数理解析研究所講究録
第 887 巻 1994 年 107-120

群作用による測度の連続性

熊本大学医療技術短期大学部　水町 仁　(Hitoshi Mizumachi)
九州大学理学部数学教室　佐藤 坦　(Hiroshi Sato)

§1　序

距離付け可能な局所コンパクト群 G が 可測空間 $(X,\mathcal{B})$ に作用し,

(G.1)　$(g,x)\mapsto gx:(G\times X,\mathcal{B}(G)\times\mathcal{B})\to(X,\mathcal{B})$ は可測, ただし $\mathcal{B}(G)$ は G 上のボレル加法族

(G.2)　G 上の左ハール測度 $dg=dm_G$ は σ-有限

であるとき, G を X 上の **可測変換群** とよぶ.

例えば, 無限次元線形空間 X の有限次元部分空間 G による平行移動を考えるとき, G は X 上の可測変換群であり, リー群 X の 1 径数部分群 G による左移動を考えるとき, G は X 上の可測変換群である. また, 条件 (G.2) は, G が σ-コンパクト であることと同値である.

$(X,\mathcal{B})$ を可測空間, G を X 上の可測変換群とし, $\mathcal{M}(X)$ を $(X,\mathcal{B})$ 上の確率測度の全体, $\mathcal{M}(G)$ を G 上の ボレル確率測度の全体とする. いま, $\mu\in\mathcal{M}(X)$ に対して

$$\mu_g(A)=\mu(g^{-1}A),\quad A\in\mathcal{B},\ g\in G$$

とすると, μ の定める写像

$$g\mapsto\mu_g:G\to\mathcal{M}(X)$$

が現れる. 問題は, この写像が連続になるための必要十分条件を与えることである. $\mathcal{M}(X)$ には様々な位相が入るが, ここでは次に述べる応用上の理由から,

$$\lim_{g\to e}\mu(A\triangle g^{-1}A)=0,\qquad A\in\mathcal{B}\qquad(\ \triangle\ は対称差\ )$$

が成り立つための必要十分条件を目標にする.

この問題の動機となったのは, 次の Kallianpur [9] の 0-1 法則である. 完備可分距離空間 T 上の 実数値関数の全体を $\mathbb{R}^T$ で表す. 関数空間 $\mathbb{R}^T$ は線形空間であるが, スカラー倍は考えないことにして加法群と見れば, 「$\mathbb{R}^T$ の部分加群」が考えられる. 例えば, 有界関数の全体, 連続関数の全体 は $\mathbb{R}^T$ の部分加群である. Kallianpur は $\mathbb{R}^T$ 上の, 共分散関数が連続な平均 0 のガウス測度 μ が, 次の性質をもつことを証明した.

$\mathbb{R}^T$の任意の可測な部分加群 H は, $\mu(H) = 0$ or 1 をみたす.

Kallianpur の証明は, 次の 三つの段階に分かれる. 共分散関数が定める 再生核ヒルベルト空間を $\mathcal{H}$ として,

第 1 段階 $A \in \mathcal{B},\ f + A = A,\ f \in \mathcal{H} \implies \mu(A) = 0$ or 1 (エルゴード性)

第 2 段階 $\lim_{t\to 0} \mu(A - tf) = \mu(A), \quad A \in \mathcal{B},\ f \in \mathcal{H}$ (連続性)

第 3 段階 $\mathbb{R}^T$ の任意の部分加群 H は $H = \bigcap_{p:\text{素数}} H_p$, H_p は $\mathbf{Q}_p$-モジュール と表すことができる. ただし, $\mathbf{Q}_p = \left\{ \frac{m}{n} \mid (n,p) = (n,m) = 1 \right\}$.

第 1 段階, 第 2 段階 が測度論的な結果であるのに対し, 第 3 段階は純代数的な, しかも $\mathbb{R}^T$ が線形空間であることを用いた結果である. そのため, Kallianpur の 0-1 法則を群の上の測度にまで拡張しようとするとき, この第 3 段階は障害になる. ところが, もし 第 2 段階を

$$\lim_{t\to 0} \mu(A \triangle (A - tf)) = 0, \qquad A \in \mathcal{B},\ f \in \mathcal{H}$$

に置き換えることができれば, 第 3 段階の議論なしで 0-1 法則を証明することができる. これが問題の出発点であり, この場合の可測変換群は f の張る 1 次元部分空間である.

本報告では, まず $\lim_{g\to e} \mu(A \triangle g^{-1}A) = 0, \quad A \in \mathcal{B}$ が成り立つための必要十分条件を与え, それが $\lim_{g\to e} \| \mu - \mu_g \|_{\mathrm{tot}} = 0$ ($\|\cdot\|_{\mathrm{tot}}$ は全変動ノルム) とも $\lim_{g\to e} \mu_g(A) = \mu(A), \quad A \in \mathcal{B}$ とも同値であることを証明する. 特に, すべての $g \in G$ に対して $\mu_g \sim \mu$ (μ_g と μ が互いに絶対連続) ならば, $g \mapsto \mu_g$ は連続である.

次にこの結果を応用して, Kallianpur の 0-1 法則を, 一般の可測群上の確率測度の場合にまで拡張する (§ 3.1). 我々の結果は, Kallianpur の結果とそれを拡張した諸結果を特別な場合として含むばかりでなく, ループ群上の ウィナー測度にも適用できる (§ 3.2). また, Zinn [20] で未解決であった問題を解決する (§ 3.3).

§ 2 連続性の特徴付け

定義 1 G 上の測度 ρ と X 上の測度 μ に対して, X 上の測度 $\rho * \mu$ を

$$(\rho * \mu)(A) = \int_G d\rho(g) \int_X I_A(gx)\, d\mu(x), \qquad A \in \mathcal{B}$$

と定義する.

注意 1 $\mu_g = \delta_g * \mu$ であり, $(\rho * \mu)(A) = \int_G \mu_g(A)\, d\rho(g)$ である.

注意 2 すべての $g \in G$ に対して $\mu_g \sim \mu$ であるとき, μ は G-**準不変** であるという. μ が G-準不変 ならば $\mu \ll m_G * \mu$ であるが, 逆は一般には成立しない.
実際 $G = X = \mathbb{R}$ の場合, $m_{\mathbb{R}}$ は ルベーグ測度 であり,

$$\mu \ll m_{\mathbb{R}} * \mu \iff \mu \ll m_{\mathbb{R}}, \qquad \mu : G\text{-準不変} \iff \mu \ll m_{\mathbb{R}} \ \text{かつ}\ \frac{d\mu}{dm_{\mathbb{R}}} > 0,\ m_{\mathbb{R}}\text{-a.e.}$$

である.

ここで, X 上の確率測度のクラス $\mathcal{M}_G(X)$ を次のように定義する. 注意 2 より, G-準不変測度は $\mathcal{M}_G(X)$ に含まれる.

定義 2 $\mathcal{M}_G(X) = \{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \mu \ll m_G * \mu\}$

次の補題は, $X = G = \mathbb{R}$ の場合の Lebesgue の定理である ([2, Proposition 9, p.275]).

補題 1 $\Phi \in L^1(m_G)$ と G 上の有界可測関数 f に対し,

$$\lim_{h \to e} \int_G |\Phi(g) - \Phi(hg)|\, dg = 0, \qquad \lim_{h \to e} \int_G |f(g) - f(hg)| \cdot |\Phi(g)|\, dg = 0$$

が成り立つ.

定理 1 G を 可測空間 $(X, \mathcal{B})$ 上の可測変換群, $\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする. このとき 次の (1)~(6) は同値である.

(1) $\mu \in \mathcal{M}_G(X)$.

(2) $\mu \ll \rho * \mu$, $\rho \ll m_G$ となる $\rho \in \mathcal{M}(G)$ が存在する.

(3) $\rho \sim m_G$ となるすべての $\rho \in \mathcal{M}(G)$ に対して, $\mu \ll \rho * \mu$.

(4) 各 $A \in \mathcal{B}$ に対して, $\lim_{g \to e} \mu_g(A) = \mu(A)$.

(5) 各 $A \in \mathcal{B}$ に対して, $\lim_{g \to e} \mu(A \triangle g^{-1}A) = 0$.

(6) $\lim_{g \to e} \| \mu - \mu_g \|_{\mathrm{tot}} = 0$.

特に, μ が G-準不変ならば, $\mu \in \mathcal{M}_G(X)$ である.

証明 (1) $\Leftrightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) と (5) $\Rightarrow$ (4) $\Leftarrow$ (6) は自明なので, (2) $\Rightarrow$ (5), (2) $\Rightarrow$ (6), (4) $\Rightarrow$ (1) を証明する.

(2) $\Rightarrow$ (5) の証明. ψ を X 上の有界可測関数とする. このとき 補題 1 より

$$\begin{aligned}&\int_X |\psi(x)-\psi(gx)|d(\rho*\mu)(x)\\ =\ &\int_X d\mu(x)\int_G |\psi(hx)-\psi(ghx)|\Phi(h)dh \to 0, \qquad g\to e\end{aligned}$$

が成り立つ (ただし, $\Phi(h)=\dfrac{d\rho}{dm_G}(h)$).

$F(x)=\dfrac{d\mu}{d(\rho*\mu)}(x)$ と任意の $\varepsilon>0$ に対し, 有界可測関数 f が存在して $\int_X |F(x)-f(x)|d(\rho*\mu)(x)<\varepsilon$ をみたすので

$$\begin{aligned}\int_X |\psi(x)-\psi(gx)|d\mu(x) &\le \int_X |\psi(x)-\psi(gx)|\cdot|F(x)-f(x)|d(\rho*\mu)(x)\\ &\quad+\int_X |\psi(x)-\psi(gx)|f(x)d(\rho*\mu)(x)\\ &\le 2\cdot\|\psi\|_\infty\cdot\varepsilon+\|f\|_\infty\cdot\int_X |\psi(x)-\psi(gx)|d(\rho*\mu)(x)\\ &\to 2\cdot\|\psi\|_\infty\cdot\varepsilon, \qquad g\to e\end{aligned}$$

である. したがって

$$\lim_{g\to e}\int_X |\psi(x)-\psi(gx)|d\mu(x)=0$$

が成り立つ.

(2) $\Rightarrow$ (6) の証明. まず 有界可測関数 f に対して

$$\lim_{g\to e}\|f(\rho*\mu)-\delta_g*(f(\rho*\mu))\|_{\mathrm{tot}}=0$$

が成り立つことを示す.

$\delta_g*(f(\rho*\mu))=f_g((\delta_g*\rho)*\mu)$ (ただし, $f_g(x)=f(g^{-1}x)$) より

$$\begin{aligned}&\|f(\rho*\mu)-\delta_g*(f(\rho*\mu))\|_{\mathrm{tot}}\\ \le\ &\|f(\rho*\mu)-f_g(\rho*\mu)\|_{\mathrm{tot}}+\|f_g(\rho*\mu)-f_g((\delta_g*\rho)*\mu)\|_{\mathrm{tot}}\\ =\ &\sup_{\|\varphi\|_\infty\le 1}\int_X \varphi(x)(f(x)-f(g^{-1}x))d(\rho*\mu)(x)\\ &+\sup_{\|\varphi\|_\infty\le 1}\left(\int_X \varphi(x)f(g^{-1}x)d(\rho*\mu)(x)-\int_X \varphi(x)f(g^{-1}x)d((\delta_g*\rho)*\mu)(x)\right)\\ \le\ &\int_X d\mu(x)\int_G |f(hx)-f(g^{-1}hx)|\Phi(h)dh+\|f\|_\infty\cdot\int_G |\Phi(h)-\Phi(g^{-1}h)|dh\end{aligned}$$

が成り立つ (ただし, $\Phi(h)=\dfrac{d\rho}{dm_G}(h)$). したがって 補題 1 より

$$\|f(\rho*\mu)-\delta_g*(f(\rho*\mu))\|_{\mathrm{tot}}\to 0, \qquad g\to e$$

である.

次に, $F(x) = \dfrac{d\mu}{d(\rho * \mu)}(x)$ と任意の 有界可測関数 f が存在して $\displaystyle\int_X |F(x) - f(x)| d(\rho * \mu)(x) < \varepsilon$ が成り立 $- f(\rho * \mu)\,\|_{\mathrm{tot}} < \varepsilon$ である. よって

$$
\begin{aligned}
\|\,\mu - \delta_g * \mu\,\|_{\mathrm{tot}} &\leq \|\,\mu - f(\rho * \mu)\,\|_{\mathrm{tot}} + \|\,f(\rho * \mu) - \delta_g * (f(\rho * \mu))\,\|_{\mathrm{tot}} \\
&\quad + \|\,\delta_g * (f(\rho * \mu)) - \delta_g * \mu\,\|_{\mathrm{tot}} \\
&< 2\varepsilon + \|\,f(\rho * \mu) - \delta_g * (f(\rho * \mu))\,\|_{\mathrm{tot}} \to 2\varepsilon, \qquad g \to e
\end{aligned}
$$

を得る. したがって $\lim_{g \to e} \|\,\mu - \delta_g * \mu\,\|_{\mathrm{tot}} = 0$ である.

(4) ⇒ (1) の証明. μ が $m_G * \mu$ に対して絶対連続でないと仮定すると, $A \in \mathcal{B}$ が存在して

$$
(m_G * \mu)(A) = 0 \quad \text{かつ} \quad \mu(A) > 0
$$

が成り立つ. このとき, $\mu(g^{-1}A) = 0$, m_G-a.e. $g \in G$ であり, e の任意の開近傍は m_G 測度正だから, G の点列 $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ が存在して

$$
\mu(g_j^{-1}A) = 0 \quad \text{かつ} \quad \lim_{j \to \infty} g_j = e
$$

をみたす. したがって $\lim_{j \to \infty} \mu(g_j^{-1}A) \neq \mu(A)$ となり, 矛盾が生じる. □

定理 1 では, 準不変性より弱い条件のもとで, $\lim_{g \to e} \mu(A \triangle g^{-1}A) = 0$, $A \in \mathcal{B}$ が成り立つことを示した. 一方, G-準不変性まで仮定すると, 可測性の問題がなくなって, $A \in \mathcal{B}_\mu$ についても同様の連続性が成り立つ. ただし, $\mathcal{B}_\mu$ は, μ による $\mathcal{B}$ の完備化を表す.

系 1 $\mu \in \mathcal{M}(X)$ が G-準不変 ならば, $\lim_{g \to e} \|\,\mu - \delta_g * \mu\,\|_{\mathrm{tot}} = 0$ であり, さらに 有界 $\mathcal{B}_\mu$-可測関数 ψ に対して,

$$
\lim_{g \to e} \int_X |\psi(x) - \psi(gx)| d\mu(x) = 0
$$

が成り立つ.

証明 μ は G-準不変だから, $m_G * \mu \sim \mu$ である. したがって 定理 1 より, $\lim_{g \to e} \|\,\mu - \delta_g * \mu\,\|_{\mathrm{tot}} = 0$ が成り立つ.

ψ を X 上の有界 $\mathcal{B}_\mu$-可測関数とする. $\psi \geq 0$ と仮定しても一般性を失わない. このとき, 有界 $\mathcal{B}$-可測関数 $\underline{\psi}, \overline{\psi}$ で,

$$
\underline{\psi} \leq \psi \leq \overline{\psi}, \qquad \int_X |\overline{\psi}(x) - \underline{\psi}(x)| d\mu(x) = 0
$$

をみたすものが存在する. μ は G-準不変であり,

$$|\psi(x)-\psi(gx)| \leq |\overline{\psi}(x)-\overline{\psi}(gx)|+|\underline{\psi}(x)-\underline{\psi}(gx)|+|\overline{\psi}(gx)-\underline{\psi}(gx)|$$

だから,

$$\int_X |\psi(x)-\psi(gx)|d\mu(x) \leq \int_X |\overline{\psi}(x)-\overline{\psi}(gx)|d\mu(x)+|\underline{\psi}(x)-\underline{\psi}(gx)|d\mu(x)$$

である. したがって 定理 1 より,

$$\lim_{g\to e}\int_X |\overline{\psi}(x)-\overline{\psi}(gx)|d\mu(x)+\lim_{g\to e}\int_X |\underline{\psi}(x)-\underline{\psi}(gx)|d\mu(x)=0$$

が成り立つ. □

系 2 $\mu \in \mathcal{M}(X)$ が G-準不変ならば,

$$\lim_{g\to e}\mu(A \triangle g^{-1}A)=0, \qquad A \in \mathcal{B}_\mu$$

である.

例 1 $\{F_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ は 確率空間 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 上の変換の 1 径数族で, $F_s \circ F_t = F_{s+t}$, $s,t \in \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto F_t(x) : (\mathbb{R}\times X, \mathcal{B}(\mathbb{R})\times\mathcal{B}) \to (X,\mathcal{B})$ は可測であり, $\mu\circ F_t^{-1} \sim \mu$, $t \in \mathbb{R}$ であるものとする. このとき $\mathbb{R}$ は X上の可測変換群なので, 各 $s_0 \in \mathbb{R}$ に対して, $\lim_{s\to s_0}\|\,\mu\circ F_s - \mu\circ F_{s_0}\,\|_{\mathrm{tot}}=0$ が成り立つ.

例 2 山崎 [18, Lemma 2] は, 定理 1 から導かれる. L を線形空間, L^a を L の代数的な双対空間とし, L^a 上の σ-加法族で, すべての $\xi \in L$ を可測にする最小のものを $\mathcal{B}_L$ とする. $a \in L^a$ を固定し, $F_t(x)=x+ta$, $t\in\mathbb{R}$ とすれば, L^a 上の変換の 1 径数族 $\{F_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ が定義され, $\mathbb{R}$ は L^a 上の可測変換群になる. したがって, $\mu \in \mathcal{M}(L^a)$ が$\mu\circ F_t^{-1} \sim \mu$, $t\in\mathbb{R}$ をみたせば, $\lim_{t\to 0}\|\,\mu-\delta_{ta}*\mu\,\|_{\mathrm{tot}}=0$ が成り立つ.

注意 3 Hamachi-Oka-Osikawa [6], Okazaki [16], Kanter [10] には, 準不変性を仮定した結果がある. また, Gulick, Liu and van Rooij [5], Liu and van Rooij [11], Liu, van Rooij and Wang [12] は, G が 局所コンパクト空間 X 上の連続変換群の場合に, 定理 1 (3), (4) を特徴付けた. Zabell [19] は X が標準ボレル空間の場合に, 定理 1 (3) と同値な条件を得た. X が局所コンパクト空間の場合は G の距離付け可能性は不要であるという点を除いて, 定理 1 はこれらの結果を特別な場合として含んでいる.

§ 3　応用・部分群に対する 0-1 法則

X を群, $\mathcal{B}$ を X の部分集合から成る σ-加法族 とする. 演算 $(x,y) \mapsto xy^{-1} : (X \times X, \mathcal{B} \times \mathcal{B}) \to (X, \mathcal{B})$ が可測であるとき, $(X, \mathcal{B})$ を **可測群** とよぶ.

可測群上の確率測度 μ が

$$\text{すべての可測な部分群 } H \text{ に対して,}\quad \mu(H) = 0 \text{ or } 1$$

という性質をもつとき, μ は 部分群に対する 0-1 法則をみたすという. § 1 で触れた Kallianpur の 0-1 法則は, 最もよく知られた 0-1 法則の一つである. この結果は拡張されて, 可測な部分群だけでなく, $\mathcal{B}_\mu$-可測な部分群や可測な剰余類の測度も 0 or 1 であることが証明された (Jain [7], Baker [1]).

ここでは, これらの拡張も含めて統一的に扱うために, 可測群 $(X, \mathcal{B})$ 上の確率測度 μ が,

$$\begin{cases} \text{任意の } \mathcal{B}_\mu\text{-可測部分群 } H \text{ に対して,}\quad \mu(H) = 0 \text{ or } 1 \\ \text{任意の可測部分群 } H \text{ と任意の } x \in X \text{ に対して,}\quad \mu(Hx) = 0 \text{ or } 1 \end{cases}$$

をみたすための条件を求める.

§ 3.1　可測群上の測度の 0-1 法則

以下, 可測群 $(X, \mathcal{B})$ 上の可測変換群 G として, X の部分群 G を考える. つまり, 部分群 G による左移動を考えるとき, G が X 上の可測変換群となるような位相が G に入っているものとする. § 1 の冒頭で述べた 二つの例は, この条件をみたしている.

定義 3　X 上の確率測度のクラス $\mathcal{E}(G)$, $\mathcal{E}'(G)$, $\mathcal{E}''(G)$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(G) &= \{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \mathcal{B}_\mu \ni H \text{ は部分群で } \mu(H) > 0 \text{ ならば, } G \subset H\}, \\ \mathcal{E}'(G) &= \{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid g^{-1}A \in \mathcal{B}_\mu,\ \lim_{g \to e} \mu(A \triangle g^{-1}A) = 0,\ A \in \mathcal{B}_\mu\}, \\ \mathcal{E}''(G) &= \{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \delta_g * \mu \sim \mu,\ g \in G\}. \end{aligned}$$

定義 4　$\mu, \nu \in \mathcal{M}(X)$ に対し, $\mu * \nu \in \mathcal{M}(X)$ を

$$(\mu * \nu)(A) = \int_X d\mu(x) \int_X I_A(xy) d\nu(y), \qquad A \in \mathcal{B}$$

と定義する.

命題 1　G が連結ならば, $\mathcal{E}''(G) \subset \mathcal{E}'(G) \subset \mathcal{E}(G)$ が成り立つ.

証明　系 2 より, G が連結でなくても, $\mathcal{E}''(G) \subset \mathcal{E}'(G)$ は成り立つ.

$\mu \in \mathcal{E}'(G)$ とし, $\mathcal{B}_\mu \ni H$ を X の部分群とする. $G \subset H$ でないと仮定し, $g_0 \in G \cap H^c$ をとる. G の連結性から, 単位元 e の任意の開近傍 U の有限個の点 $h_1, h_2, \ldots, h_n$ をとって, $g_0 = h_1 h_2 \cdots h_n$ と書くことができる. よって $H^c \cap U \neq \emptyset$ である. したがって, $G \cap H^c$ の点列 $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ で $\lim_{j\to\infty} g_j = e$ をみたすものが存在する. ところで, H は部分群だから, $H \cap g_j^{-1}H = \emptyset$, $j \in \mathbb{N}$ である. したがって 系 2 より,

$$\mu(H) \leq \mu(H) + \mu(g_j^{-1}H) = \mu(H \triangle g_j^{-1}H) \to 0, \qquad j \to +\infty$$

が成り立つ.　□

次の二つの 補題は, 部分群 H だけでなく, Hx の測度も 0 or 1 であることを証明するためのもので, 補題 2 は Janssen [8, Lemma 4] による. $\overline{\mu}(A) = \mu(A^{-1})$, $A \in \mathcal{B}$ と定義する. 補題 2 から, $\mu(Hx) = 0$ or 1 を証明するためには, $(\mu * \overline{\mu})(H) = 0$ or 1 を証明すればよいことが分かる.

補題 2　$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とし, $H \in \mathcal{B}$ を X の部分群とする.

(1)　$(\mu * \overline{\mu})(H) = 1$ であるための必要十分条件は, $\mu(Hx) = 1$ をみたす $x \in X$ が存在することである.

(2)　$(\mu * \overline{\mu})(H) = 0$ であるための必要十分条件は, すべての $x \in X$ に対して $\mu(Hx) = 0$ が成り立つことである.

証明　すべての $x \in X$ に対して

$$\begin{aligned}(\mu * \overline{\mu})(H) &= \int_X d\mu(z) \int_X I_H(zy^{-1}) d\mu(y) \\ &= \int_X \mu(Hy)\mu(y) \geq \int_{Hx} \mu(Hy) d\mu(y) = \mu(Hx)^2\end{aligned}$$

が成り立つことから, 容易に証明できる.　□

定義 5　X_0 を X の部分集合, $\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする. $aA = A$, $a \in X_0$ をみたす $A \subset X$ を X_0-**不変集合** とよぶ. また, すべての X_0-不変集合 $A \in \mathcal{B}$ に対して$\mu(A) = 0$ or 1 であるとき, μ は X_0-**エルゴード的** であるという.

補題 3　(1)　$\mu \in \mathcal{E}''(G)$ ならば, $\mu * \overline{\mu} \in \mathcal{E}''(G)$ である.

(2) X_0 を X の部分集合, $H \in \mathcal{B}$ を X の部分群とし, $X_0 \subset H$ とする. このとき $\mu \in \mathcal{M}(X)$ が X_0-エルゴード的ならば, $(\mu * \overline{\mu})(H) = 0$ or 1 である.

証明 (1) $\delta_g * \mu \sim \mu$ だから, すべての $g \in G$ に対して

$$\delta_g * (\mu * \overline{\mu}) = (\delta_g * \mu) * \overline{\mu} \sim \mu * \overline{\mu}$$

が成り立つ.

(2) $X_H = \{y \in X \mid \mu(Hy) = 0\}$ とすれば, X_H は X_0-不変なので, エルゴード性から $\mu(X_H) = 0$ or 1 である. また, 各 $y \in X$ に対し, Hy は X_0-不変だから, $\mu(Hy) = 0$ or 1 である. したがって,

$$(\mu * \overline{\mu})(H) = \int_X d\mu(x) \int_X I_H(xy^{-1}) d\mu(y) = \int_X \mu(Hy) d\mu(y)$$

より, $\mu(X_H) = 1$ ならば $(\mu * \overline{\mu})(H) = 0$ であり, $\mu(X_H) = 0$ ならば $\mu(Hy) = 1$, μ-a.e. $y \in X$, すなわち $(\mu * \overline{\mu})(H) = 1$ である. □

注意 4 「$\mu * \overline{\mu}$ が X_0-エルゴード的かどうか分からないが, X_0-不変な部分群 H については $(\mu * \overline{\mu})(H) = 0$ or 1 が成り立つ」というのが, 補題 3 (2) の主張である.

定理 2 $(X, \mathcal{B})$ を可測群, $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X の部分群の族とし, $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の生成する部分群を X_0 とする. 各 G_λ には, G_λ を X 上の可測変換群とするような位相が入っていて, G_λ は連結であるとする. このとき $\mu \in \mathcal{M}(X)$ が, すべての λ に対して G_λ-準不変であり, さらに X_0-エルゴード的であれば,

$$\text{任意の部分群 } H \in \mathcal{B}_\mu \text{ に対して,} \qquad \mu(H) = 0 \text{ or } 1,$$

$$\text{任意の部分群 } H \in \mathcal{B} \text{ と } x \in X \text{ に対して,} \qquad \mu(Hx) = 0 \text{ or } 1$$

が成り立つ.

証明 $H \in \mathcal{B}_\mu$ を X の部分群で $\mu(H) > 0$ をみたすものとして, $\mu(H) = 1$ を証明する. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $\mu \in \mathcal{E}''(G_\lambda)$ だから, 命題 1 より, $G_\lambda \subset H$ である. よって, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \subset H$, すなわち $X_0 \subset H$ である. したがって, エルゴード性から $\mu(H) = 1$ である.

次に, $H \in \mathcal{B}$ を X の部分群とする. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $\mu \in \mathcal{E}''(G_\lambda)$ だから, $\mu * \overline{\mu} \in \mathcal{E}''(G_\lambda) \subset \mathcal{E}(G_\lambda)$ である. もし, $\mu * \overline{\mu}(H) > 0$ ならば, $G_\lambda \subset H$, $\lambda \in \Lambda$ だから, $X_0 \subset H$ が成

り立ち, 補題 3 から $(\mu * \overline{\mu})(H) = 1$ を得る. よって, $(\mu * \overline{\mu})(H) = 0$ or 1 であり, 補題 2 から $\mu(Hx) = 0$ or 1, $x \in X$ である. □

X が第 2 可算公理をみたす位相群, $\mathcal{B}$ が X 上のボレル加法族で, μ がラドン測度の場合, 準不変性より弱い条件のもとで 0-1 法則が成り立つ.

定理 3 X を第 2 可算公理をみたす位相群, $\mathcal{B}$ を X 上のボレル加法族とする. $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X 上の部分群の族とし, $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の生成する部分群を X_0 とする. 各 G_λ には, G_λ を X 上の可測変換群とするような位相が入っていて, G_λ は連結であるとする. このとき, $\mu \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{M}_{G_\lambda}(X)$ がラドン測度であり, X_0-エルゴード的であれば,

$$\text{任意の右剰余類 } Hx \in \mathcal{B}_\mu \text{に対して,} \qquad \mu(Hx) = 0 \text{ or } 1$$

が成り立つ.

証明 H を X の部分群, $x \in X$ とし $Hx \in \mathcal{B}_\mu$ であるとする. μ はラドン測度だから, σ-コンパクト集合 $K \subset Hx$ で, $\mu(Hx \setminus K) = 0$ をみたすものが存在する. よって, Kx^{-1} が生成する部分群を H_0 とすれば, H_0 は σ-コンパクトであり,

$$K = (Kx^{-1})x \subset H_0x \subset Hx, \quad \text{したがって} \quad \mu(Hx \setminus H_0x) = 0$$

が成り立つ. よって, $H \in \mathcal{B}$ と仮定しても一般性を失わない.

$(\mu * \overline{\mu})(H) > 0$ ならば, $\mu * \overline{\mu} \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{M}_{G_\lambda}(X)$ より, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \subset H$, すなわち $X_0 \subset H$ である. したがって 補題 3より $(\mu * \overline{\mu})(H) = 1$ が成り立ち, 補題 2 より, すべての $x \in X$ に対して $\mu(Hx) = 0$ or 1 である. □

この定理が成り立つ典型的な例を二つ挙げる. $\mathbb{R}^\infty$ を実数列の全体とし, そのうち, 0 でない項が有限個しかないものの全体を $\mathbb{R}_0^\infty$ とする.

例 3 (独立確率変数列) $\mathbf{X} = \{X_n\}_{n=0}^\infty$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の独立確率変数列とし, 各 X_n の分布はルベーグ測度と互いに絶対連続であるとする. $\mathbf{X}$ の導く $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$ 上の分布を μ とすれば,

$$\text{任意の剰余類 } H + x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)_\mu \text{ に対して,} \qquad \mu(H + x) = 0 \text{ or } 1$$

が成り立つ. 実際,

$$\mathbb{R}^{(n)} = \{(x_j)_{j=0}^\infty \mid x_j = 0, \quad j > n\}, \qquad n \geq 0$$

とすれば, 各 $\mathbb{R}^{(n)}$ は $\mathbb{R}^\infty$ の部分群かつ $\mathbb{R}^\infty$ 上の連結な可測変換群であり, μ は $\mathbb{R}^{(n)}$-準不変である. また, $\bigcup_n \mathbb{R}^{(n)}$ の生成する部分群は $\mathbb{R}_0^\infty$ である.

一方, Kolmogorov の 0-1 法則より $\mathbf{X}$ の末尾事象は自明であるが, このことは μ が $\mathbb{R}_0^\infty$-エルゴード的であることと同値である. したがって 定理 3 が適用できる.

例 4 (ガウス測度)　E を 局所凸実線形位相空間とし, E^* をその位相的双対空間, $\langle x, \xi\rangle$ を $E \times E^*$ 上の線形形式とする. μ を $(E, \mathcal{B}(E))$ 上のガウス・ラドン測度, すなわち各 ξ に対し, $\xi(x) = \langle x, \xi\rangle$ が平均 0 の正規分布に従う確率変数となるようなラドン確率測度とする. このとき E を加法群と考えて

$$\mu(H) = 0 \text{ or } 1, \quad \text{任意の部分群 } H \in \mathcal{B}(E)_\mu$$

が成り立つ. 実際, 再生核ヒルベルト空間を $\mathcal{H}$ とすれば, μ は $\mathcal{H}$-準不変かつ $\mathcal{H}$-エルゴード的である. さらに 各 $h \in \mathcal{H}$ に対して $G_h = \{th \mid t \in \mathbb{R}\}$ とすれば, G_h は $(E, \mathcal{B}(E))$ 上の可測変換群であり $\mathcal{H} = \bigcup_{h\in\mathcal{H}} G_h$ である.

§ 3.2　ループ群上のウィナー測度の 0-1 法則

Γ を連結, 単連結なリー群, $\mathcal{G}$ をそのリー環とし, $\mathcal{G}$ 上に $(\mathrm{Ad}\,\Gamma)$-不変な内積が存在するものとする.

$[0,1]$ から Γ への連続写像γ で $\gamma(0) = e$ をみたすものの全体を W とする. また, 絶対連続な $\gamma \in W$ で

$$\rho(\gamma)^2 = \int_0^1 |\gamma(s)^{-1}\frac{d\gamma(s)}{ds}|^2 ds < +\infty$$

をみたすものの全体を K とする. このとき, 確率微分方程式

$$dg(s) = db(s) \circ g(s), \qquad g(0) = e, \qquad \{b(s)\}_{s\in[0,1]} \text{ は } \mathcal{G} \text{ 上の ブラウン運動}$$

の解の分布として W 上の ウィナー測度 P が定義される.

さらに, ループ群 $\mathcal{L} = \{\gamma \in W \mid \gamma(1) = e\}$ 上のウィナー測度を $\mu(A) = \mathrm{P}(\, A \mid \gamma(1) = e\,)$ と定義し, $K_0 = \{\gamma \in K \mid \gamma(1) = e\}$ とする.

定理 4　ループ群 $\mathcal{L}$ 上の ウィナー測度 μ は

$$\text{任意の右剰余類 } Hx \in \mathcal{B}_\mu \text{に対して,} \qquad \mu(Hx) = 0 \text{ or } 1$$

をみたす.

証明 Malliavin and Malliavin [13] により, μ は K_0-準不変である. また Gross [4] により, μ は K_0-エルゴード的である. いま, 絶対連続な $h:[0,1]\to\mathcal{G}$ で,

$$h(0)=h(1)=0, \qquad \int_0^1 |\dot{h}(s)|^2 ds < +\infty$$

をみたすものの全体を H_0 とし, γ_e を K_0 の単位元, すなわち$\gamma_e(s)\equiv e$, $s\in[0,1]$ とする. このとき Gross [3, Lemma 2.1] より, $\mathcal{G}$ から Γ への指数写像は, $\exp H_0\subset K_0$ をみたし, さらに $\exp H_0$ は γ_e の近傍を含む. したがって, $\{e^h \mid h\in H_0\}$ の生成する部分群は K_0 に一致する. いま, $h\in H_0$ に対して $G_h=\{e^{th}\}_{t\in\mathbb{R}}$ とすれば, G_h は $\mathcal{L}$ 上の連結な可測変換群であり, $\bigcup_{h\in H_0} G_h$ は K_0 を生成する. したがって, 定理 3 が適用できる. □

§ 3.3 数列空間上の測度の 0-1 法則

$\mathbf{X}=\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を実確率変数列, $\mathbf{X}$ の導く $(\mathbb{R}^\infty,\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$ 上の分布をμ とし, $p_n:\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}^{n+1}:\{x_j\}_{j=0}^{\infty}\mapsto\{x_j\}_{j=0}^{n}$ とする. また, $\mathbb{R}^{n+1}$ 上のルベーグ測度を λ_n と書く. Zinn [20] は $\mathbb{R}^\infty$ 上のボレル確率測度の族をいくつか導入して, それらの包含関係を調べたが,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= \{\mu\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^\infty)\mid \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)_\mu\ni H \text{ は部分群で}\mu(H)>0 \text{ ならば}, \mathbb{R}_0^\infty\subset H\},\\ \mathcal{E}_2 &= \{\mu\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^\infty)\mid \mu\circ p_n^{-1}\ll\lambda_n,\ n\geq 0\},\end{aligned}$$

の間の包含関係は未解決であった.

命題 2 $\mathcal{E}_2\subset\mathcal{E}_1$ である.

証明 $\mu\in\mathcal{E}_2$ とし, 部分群 $H\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)_\mu$ は $\mu(H)>0$ をみたすものとする. μ はラドン測度だから, σ-コンパクトな部分群 H_0 で $\mu(H_0)>0$ をみたすものが存在する. よって, $H\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ と仮定しても一般性を失わない.

もし $\mathbb{R}_0^\infty$ が H に含まれていなければ,

$$\mathbf{a}=(a_0,a_1,\ldots,a_n,0,0,\ldots)\in H^c, \quad a_n\neq 0$$

が存在する. μ を分布とする確率変数列を $\mathbf{X}=\{X_j\}_{j=0}^{\infty}$ とし, $(X_0,\ldots,X_n)$ の分布を μ_n とする. また, $\mathbf{g}$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の標準ガウス測度とする. このとき, すべての $(x_0,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ に対して $\mathbf{g}\sim\mathbf{g}*\delta_{(x_0,\ldots,x_n)}$ だから, $\mu_n\ll\mathbf{g}\sim\mathbf{g}*\mu_n$ が成り立つ. よって, 定理 1 を $\mu\in\mathcal{M}_{\mathbb{R}^{(n)}}(\mathbb{R}^\infty)$ に適用して$\lim_{t\to 0}\mu(H\triangle(H-t\mathbf{a}))=0$ を得る. いま $\frac{1}{k}\mathbf{a}\notin H$, $k\in\mathbb{N}$ だから,

$$\mu(H)\leq\mu(H)+\mu(H-\frac{1}{k}\mathbf{a})=\mu(H\triangle(H-\frac{1}{k}\mathbf{a}))\to 0, \qquad k\to+\infty$$

となるが, これは $\mu(H) > 0$ に矛盾する. したがって $\mathbb{R}_0^\infty \subset H$ である. □

このことから次の 0-1 法則が成り立つ.

定理 5 $\mathbf{X} = \{X_n\}_{n=0}^\infty$ を実確率変数列とし, $\mathbf{X}$ が導く $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$ 上の分布をμ とする. また, $(X_0, \ldots, X_n)$ が導く $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の分布をμ_n とする. このとき, $\mathbf{X}$ の末尾事象が自明で, $\mu_n \ll \lambda_n,\quad n \geq 0$ ならば,

$$\text{任意の剰余類 } H + x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)_\mu \text{ に対して,} \qquad \mu(Hx) = 0 \text{ or } 1$$

が成り立つ.

証明 μ はラドン測度であり, さらに 命題 2 の証明の中で示したように, $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}^{(n)}}(\mathbb{R}^\infty),\quad n \geq 0$ である. したがって 定理 3 が適用できる. □

注意 5 $\mu_n \sim \lambda_n$ まで仮定した場合は, Zinn [20, Corollary 3.1] が

$$\text{任意の部分群 } H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)_\mu \text{ に対して,} \qquad \mu(Hx) = 0 \text{ or } 1$$

であることを証明している.

参 考 文 献

[1] C. R. Baker. Zero-one laws for Gaussian measures on Banach space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 186:291–308, 1973.

[2] S.A. Gaal. *Linear analysis and representation theory.* Springer, 1973.

[3] L. Gross. Logarithmic Sobolev inequalities on Lie groups. *Ill. J. of Math.*, 36:447–490, 1992.

[4] L. Gross. Uniqueness of ground states for Schrödinger operators over loop groups. *J. Funct. Anal.*, 112:373–441, 1993.

[5] S.L. Gulick, T.-S. Liu, and A. van Rooij. Group algebra modules II. *Can. J. Math.*, 19:151–173, 1967.

[6] T. Hamachi, Y. Oka, and M. Osikawa. Flows associated with ergodic non-singular transformation groups. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 11:31–50, 1975.

[7] N. C. Jain. A zero-one law for Gaussian processes. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 29(3):585–587, 1971.

[8] A. Janssen. Zero-one laws for infinitely divisible measures on groups. *Z. Wahr. verw. Gebiete.*, 60:119–138, 1982.

[9] G. Kallianpur. Zero-one laws for Gaussian processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 149:199–211, May 1970.

[10] M. Kanter. Equivalence singularity dichotomies for a class of ergodic measures. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 81:249–252, 1977.

[11] T.-S. Liu and A. van Rooij. Transformation groups and absolutely continuous measures. *Indag. Math.*, 30:225–231, 1969.

[12] T.-S. Liu, A. van Rooij, and J.-K. Wang. Transformation groups and absolutely continuous measures II. *Indag. Math.*, 32:57–61, 1970.

[13] M.-P. Malliavin and P. Malliavin. Integration on loop groups. I. quasi invariant measures. *J. Funct. Anal.*, 93:207–237, 1990.

[14] H. Mizumachi. Continuity and singularity of measures under action groups. *Hokkaido J. Math.*, 23(2):361–371, 1994.

[15] H. Mizumachi and H. Sato. Continuity of quasi-invariant measures and zero-one laws on groups. *J. Funct. Anal.*, 120(1):188–200, 1994.

[16] Y. Okazaki. Equivalent-singular dichotomy for quasi-invariant ergodic measures. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 21(4):393–400, 1985.

[17] H. Yamaguchi. The F. and M. Riesz theorem on certain transformation groups. *Hokkaido Math. J.*, 17(3):289–332, 1988.

[18] 山崎 泰郎. 無限次元空間の測度・下. 紀伊國屋数学叢書 *13*, 紀伊國屋書店, 1978.

[19] S. L. Zabell. A note on translation continuity of probability measures. *Ann. Probab.*, 20(1):410–420, 1992.

[20] J. Zinn. Zero-one laws for non-Gaussian measures. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 44(1):179–185, 1974.