl}\right|^2 d\beta$$

$$\ll \sum_{|r|\le\Delta} (\Delta-|r|)\, e^{2\pi i\alpha r} \sum\sum\sum\sum_{\substack{k_1l_1-k_2l_2=r\\ k_1l_1,\ k_2l_2\le x\\ k_1,\ k_2\le\sqrt{x/v}}} a_{k_1}a_{k_2}$$

$r>0$ のとき 内側の和は

$$\sum\sum_{\substack{k_1,\ k_2\le\sqrt{x/v}\\ (k_1,k_2)\mid r}} a_{k_1}a_{k_2}\left(\frac{x+O(r)}{[k_1,k_2]}+O(1)\right)$$

そして $r$ に関して和をとると

$$\lll \Delta x + x\sum\sum_{\substack{k_1,\ k_2\le\sqrt{x/v}\\ (k_1,k_2)\le\Delta}} \frac{|a_{k_1}a_{k_2}|}{[k_1,k_2]} \left|\sum_{\substack{0<r<\Delta\\ (k_1,k_2)\mid r}}(\Delta-r)\,e^{2\pi i\alpha r}\right| + \Delta^3+\Delta^2\frac{x}{v}$$

$$\lll \Delta x + x\Delta\left(\frac{\Delta}{q}+q\right)+\Delta^3+\Delta^2\frac{x}{v}$$

となって障りは無い。［II］については(ヌ)やはり(13)より

$$\Delta^2\int_{-1/\Delta}^{+1/\Delta}\left|\sum\sum_{\substack{kl\le x\\ w\le l<\sqrt[3]{x}}} a_k b_l\, e^{2\pi i(\alpha+\beta)kl}\right|^2 d\beta$$

$$\lll \max_{w<L<\sqrt[3]{x}} \Delta^2\int_{-1/\Delta}^{+1/\Delta}\left(\sum_{l_1\asymp L}|b_{l_1}|^2\right)\left(\sum_{l\asymp L}\left|\sum_{kl\le x}a_k\, e^{2\pi i(\alpha+\beta)kl}\right|^2\right)d\beta$$

$$\ll \max_{w<L<\sqrt[3]{x}} L\cdot\sum\sum_{\substack{|lr|\le\Delta\\ l\asymp L}}(\Delta-|lr|)\,e^{2\pi i rl}\sum\sum_{\substack{k_1-k_2=r\\ k_1l,\ k_2l\le x}}a_{k_1}a_{k_2}$$

---

(ヌ) 記号 $\asymp$ は $\gg$ かつ $\ll$ の意味である。

$k \neq 0$ のとき　$k$ を停めて $l$ の和を実行し 振動因子 $e^{2\pi i k l}$ を巻き込めば

$$\lll \max_{w<L<\sqrt[3]{x}} L\left(\Delta X + \Delta \frac{X}{L}\left(\frac{\Delta}{q} + \frac{\Delta}{L} + q\right)\right)$$

$$< \sqrt[3]{x}\,\Delta X + \Delta X\left(\frac{\Delta}{q} + \frac{\Delta}{w} + q\right)$$

したがって、

$$\sqrt[3]{x} \lll \Delta \lll y \tag{16}$$

ならば (11) の第2の積分に関しては望む評価が得られる。そして (16) の下で (11) の第1の積分を扱うのは易しい。これを次章でみることにする。

四

$S(\alpha)$ の代りに $S^{+}(\alpha) = \sum_{n \leq X} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha n}$ を考える。すると

$$S^{+}\left(\frac{a}{q}+\beta\right) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \sum_{\chi (\mathrm{mod}\, q)} \chi(a) \tau(\bar{\chi}) \sum_{n \leq X} \chi(n) \Lambda(n) e^{2\pi i \beta n} + 誤差$$

$\chi$ が主指標のとき $\chi(n)\Lambda(n)$ を $\chi(n)\Lambda(n) - 1$ で置換えることを # で表し、$T(\alpha)$ に対応するものを $T^{+}(\alpha)$ とかけば

$$\int_{-1/qQ}^{+1/qQ} \left|(S^{+} - T^{+})\left(\frac{a}{q}+\beta\right)\right|^2 d\beta \tag{17}$$

$$\ll \int_{-1/qQ}^{+1/qQ} \left|\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)} \chi(a)\tau(\bar{\chi}) \sum_{n \leq X}^{\#} \chi(n)\Lambda(n) e^{2\pi i \beta n}\right|^2 d\beta + 誤差$$

右辺の積分は三角不等式により

$$\leq\left(\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\, q)}|\tau(\bar{\chi})|\left(\int_{-1/qQ}^{+1/qQ}\left|\sum_{n\leq x}{}^{\#}\chi(n)\Lambda(n)e^{2\pi i\beta n}\right|^{2}d\beta\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$$

ここで (14) と L函数の零点による $\sum_{n}\Lambda(n)$ の表示式を使う[ル]と上の積分は

$$\ll\frac{1}{(qQ)^{2}}\int_{1}^{x}\left|\sum_{t<n\leq t+qQ}^{\#}\chi(n)\Lambda(n)\right|^{2}dt$$

$$\lll\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^{2\sigma-1}N_{\chi}\left(\sigma,\frac{x}{qQ}\right)d\sigma+\text{誤差}$$

故に (17) は

$$\lll\max_{\frac{1}{2}\leq\sigma\leq 1}x^{2\sigma-1}\frac{1}{q}\left(\sum_{\chi(\mathrm{mod}\, q)}\sqrt{N_{\chi}\left(\sigma,\frac{x}{qQ}\right)}\right)^{2}+\text{誤差}\qquad(18)$$

そして、$Q\geqslant x^{\frac{1}{6}+\delta}$ $(\delta>0)$ ならば 自明でない評価を与えることができる。

また (14) の代りに (15) を使ってもよい。まず [I] と [II] とに分解しておく。[I] に関してはとりたてて問題となる事は無いであろう。[II] について (18) に対応するものは

$$\max_{w<L<\sqrt[3]{x}}\frac{1}{q}\left(\sum_{\substack{\chi(\mathrm{mod}\, q)\\ \chi\neq\chi_{0}}}\left(\int_{\frac{1}{2}-i\frac{x}{qQ}}^{\frac{1}{2}+i\frac{x}{qQ}}\left|\sum_{k\asymp\frac{x}{L}}\frac{\chi(k)a_{k}}{k^{s}}\right|^{2}\left|\sum_{\ell\asymp L}\frac{\chi(\ell)b_{\ell}}{\ell^{s}}\right|^{2}|ds|\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$$

---

(ル) 以下の計算と記号については 前出 P氏とR氏の本を参照

$(b_\ell)$ は素数の定義函数と思ってよかったから $\ell \leq \log^B L$ の範囲でなら 任意の定数 A について

$$\left| \sum_{\ell \asymp L} \frac{\chi(\ell) b_\ell}{\ell^s} \right|^2 \ll L \log^{-A} L$$

とできるはずである。すると

$$\lll \max_{w<L<\sqrt[3]{x}} \log^{-A} L \cdot L \sum_{\chi} \int \left| \sum_{k} \right|^2 |ds|$$

$$\ll \max_{w<L<\sqrt[3]{x}} \log^{-A} L \cdot L \left( \ell\left(\frac{x}{\ell Q}\right) + \frac{x}{L} \right)$$

$$< \log^{-A} x \cdot \left( x \frac{\sqrt[3]{x}}{Q} + x \right)$$

これは $Q \geqslant \sqrt[3]{x}$ なら目的に適う。そして $Q \lll y$ であったから (16) の下に (11) の第1の積分を押えるには十分である。

このように $x \geqslant X^{\frac{7}{12}+\delta}$ (主項、第二章) かつ $y \geqslant x^{\frac{1}{3}+\delta}$ (誤差擬、第三章、第四章) なる条件の下に (7)(8) が言えることをみた。つまり (3) は

$$\Theta > \frac{7}{36}$$

ならば成立つ。

伍

支配的条件(16)の根拠は 第一章で $\Phi_{\sqrt{x}}(n)$ の主要部を

$$\Bigl(1-\sum_{\substack{p\mid n\\ \sqrt[3]{x}\le p<\sqrt{x}}}1\Bigr)\Phi_{\sqrt[3]{x}}(n)$$

と書いた際の $\Phi_{\sqrt[3]{x}}(n)$ のパラメーターにある。そこでは最も単純なエラトステネスの篩を用いて素数を切開したのであるが別の〈素数の分解〉がよい限界を与えるかもしれない。(ヲ) あるいは別の手法による残余項の取扱いがよい結果をもたらすのかもしれない。(ワ)

(ヲ) Linnik の書 Chap. VII, (7.2.4).
D. R. Heath-Brown : Sieve identities and gaps between primes, Astérisque 94 (1982) 61-65.
G. Kolesnik : Primes of the form $[n^c]$, Pacific J. Math. 118 (1985) 437-447.
R. C. Vaughan : Sommes trigonométriques sur les nombres premiers, C. R. Acad. Sci. Paris A 285 (1977) 981-983.

(ワ) おそらく

$$\sum_{r<\Delta}\sum_{n<x}\tau_3(n)\tau_3(n+r)$$

$$\int_x^{2x}\Bigl|\sum_{t<n\le t+\Delta}\tau_3(n)\Bigr|^2dt$$

$$\int_{\frac12-iT}^{\frac12+iT}\Bigl|\sum_{n<N}n^{-s}\Bigr|^6|ds|$$

程度のものが計算できる手法でなくてはならないだろう。
また第四章のアプローチは(11)の第2積分にも有効である。

この最終章では試みに[I]の条件 $k\leq\sqrt{x}$ をそのままにしつつ[II]の区間 $w\leq \ell<\sqrt[3]{x}$ の $\sqrt[3]{x}$ をより小さくできないかを考える。もしそうできるならばここに持合わせている手法のままで直ちに(3)に反映するであろう。これは要するに

$$\Phi_{\sqrt{x}}(n)=\Biggl(\sum_{\substack{d\mid n\\ d<\sqrt{x}}} f(d)\Biggr)\Phi_z(n)$$

と表せということであるが $z<\sqrt[3]{x}$ とできそうもない。そこで「=」を「>」で置換える。(7)のためにはこれで十分である。(カ) ブシュタフの公式から

$$\Phi_{\sqrt{x}}(n)=\Phi_z(n)-\sum_{\substack{p\mid n\\ z\leq p<\sqrt{x}}}\Biggl(\Phi_z(n)-\sum_{\substack{q\mid n\\ z\leq q<p}}\Phi_q(n)\Biggr)$$

$$=\Biggl(1-\sum_{\substack{p\mid n\\ z\leq p<\sqrt{x}}}1\Biggr)\Phi_z(n)+\sum\sum_{\substack{pq\mid n\\ z\leq q<p\\ pq<\sqrt{x}}}\Phi_q(n)+\sum\sum_{\substack{pq\mid n\\ z\leq q<p<\sqrt{x}\\ \sqrt{x}\leq pq}}\Phi_q(n)$$

$$=\Biggl(1-\sum_{\substack{p\mid n\\ z\leq p<\sqrt{x}}}1+\sum\sum_{\substack{pq\mid n\\ z\leq q<p\\ pq<\sqrt{x}}}1\Biggr)\Phi_z(n)-\sum\sum\sum_{\substack{pqr\mid n\\ z\leq r<q<p\\ pq<\sqrt{x}}}\Phi_r(n)+\sum\sum_{\substack{pq\mid n\\ z\leq q<p<\sqrt{x}\\ \sqrt{x}\leq pq}}\Phi_q(n)$$

この操作を続けていくと

---

(カ) A. Balog: On sums over primes, Banach Center Publ. 17 (1985) 9-19.
G. Harman: On the distribution of $\alpha p$ modulo one, J. London Math. Soc. (2) 27 (1983) 9-18.

$$\Phi_{\sqrt{x}}(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d<\sqrt{x}}} \mu(d)\Phi_z(n) + \sum_{\substack{d|n \\ \sqrt{x}\le d<\sqrt{x}\,p(d)}} \mu(d)\Phi_z(d)\Psi_{\sqrt{x}}(d)\Phi_{p(d)}\left(\frac{n}{d}\right) \qquad (19)$$

ただし $d$ の最小素因数を $p(d)$ と書いている。前述の手法では触れないものが右辺の第2項に集約されたものの、これを直接調べるには骨が折れそうである。しかし第1項は容易である。次の関係式を知っている。[3]

$$\mu(n)=1 \quad \text{のとき} \quad \sum_{\substack{d|n \\ d<\sqrt{n}}} \mu(d) = 0$$

また この和は、$n$ が $p>\sqrt{n}$ なる素因数をもつとき $d<\sqrt{n}$ は制限として働かなくなるから、やはり $0$ となる。つまり (19) の第1項は 奇数個の $\sqrt{x}$ より小さな素数から成るものを取残していると思ってよい。(19) を $z=\sqrt[6]{x}$ と撰んで使ってみると

---

(3) I.M.Vinogradov: 整数論入門, 共立出版 1959, 第2章問題25.

ちなみに 奇のパリティを消す重みは

$$\begin{array}{l}\mu(n)=-1 \\ n\ne \text{prime}\end{array} \quad \text{のとき} \quad \sum_{\substack{d|n \\ d<\sqrt{n}}} \mu(d)\left(1-\frac{\log d}{\log\sqrt{n}}\right) = 0$$

A.I.Vinogradov による。未発表の原稿の中で氏が用いたものである。1991年 本橋氏から電話でおしえていただいた。

$$\sum_{\substack{m+p=n \\ m\le x}} \Bigg( \sum_{\substack{d|n \\ d\le\sqrt{\frac{x}{U}}}} \mu(d) \Bigg) \Phi_{\sqrt[6]{x}}(n) \tag{20}$$

$$= \sum_{\substack{p_1+p=n \\ p_1\le x}} (+1) + \sum_{\substack{p_1p_2p_3+p=n \\ \sqrt[6]{x}\le p_3<p_2<p_1<\sqrt{x} \\ p_1p_2p_3\le x}} (-2) + \sum_{\substack{p_1p_2p_3p_4p_5+p=n \\ \sqrt[6]{x}\le p_5<p_4<p_3<p_2<p_1<\sqrt{x} \\ p_1p_2p_3p_4p_5\le x}} (+6) + \text{誤差}$$

左辺には都合の良いものしかない。その主項は 右辺の期待される主項と同じはずであるから 対応する定数を $C_3$、$C_5$ として 左辺は

$$= \frac{\mathfrak{S}(n)\,x}{\log X \log x}\left(1-2C_3+6C_5\right) + \text{誤差擬}$$

とできる。右辺の第1項は $R_x(n)$ である。第2項は無視、つまり $\le 0$ とする。第3項はスイッチング・トリック(タ) によって上から押えることができる。したがって 右辺は

$$\le R_x(n) + 0 + K\cdot 6C_5 \frac{\mathfrak{S}(n)\,x}{\log X \log x} + \text{誤差}$$

ただし $K$ は $\dfrac{\log X}{\log x}$ に依る定数である。故に

---

(タ) Pan Ch.-d.: A new mean value theorem and its applications, in Recent progress in analytic number theory. vol. 1. Academic 1981, 275-287.

$$R_x(n) > \frac{\mathfrak{S}(n)\, x}{\log X \log x}\left(1-2C_3-6(K-1)C_5\right) + \text{誤差擬}$$

この主項の係数は 幸いにも $>0$ となる。つまり (3) は

$$\frac{7}{72}=\frac{7}{12}\cdot\frac{1}{6}<\Theta\leqq 1$$

の範囲で成立つ。

$Z=\sqrt[7]{x}$ と撰んでみる。すると $1-2C_3<0$ となってしまう。すなわち (20)の右辺第2項すべてを 0 で置換えるわけにはいかない。そして みっつの素数の積と直面するにはあまりにも非力である。

跋

ここに書きつけた事には 細部の検証が残されている。〈できるはずである〉〈思われる〉あたりが何やらあやしい。それでも いずれは全て正当化できると楽観して居る。

二月廿七日