数理解析研究所講究録
第887巻1994年72-96

Fock空間上の量子確率過程

– ホワイト ノイズの観点から –

名古屋大学理学部数学教室
尾 畑 伸 明

はじめに

Fock 空間[1] 上の量子確率過程の研究の歴史は, 物理学サイド のものを別にすれば, それほど古くはなく, 1984 年の Hudson-Parthasarathy [12] が 1 つの礎となった. ここにきて, 量子確率過程に関する (数学者による) 教科書 Meyer [17], Parthasarathy [25] が相次いで出版され, また Mathematical Reviews にもその項目が載るようになり[2], 数学的関心も高まりつつあるといえよう. 言うまでもなく Fock 空間は場の量子論における基本概念であり, Gauss 空間 (Gauss 測度を備えた無限次元ベクトル空間) 上の L^2-空間として実現される (Wiener-Itô-Segal の同型). 1970 年代には Gauss 空間上の超関数論が様々な形で提唱され, Brown 運動を基盤とした今日の確率解析に大きな影響が与えられた. この超関数論を Fock 空間上の作用素 (特に量子確率過程) の研究に応用したらどうか? というのが我々の出発点である.

この論文で扱うのは, 飛田が 1975 年のレクチャーノート [7] によって提唱し, 後に久保と竹中が一連の論文 [16] で定式化した “ホワイト ノイズ解析” である[3]. その関数解析的側面は, 一言でいって, Gauss 空間上の Schwartz 型超関数論であり,

(a) 通常は確率超過程として扱われているホワイト ノイズを, 各時点毎に Gauss 空間上の超関数が対応するような超関数空間内の連続な流れとして定式化していること;

(b) 通常は作用素値超関数として扱われている生成· 消滅作用素を, 各点毎に意味のある連続作用素として定式化していること;

の 2 点が特に注目に値する. (b) の重要性に鑑みて, 各点の消滅作用素は “飛田の微分作用素” とも呼ばれ, 我々は記号 ∂_t で表す. もちろん, その共役 ∂_t^* が生成作用素である. 上で述べた特徴はこれまでも多かれ少なかれ注目されてきたが, 本格的に表舞台に登場するのは Fock 空間上の作用素論においてである. そこで最も基本的な役割を果たすものは, 超関数を核とする積分核作用素であって [10] で初めて導入された. その後 [19], [20] において, 核型空間の理論を用いつつ Fock 空間上の作用素論としての形態が整ったのである.

[1]この論文では Boson Fock 空間を意味する.

[2]81S25 quantum stochastic calculus

[3]ホワイト ノイズ解析の応用は, 確率微分方程式, 無限次元 Dirichlet 形式, Feynman の経路積分など多岐にわたっている. [9] とそこに引用されている論文を参照.

こうして, 量子確率論において従来から主要な道具となっている Hilbert 空間上の作用素環の理論に加えて, 我々はホワイトノイズ解析を通じて超関数とそれに基づく作用素論を手にすることになる. しかしながら, この方向の研究はまだ端緒についたばかりであり, 具体的な結果となると少ない. Huang [11] はホワイトノイズ解析の特性にいち早く注目し, 量子的伊藤公式の再定式化と一般化を (やや形式的にではあるが) 論じた. それと並行して, 一連の論文 Obata [21]–[23] において, 伊藤式の量子確率積分の一般化として量子的 Hitsuda-Skorokhod 積分を論じている. この論文では, 量子確率過程とその量子確率積分を新たに定式化して, 今までの結果を補完し一般化する. ホワイトノイズ解析に関する記号や用語などは [19] に従う. なお, §1 は一般読者の便宜のためホワイトノイズ解析の背景説明にあてる. また, 日本語で書かれた報告として [21] も参照されたい.

理論的枠組を整えることはそれ自身で興味あるが, 応用面でも広がりを見せつつある. 量子系の確率過程の研究の源泉とでもいうべき非平衡系の量子力学や量子光学 (例えば, [2], [3], [6]), 最近発展が著しい量子情報理論 ([24] と引用されている文献) との関連は特に興味深い. また, 量子カオスの研究で重要な役割を果たしているランダム行列の理論を, 量子確率過程の立場から構成するという新しい流れが起こっている. 一連の論文集 [1] は, 最近 10 年の数学サイドを中心とした量子確率論の研究の流れを知る上で好都合である.

最後に, 本論文の主旨ではないが, ホワイトノイズによる Fock 空間上の作用素論の別の可能性として, Gauss 空間上の調和解析をあげておきたい. 最近になって, ホワイトノイズによる Fock 空間上の作用素論の観点から, 無限次元回転群, ラプラシアン, フーリエ変換などの相互の関係が明らかにされてきた. 1960 年代に吉沢が提唱した無限次元回転群の調和解析は, 山崎による無限次元空間上の測度論 [27] や河野, 折原等の球面調和関数の研究によって花を開いたが, 1970 年代に次々と生まれた Gauss 空間上の超関数論と正面から向き合うことはなかったように見える. 今, 無限次元回転群の調和解析を再出発させてもよい時期にきているようにも思う. この関連では [18], [19] とそこに引用されている論文を参照されたし.

1 Fock 空間と Brown 運動

言うまでもなく Fock 空間は場の量子論において, Brown 運動は確率過程論において基本的な概念であるが, 両者は Gauss 測度を媒体として結び付いている. ここでは, その様子を概観しつつ, ホワイトノイズ解析がそれらをどう扱おうとしているかを説明しよう.

この論文では量子確率 "過程" がテーマであるから, 時間パラメーターは $\mathbb{R}$ を走るものとして, 実 Hilbert 空間

$$H = L^2(\mathbb{R}, dt; \mathbb{R})$$

を基礎にとる. H の内積とノルムは, それぞれ $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $|\cdot|$ で表す. 以下の議論の中には, 全く一般の Hilbert 空間, あるいは適当な位相空間 T 上の L^2-空間などでも通用することも多いが一々断らない[4].

[4]例えば, ホワイトノイズ解析の基本的枠組も一般の位相空間 T とその上の σ-有限測度 ν をもとに構成されている. 詳細は [19] を見よ.

1.1 Gauss 空間

さて, $H = L^2(\mathbb{R}, dt; \mathbb{R})$ 上の関数

$$C(\xi) = e^{-|\xi|^2/2} = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t)^2 dt\right), \qquad \xi \in H,$$

は連続, 正定値かつ $C(0) = 1$ をみたす. よって, Bochner-Minlos の定理 [27] によって, C は H に Hilbert-Schmidt 型に埋め込まれた空間の双対空間上の確率測度 μ の特性関数 (Fourier 変換) になっている. ここでは, そのような 3 つ組として,

$$E = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset H = L^2(\mathbb{R}) \subset E^* = \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

を採用しよう. $E^* \times E$ 上の標準双線型形式は, H の内積を拡張して得られるので同じ記号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表す. そうすれば, μ は

$$e^{-|\xi|^2/2} = \int_{E^*} e^{i\langle x, \xi \rangle} \mu(dx), \qquad \xi \in E,$$

によって特徴づけられる E^* 上の確率測度となる. この μ を (標準)Gauss 測度, 確率空間 (E^*, μ) を Gauss 空間と呼ぶ.

上の Gelfand triple の複素化は $E_{\mathbb{C}} \subset H_{\mathbb{C}} \subset E_{\mathbb{C}}^*$ のように表し, $E_{\mathbb{C}}^* \times E_{\mathbb{C}}$ 上の (複素) 標準双線型形式もやはり $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表す. したがって, Hilbert 空間 $H_{\mathbb{C}}$ の内積は

$$\langle \overline{\xi}, \eta \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\xi(t)} \eta(t)\, dt, \qquad \xi, \eta \in H_{\mathbb{C}} = L^2(\mathbb{R}, dt; \mathbb{C}),$$

で与えられるので注意しておこう. このような記法はテンソル積や対称テンソル積にも適用する. 例えば, $E_{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{C}$-値の 1 変数急減少関数の空間であるから, $E_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$ は n 変数急減少関数の空間, $E_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ は n 変数急減少関数で対称なものの全体となる. $(E_{\mathbb{C}}^{\otimes n})^* \times (E_{\mathbb{C}}^{\otimes n})$ 上の標準双線型形式も同じ記号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表す.

1.2 Fock 空間と Wiener-Itô-Segal 同型

各 $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して $f_n \in H_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ となっている関数列 $\mathbf{f} = (f_n)$ で

$$\| \mathbf{f} \|^2 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} n! \, | f_n |^2 < \infty \tag{1.1}$$

をみたすもの全体は, $\| \cdot \|$ をノルムとして Hilbert 空間になる. これを $H_{\mathbb{C}}$ 上の Fock 空間といい $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ で表す. そうすれば, $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ の標準双線型形式は

$$\langle\!\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle\!\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n! \, \langle f_n, g_n \rangle, \qquad \mathbf{f} = (f_n), \ \mathbf{g} = (g_n) \in \Gamma(H_{\mathbb{C}}),$$

で与えられる. さて

$$\mathbf{f} = \left(1, \frac{\xi}{1!}, \frac{\xi^{\otimes 2}}{2!}, \cdots\right), \qquad \xi \in H_{\mathbb{C}}, \tag{1.2}$$

は $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ に属する．これを指数ベクトル又はコーヒーレント状態という．特に $(1,0,0,\cdots)$ を真空ベクトルという．

次に, $\xi\in E_{\mathbb{C}}$ を固定して E^* 上の関数

$$\phi_\xi(x)\equiv\exp\left(\langle x,\,\xi\rangle-\frac{1}{2}\langle\xi,\,\xi\rangle\right),\qquad x\in E^*,$$

を考えよう．これは "正規化された" 指数関数とでもいうべきもので (L^2) に属す．有名な Wiener-Itô-Segal の同型は次のように述べることができる．

定 理 1.1 対応 $\left(1,\dfrac{\xi}{1!},\dfrac{\xi^{\otimes 2}}{2!},\cdots\right)\longleftrightarrow\phi_\xi$, $\xi\in E_{\mathbb{C}}$, は $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ と (L^2) のユニタリー同型を一意的に定める．

したがって, 真空ベクトルには恒等的に 1 をとる関数 ϕ_0 が対応する．一般の $\mathbf{f}=(f_n)\in\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ に対応する (L^2) の関数は

$$\phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\langle :x^{\otimes n}:,\,f_n\right\rangle,\qquad x\in E^*\tag{1.3}$$

のように表す．逆に, 任意の $\phi\in(L^2)$ は上の形に書けることになるが, それを ϕ の Wiener-Itô 展開とよぶ. (1.3) の右辺は直交和になって,

$$\|\phi\|^2=\sum_{n=0}^{\infty}n!\,|f_n|^2\tag{1.4}$$

が成り立つことに注意しよう．したがって, $\psi\in(L^2)$ の Wiener-Itô 展開を

$$\psi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\langle :x^{\otimes n}:,\,g_n\right\rangle,\qquad x\in E^*,$$

とすれば,

$$\langle\!\langle\phi,\,\psi\rangle\!\rangle\equiv\int_{E^*}\phi(x)\psi(x)\mu(dx)=\sum_{n=0}^{\infty}n!\,\langle f_n,\,g_n\rangle\tag{1.5}$$

が成り立つことになる．また, $:x^{\otimes n}:$ は x の多項式として次の漸化式で定まる．

$$\begin{aligned}
:x^{\otimes 0}: &= 1,\\
:x^{\otimes 1}: &= x,\\
:x^{\otimes n}: &= x\widehat{\otimes}:x^{\otimes(n-1)}:-(n-1)\,\tau\widehat{\otimes}:x^{\otimes(n-2)}:,\qquad n\geq 2.
\end{aligned}$$

ここで $\tau\in(E\otimes E)^*=\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ は

$$\langle\tau,\,\xi\otimes\eta\rangle=\langle\xi,\,\eta\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\xi(t)\eta(t)\,dt\tag{1.6}$$

で定義される $\mathbb{R}^2$ の対角線上に集中している超関数である．詳しいことは [19] などを見よ．

1.3 生成・消滅作用素

本来, Fock 空間は量子力学的粒子の生成・消滅を記述するためにある. 我々は $H_{\mathbb{C}} = L^2(\mathbb{R}, dt; \mathbb{C})$ を固定しているが, これは 1 自由度のスカラー粒子を記述するための Hilbert 空間と考えられる. 例えば, 1 自由度の量子調和振動子の場合ならば

$$A = 1 + t^2 - \frac{d^2}{dt^2} \tag{1.7}$$

をハミルトニアンととることができる[5]. ここで t は 1 次元空間 $\mathbb{R}$ の位置を表す座標であって時間ではないことに注意. このとき, 固有値問題 $A\xi = \lambda\xi$ の解で $|\xi| = 1$ をみたすもの[6] は $H_{\mathbb{C}}$ の完全正規直交系となる. 考えている粒子は Bose 統計にしたがうものとする. このとき, その粒子 n 個からなる系は $H_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ の単位ベクトルによって記述される. 多粒子空間 $H_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ の全体が Fock 空間[7] である.

粒子の生成・消滅は Fock 空間上の作用素で表される. $\xi \in E$ に対応して, $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ 上の線形作用素 $a(\xi)$, $a^*(\xi)$ を定義しよう. Fock 空間は $(0, \cdots, 0, f^{\otimes n}, 0, \cdots)$, $f \in H_{\mathbb{C}}$, の形のベクトルで生成されるので, それに対する作用を与えれば良い:

$$\begin{aligned} a(\xi) &: (0, \cdots, 0, f^{\otimes n}, 0, \cdots) \mapsto n \langle \xi, f \rangle (0, \cdots, 0, f^{\otimes (n-1)}, 0, \cdots) \\ a^*(\xi) &: (0, \cdots, 0, f^{\otimes n}, 0, \cdots) \mapsto (0, \cdots, 0, \xi \widehat{\otimes} f^{\otimes n}, 0, \cdots). \end{aligned} \tag{1.8}$$

それぞれを $\xi \in E$ に対する消滅作用素または生成作用素という. これらは有界作用素とはなりえず, Fock 空間の適当な稠密部分空間上で定義されることになる. また, $a(\xi)$, $a^*(\xi)$ は ξ 毎に (非有界) 作用素が対応するという意味で作用素値超関数である. したがって, 各点 $t \in \mathbb{R}$ における生成・消滅作用素は定義されないが $a(t)$, $a^*(t)$ のようにかいて, $a(\xi)$, $a^*(\xi)$ は積分

$$a(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \xi(t) a(t)\, dt, \qquad a^*(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \xi(t) a^*(t)\, dt, \tag{1.9}$$

で得られると考えると便利である. ホワイトノイズ解析にしたがって Fock 空間 $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ を Gelfand triple で拡張すれば, $a(t)$, $a^*(t)$ を各点 t 毎に連続作用素として定式化することができ, 作用素値超関数から解放される.

1.4 ホワイトノイズと Brown 運動

古典的確率過程論で中心的役割を演ずるのは Brown 運動 (Wiener 過程) である. その構成・実現には様々な方法があるが, 我々は既に Gauss 空間 (E^*, μ) を手にしているので, これを基礎の確率空間として確率論の世界に入ろう.

---

[5] ハミルトニアンとしては $(A-1)/2$ のほうが普通であるが, A は後でも使うのでこうしておく.

[6] 物理的には, そのような ξ はエネルギー λ をもつ定常状態に対応する.

[7] 物理学の文献では, Hilbert 空間 $H_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ の直和をいう. 我々は, (1.1) からわかるように, 直和をとるときに荷重 $n!$ をつけている. これは, 指数ベクトル (1.2) が普通の指数関数の級数展開と同じ形にしたかったからであり, 本質的な差異を生じるものではない.

さて, $\xi \in E$ に対して,

$$X_\xi(x) = \langle x, \xi \rangle, \qquad x \in E^*,$$

とおくと, E^* 上の $\mathbb{R}$-値連続関数になり, 実確率変数の族 $\{X_\xi; \xi \in E\}$ は Gauss 系[8] となる. このとき, (1.5) から

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_\xi) &= \langle\!\langle X_\xi, 1 \rangle\!\rangle = 0, \\ \mathbf{E}(X_\xi X_\eta) &= \langle\!\langle X_\xi, X_\eta \rangle\!\rangle = \langle \xi, \eta \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t)\eta(t)dt, \end{aligned} \tag{1.10}$$

を得る[9]. ここで $X(x,\xi) = X_\xi(x) = \langle x, \xi \rangle$ とかけば, 写像 $X : E^* \times E \to \mathbb{R}$ は

(i) $\xi \in E$ ををとめる毎に, $x \mapsto X(x,\xi)$ は確率空間 (E^*, μ) 上の確率変数;

(ii) $x \in E^*$ をとめる毎に $\xi \mapsto X(x,\xi)$ は E 上の連続線型形式;

という 2 性質を持つ. このような X を確率超過程[10] という.

上の (ii) より各 $x \in E^*$ に対して $X(x,\xi) = \langle \Phi(x), \xi \rangle$ をみたす $\Phi(x) \in E^*$ が存在する (我々の場合は, 明らかに $\Phi(x) = x$ である). $\Phi(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の超関数なので $t \in \mathbb{R}$ における値は意味をなさないが, あたかも $t \in \mathbb{R}$ における値が $\Phi_t(x)$ で与えられているように考えて,

$$X(x,\xi) = \langle \Phi(x), \xi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t(x)\xi(t)\, dt \tag{1.11}$$

とかくと便利である. このとき Φ_t は各時点 $t \in \mathbb{R}$ で確率変数を表すわけではないが, (1.11) の意味で確率変数の系 $\{X_\xi\}$ の構成原子のように見える. そこで, この $\{\Phi_t\}$ もまた確率超過程と呼ぶことにする. 特に我々の場合は,

$$\Phi_t(x) = x(t) = \langle x, \delta_t \rangle \tag{1.12}$$

であるが, 確かに意味をなさない (x, δ_t ともに E^* の元である!). しかしながら, 上に述べたように Φ_t は確率超過程になっているのである. これをホワイトノイズと呼び, 記号の簡便さから単に $x(t)$ ともかく. (1.10) から形式的に $\{x(t)\}$ のみたす式を書き出せば

$$\mathbf{E}(x(t)) = 0, \qquad \mathbf{E}(x(s)x(t)) = \delta(s-t), \tag{1.13}$$

となる. これらはホワイトノイズの平均と共分散関数である. 特に共分散関数は時間のシフトに関して不変であるからホワイトノイズは定常過程であるといえる. そのスペクトル測度[11] が全域でフラットなルベック測度であることが $\{x(t)\}$ をホワイトノイズとよぶ所以である.

さて, (1.10) からすぐにわかるが, $\xi \mapsto X_\xi$ は $H_{\mathbb{C}}$ から (L^2) の中へのユニタリーに拡張され[12], 実確率変数の族 $\{X_\xi\,;\, \xi \in H\}$ は再び Gauss 系となる. 特に, 区間 $[0,t]$ の特性関

---

[8] 一般に, 実確率変数の族 $\{X_\lambda\}$ が Gauss 系であるとは, そこから任意に選んで作った有限一次結合 $a_1 X_{\lambda_1} + \cdots + a_n X_{\lambda_n}$ の分布が (1 次元)Gauss 測度になること.

[9] 慣例によって, 確率変数 X の平均値を $\mathbf{E}(X) = \displaystyle\int_{E^*} X(x)\,\mu(dx)$ で表す.

[10] 1950 年代前半に Gelfand と伊藤によって導入された.

[11] 定常な確率 (超) 過程の共分散関数の逆フーリエ変換.

[12] これは, 既に述べた Wiener-Itô-Segal の同型の一部である.

数 $\xi = 1_{[0,t]}$ をとって,

$$B_t(x) = \left\langle x,\, 1_{[0,t]} \right\rangle, \qquad x \in E^*, \quad t \geq 0, \tag{1.14}$$

を考えよう. これは上述の Gauss 系の部分系であり, “時間”パラメーター t をもつので Gauss 過程と呼ぶのがふさわしい. さらに, 簡単な計算で

$$B_0 = 0, \qquad \mathbf{E}(B_t) = 0, \qquad \mathbf{E}(B_s B_t) = s \wedge t, \qquad s,t \geq 0,$$

を得る. したがって, $\{B_t; t \geq 0\}$ は原点 0 を出発点とする Brown 運動[13] である. 形式的表示 (1.11) に習えば,

$$B_t(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{[0,t]}(s)x(s)\,ds = \int_0^t x(s)\,ds$$

と表され, さらに

$$x(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t x(s)\,ds = \frac{d}{dt}B_t(x), \qquad t \geq 0. \tag{1.15}$$

こうして $x(t)$ は Brown 運動 $B_t(x)$ の “時間微分” のように見える. 時間パラメーターを陽に含む $\{x(t)\}$ は時間発展が直感的に捉えやすく, $dB(t) = x(t)dt$ とおくと確率積分が形式的に普通の積分のように計算できる. 実際, 物理学などでは $x(t)$ をそのままの形で扱うことが多い. しかしながら, よく知られているように, Brown 運動の軌跡は時間微分可能ではなく, 有界変動でさえない! からサンプル毎にとり出して微分することはできない. この議論を正当化する一つの枠組がホワイトノイズ解析で与えられる.

2 ホワイトノイズ超関数

2.1 第二量子化作用素による構成

我々の Gauss 空間 (E^*, μ) は Gelfand triple

$$E = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset H = L^2(\mathbb{R}) \subset E^* = \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

から構成されたが, これを Fock 空間に持ち上げることで Gauss 空間上の Schwartz 型超関数論を構成する[14]. 微分作用素 A を (1.7) で定義された 1 次元量子調和振動子のハミルトニアンとする. Schwartz の急減少関数の空間 $E = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ は $H = L^2(\mathbb{R}, dt; \mathbb{R})$ の部分空間であるが, 微分作用素 A を用いて自然に定義される. すなわち, E はベクトル空間として A の C^∞-領域であり, その位相はノルム族 $|\xi|_p = |A^p\xi|$, $p \in \mathbb{R}$, によって定義される. このノルム族は整列されているので, E は可算 Hilbert 空間である. さらに A^{-1} が Hilbert-Schmidt 型であることから, E は核型空間になる.

[13]これを広義の Brown 運動と呼び, Brown 運動というときはさらに連続過程であること (サンプル毎に $t \mapsto B_t(x)$ が連続) を仮定することも多い. 広義の Brown 運動に対して, Kolmogorov の連続変形定理を適用すれば, それと同等な連続過程が得られる. [8] などを参照.

[14]構成方法は色々と工夫されている. [15], [28] を見よ.

次に A を Fock 空間上に持ち上げる．この操作が第二量子化である．$\phi \in (L^2)$ の Wiener-Itô 展開が

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle :x^{\otimes n}:, f_n \right\rangle \tag{2.1}$$

で与えられているとき, $\Gamma(A)$ を

$$\Gamma(A)\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle :x^{\otimes n}:, A^{\otimes n} f_n \right\rangle,$$

によって定義する．通常の L^2-定義域を考えると, $\Gamma(A)$ は正の自己共役作用素となり，さらに $\Gamma(A)^{-1}$ が Hilbert-Schmidt 型になることが証明される．そうすれば, E が A から自然に構成されたように, 可算 Hilbert 核型空間が $\Gamma(A)$ から構成される．それを (E) とかくと (複素)Gelfand triple:

$$(E) \subset (L^2) = L^2(E^*, \mu; \mathbb{C}) \subset (E)^*.$$

が得られる．(E) の元をホワイトノイズ・テスト関数, $(E)^*$ の元をホワイトノイズ超関数と呼ぶ．$(E)^* \times (E)$ 上の標準双線型形式を $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ で表す．(E) の定義ノルム系を $\|\cdot\|_p$ で表せば, (2.1) で与えられる $\phi \in (E)$ に対して,

$$\|\phi\|_p^2 = \|\Gamma(A)^p \phi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |(A^{\otimes n})^p f_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |f_n|_p^2, \qquad p \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

が成り立つ．これは Wiener-Itô-Segal のユニタリー同型 (1.4) の自然な拡張になっている．

2.2 ホワイトノイズテスト関数の Wiener-Itô 展開

各 $\phi \in (E)$ はもちろん (L^2) の関数であるから (2.1) のような Wiener-Itô 展開が考えられる．このとき, $\phi \in (E)$ となるための条件を f_n の性質で述べるとどうなるだろうか? 答えは (2.2) から明らかであろうが, 次の 2 条件が必要かつ十分である:

(i) 各 n に対して $f_n \in E_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$;

(ii) 任意の $p \geq 0$ に対して $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! |f_n|_p^2 < \infty$.

ところで, 構成の仕方から各 $\phi \in (E)$ は $L^2(E^*, \mu)$ の元として定まるので, μ-零関数を除いて定まる[15]．久保・横井の連続性定理によれば, $\phi \in (E)$ の Wiener-Itô 展開は各点 $x \in E^*$ で絶対収束し, E^* 上の (強位相に関する) 連続関数になる．さらに, それは ϕ に対して殆ど至るところ一致する唯一の連続関数であることが知られている．したがって, はじめからホワイトノイズ・テスト関数は E^* 上の連続関数であると仮定しておいて良い．

[15] この事情は, A で $E = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ を構成する時も同様である．各 $\phi \in E$ に対して殆んど至るところ一致する急減少関数が一意的に存在することが証明される．

2.3 ホワイトノイズ超関数の Wiener-Itô 展開

次に, Wiener-Itô 展開をホワイトノイズ超関数に拡張しよう. 超関数の列 $F_n \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes n})^*_{\mathrm{sym}}$ に対して, ある $p \ge 0$ が存在して $\sum_{n=0}^{\infty} n! \, | F_n |_{-p}^2 < \infty$ となっていると仮定しよう. このとき $\phi \in (E)$ の Wiener-Itô 展開が (2.1) で与えられているとして,

$$\langle\!\langle \Phi, \phi \rangle\!\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n! \, \langle F_n, f_n \rangle, \tag{2.3}$$

とおくと, $\Phi \in (E)^*$ が証明される. 実際, 等式

$$\| \Phi \|_{-p}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! \, | F_n |_{-p}^2, \qquad p \in \mathbb{R},$$

が成り立つ[16]. この Φ を

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle :x^{\otimes n}:, F_n \right\rangle \tag{2.4}$$

とかき, Φ の Wiener-Itô 展開と呼ぶ. 逆に, 任意の $\Phi \in (E)^*$ はこの形である. 但し, 級数そのものは各点 $x \in E^*$ で意味を持たず, 適当なノルム $\| \cdot \|_{-p}$ 又は, $\phi \in (E)$ との標準双線型形式を通しての収束として理解する.

2.4 ホワイトノイズ超関数としてのホワイトノイズ

§1.4 においてホワイトノイズ $\Phi_t(x) = x(t)$ は確率超過程と理解されることは述べた. ここで改めて

$$\Phi_t(x) = \langle :x^{\otimes 1}:, \delta_t \rangle = \langle x, \delta_t \rangle$$

を考えよう. 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して, $\delta_t \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) = E^*$ なので, 前節の (2.4) の特別な場合であるから, Φ_t はホワイトノイズ超関数である: $\Phi_t \in (E)^*$. これは, 前に確率超過程と理解したホワイトノイズと同じものである. 要は, Gauss 空間上の超関数空間 $(E)^*$ を準備することによって, ホワイトノイズを $(E)^*$ の中に捉えたということである. さらに, $t \mapsto \Phi_t$ は $\mathbb{R}$ から $(E)^*$ への連続写像なので, ホワイトノイズは $(E)^*$ の中の連続な流れとなる. やはり $\Phi_t(x) = x(t)$ と書くのが便利である.

同じように $t \mapsto B_t$ も $(E)^*$ の中の流れである. 今, テスト関数 $\phi \in (E)$ をとり, その Wiener-Itô 展開をいつも通り

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle :x^{\otimes n}:, f_n \right\rangle$$

とすれば, (2.3) から

$$\langle\!\langle B_t, \phi \rangle\!\rangle = \left\langle 1_{[0,t]}, f_1 \right\rangle = \int_0^t f_1(s) \, ds.$$

---

[16] $\infty = \infty$ も許す. 十分大きな p に対しては有限値になる.

$f_1 \in E_{\mathbb{C}}$ であるから, 両辺は微分できて,

$$\frac{d}{dt}\langle\langle B_t, \phi\rangle\rangle = \frac{d}{dt}\int_0^t f_1(s)\,ds = f_1(t) = \langle \delta_t, f_1\rangle .$$

一方, 再び (2.3) から $\langle\langle \Phi_t, \phi\rangle\rangle = \langle \delta_t, f_1\rangle$ なので,

$$\frac{d}{dt}\langle\langle B_t, \phi\rangle\rangle = \langle\langle \Phi_t, \phi\rangle\rangle, \qquad \phi \in (E). \tag{2.5}$$

これが, ホワイトノイズと Brown 運動との関係である. 形式的表示 (1.15) と比較せよ.

3　Fock 空間上の作用素の一般論

この章ではホワイトノイズ解析の枠組:

$$(E) \subset (L^2) \cong \Gamma(H_{\mathbb{C}}) \subset (E)^*$$

に沿った形で, Fock 空間上の作用素論を紹介し (理論の詳細は [19]), 若干の補足をする. 我々の興味は (E) から $(E)^*$ 又は (E) からそれ自身への連続線型作用素にある. そのような作用素の全体をそれぞれ $\mathcal{L}((E),(E)^*)$, $\mathcal{L}((E),(E))$ で表し, 有界収束位相を与える. 定義セミノルム系は次のように与えられる:

$$\begin{aligned} \|\Xi\|_{B_1,B_2} &= \sup_{\phi\in B_1,\psi\in B_2} |\langle\langle \Xi\phi, \psi\rangle\rangle|, \quad \Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*), \\ \|\Xi\|_{B,p} &= \sup_{\phi\in B} \|\Xi\phi\|_p, \qquad \Xi \in \mathcal{L}((E),(E)). \end{aligned}$$

但し, B_1, B_2, B は (E) の有界部分集合全体を, p は $\mathbb{R}$ を走る ($p \ge 0$ としても同じ). Fock 空間 $(L^2) \cong \Gamma(H_{\mathbb{C}})$ 上の有界作用素は全て $\mathcal{L}((E),(E)^*)$ に含まれることに注意しておく.

3.1　生成・消滅作用素

まず $y \in E^*$ 方向の微分作用素 D_y を導入する:

$$D_y\phi(x) = \lim_{\theta\to 0}\frac{\phi(x+\theta y)-\phi(x)}{\theta}, \qquad x \in E^*, \quad \phi \in (E). \tag{3.6}$$

極限は常に存在し, D_y は (E) 上の連続線型作用素, 即ち, $D_y \in \mathcal{L}((E),(E))$ となることが証明される. さらに, $y \mapsto D_y$ は E^* から $\mathcal{L}((E),(E))$ への連続線型写像となることもわかる. したがって, D_y の共役作用素は $(E)^*$ 上の連続線型作用素となるから, $D_y^* \in \mathcal{L}((E)^*,(E)^*)$. さらに位相の定義から, $y \mapsto D_y^*$ は E^* から $\mathcal{L}((E)^*,(E)^*)$ への連続線型写像となる.

これらの作用素を Fock 空間上で見ておこう. いま Fock 空間の典型的な元として $(0,\cdots,0,\xi^{\otimes n},0,\cdots)$ を考えると, 対応する $\phi \in (E)$ は

$$\phi(x) = \left\langle :x^{\otimes n}:, \xi^{\otimes n}\right\rangle, \qquad x \in E^*,$$

である[17]. ここで $\xi \in E_{\mathbb{C}}$ としておこう. このとき, 直接計算して

$$\begin{aligned} D_y\phi(x) &= n\,\langle y,\,\xi\rangle \left\langle :x^{\otimes(n-1)}:,\,\xi^{\otimes(n-1)}\right\rangle, \\ D_y^*\phi(x) &= \left\langle :x^{\otimes(n+1)}:,\,y\otimes\xi^{\otimes n}\right\rangle = \left\langle :x^{\otimes(n+1)}:,\,y\widehat{\otimes}\xi^{\otimes n}\right\rangle \end{aligned}$$

がわかる. (1.8) と比較すれば, D_y, D_y^* は (L^2) 上における消滅作用素・生成作用素に他ならないことがわかる. さて, 各点 $t\in\mathbb{R}$ に対して, $\delta_t\in E^*=\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ を思い出して,

$$\partial_t = D_{\delta_t}, \qquad t\in\mathbb{R},$$

とおく. ∂_t はしばしば飛田の微分作用素と呼ばれている. 明らかに, ∂_t, ∂_t^* は場の量子論における点 t における消滅作用素 $a(t)$, 生成作用素 $a^*(t)$ と同じものである (§1.3). ここで特に強調しておきたいことは, 通常の Fock 空間の理論ではそれら場の作用素は (非有界) 作用素値超関数と理解されるのに対して, ホワイトノイズ解析では, ∂_t, ∂_t^* それ自身で連続作用素になっていることである. さらに, $\partial_s-\partial_t=D_{\delta_s-\delta_t}$ と $t\mapsto\delta_t\in E^*$ の連続性に注意すれば,

補題 3.1 $t\mapsto\partial_t$ は $\mathbb{R}$ から $\mathcal{L}((E),(E))$ への, また $t\mapsto\partial_t^*$ は $\mathbb{R}$ から $\mathcal{L}((E)^*,(E)^*)$ への連続写像である. 特に, それらはともに $\mathbb{R}$ から $\mathcal{L}((E),(E)^*)$ への連続写像である.

3.2 積分核作用素

∂_t, ∂_t^* が各点毎に定義されていることのさらなる利点を述べたい. まず $\phi,\psi\in(E)$ に対して $\mathbb{R}^{l+m}$ 上の関数を

$$\eta_{\phi,\psi}(s_1,\cdots,s_l,t_1,\cdots,t_m) = \left\langle\!\left\langle \partial_{s_1}^*\cdots\partial_{s_l}^*\partial_{t_1}\cdots\partial_{t_m}\phi,\,\psi\right\rangle\!\right\rangle$$

で定義すれば, $\eta_{\phi,\psi}\in E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)}$ である. そうすると任意の $\kappa\in(E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*$ に対して,

$$\langle\!\langle \Xi_{l,m}(\kappa)\phi,\,\psi\rangle\!\rangle = \langle\kappa,\,\eta_{\phi,\psi}\rangle, \qquad \phi,\psi\in(E)$$

をみたす作用素 $\Xi_{l,m}(\kappa)\in\mathcal{L}((E),(E)^*)$ が一意的に存在することがわかる. これを

$$\Xi_{l,m}(\kappa) = \int_{\mathbb{R}^{l+m}} \kappa(s_1,\cdots,s_l,t_1,\cdots,t_m)\partial_{s_1}^*\cdots\partial_{s_l}^*\partial_{t_1}\cdots\partial_{t_m}ds_1\cdots ds_l dt_1\cdots dt_m \tag{3.7}$$

のように形式的積分で表し, κ を核超関数とする積分核作用素と呼ぶ[18]. 各点毎の生成・消滅作用素を作用素値超関数と捉える立場に立てば, κ は滑らかな関数でなくてはならない. 我々の表示 (3.7) では, κ の方こそ超関数にとるのである.

---

[17] $\xi\in E$, $\xi\neq 0$, であれば H_n を n 次 Hermite 多項式として

$$\langle :x^{\otimes n}:,\,\xi^{\otimes n}\rangle = \frac{|\xi|^n}{2^{n/2}}H_n\left(\frac{\langle x,\,\xi\rangle}{\sqrt{2}\,|\xi|}\right).$$

[18] 類似の表現は様々な立場から議論されている. 場の量子論では [4] 等; 数学では [13], [17] 等.

∂_t 同志, ∂_t^* 同志は互いに可換であるから, (3.7) における核超関数 κ の一意性はいえない. 前の l 変数, 後ろの m 変数についてそれぞれ対称になっている κ の全体を $(E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*_{\mathrm{sym}(l,m)}$ とかく. 核超関数をこの空間に制限すれば一意的である. また, 積分核作用素の詳しいノルム評価はわかっている ([19]). ここでは次のことだけ注意しておこう.

補 題 3.2 $\kappa \mapsto \Xi_{l,m}(\kappa)$ は $(E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*$ から $\mathcal{L}((E),(E)^*)$ の中への連続線型写像である.

§3.1 の微分作用素 D_y, $y \in E^*$, 及びその共役は積分核作用素の最も簡単な例を与える:

$$D_y = \Xi_{0,1}(y) = \int_{\mathbb{R}} y(t)\partial_t \, dt, \qquad D_y^* = \Xi_{1,0}(y) = \int_{\mathbb{R}} y(s)\partial_s^* \, ds.$$

特に, $t \in \mathbb{R}$ に対して $\partial_t = \Xi_{0,1}(\delta_t)$, $\partial_t^* = \Xi_{1,0}(\delta_t)$ が成り立つ. §1.3 で述べた生成・消滅作用素 $a(\xi)$, $a^*(\xi)$ は定義域を (E) にとれば,

$$a(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \xi(t)\partial_t \, dt, \qquad a^*(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \xi(t)\partial_t^* \, dt, \qquad \xi \in E.$$

したがって, 形式的表示 (1.9) はそのままの形で我々の積分核作用素となっている.

3.3 (E) 上の積分核作用素

前節では $\mathcal{L}((E),(E)^*)$ に属する積分核作用素を一般に論じた. この節では, その特別な場合として $\mathcal{L}((E),(E))$ に属する場合について注意しておく. また, $\mathcal{L}((E),(E))$ は非有界作用素を含む非可換作用素環の具体例としての興味もある.

定 理 3.3 $\kappa \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*$ とするとき, $\Xi_{l,m}(\kappa) \in \mathcal{L}((E),(E)) \iff \kappa \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes l}) \otimes (E_{\mathbb{C}}^{\otimes m})^*$.

証明は [10], [19] を見よ. ここで $\otimes$ は位相テンソル積[19] であるから $(E_{\mathbb{C}}^{\otimes l}) \otimes (E_{\mathbb{C}}^{\otimes m})^*$ の元 κ は始めの l 変数について滑らかで, 後の m 変数について超関数といった具合に分離されているとは限らない. 例えば (1.6) で定義した τ は対称な 2 変数超関数であるが, $E \otimes E^*$ に属する. よって

$$\int_{\mathbb{R}^2} \tau(s,t)\partial_s^*\partial_t ds dt = \int_{\mathbb{R}} \partial_t^*\partial_t dt$$

は (E) 上の連続作用素になる. これは, Fock 空間で基本的な個数作用素に一致する.

3.4 作用素のシンボル

指数ベクトルが Fock 空間の (Hilbert 空間の位相に関して) 稠密部分空間を張ることは, 良く知られている. $\xi \in E_{\mathbb{C}}$ ならば, 指数ベクトル ϕ_ξ が (E) に属することが示される. さらに, そのような指数ベクトルの全体 $\{\phi_\xi; \xi \in E_{\mathbb{C}}\}$ は (E) の稠密な部分空間を張るので

[19] 詳しくは, 代数的テンソル積を π-位相に関して完備化したもの. これまでも $E^{\otimes n}$ などはこの意味で用いてきた.

ある. 従って, $\mathcal{L}((E),(E)^*)$ に属する作用素は指数ベクトルに対する作用で一意的に定まり, よって, $\Xi\in\mathcal{L}((E),(E)^*)$ に対して定義される $E_{\mathbb{C}}\times E_{\mathbb{C}}$ 上の関数

$$\widehat{\Xi}(\xi,\eta)=\langle\!\langle \Xi\phi_\xi,\,\phi_\eta\rangle\!\rangle,\qquad \xi,\eta\in E_{\mathbb{C}},\tag{3.8}$$

は作用素を一意的に定める. Berezin [5], Krée-Rączka [14] に習って, この関数を Ξ のシンボルと呼ぶことにする. 特に $\widehat{\Xi}(0,0)=\langle\!\langle \Xi\phi_0,\,\phi_0\rangle\!\rangle$ は Ξ の真空期待値と呼ばれ, しばしば重要である. 例えば, 積分核作用素に対しては,

$$\widehat{\Xi_{l,m}(\kappa)}(\xi,\eta)=\left\langle \kappa,\,\eta^{\otimes l}\otimes\xi^{\otimes m}\right\rangle e^{\langle\xi,\eta\rangle},\qquad \xi,\eta\in E_{\mathbb{C}},\quad \kappa\in(E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*.\tag{3.9}$$

シンボルを $E_{\mathbb{C}}\times E_{\mathbb{C}}$ 上の関数として特徴づけるために, いささか唐突であるが, 関数 $\Theta: E_{\mathbb{C}}\times E_{\mathbb{C}}\to\mathbb{C}$ に対して次の性質を考えよう:

(O1) (正則性) $\xi,\xi_1,\eta,\eta_1\in E_{\mathbb{C}}$ を任意に固定するとき, 2 変数複素関数

$$z,w\mapsto\Theta(z\xi+\xi_1,w\eta+\eta_1),\qquad z,w\in\mathbb{C},$$

は $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ 上で正則である.

(O2) (増大度) 定数 $C\ge 0$, $K\ge 0$, $p\in\mathbb{R}$ があって,

$$|\Theta(\xi,\eta)|\le C\exp K\left(|\xi|_p^2+|\eta|_p^2\right),\qquad \xi,\eta\in E_{\mathbb{C}}.$$

(O2′) (増大度) 任意の $p\ge 0$, $\epsilon>0$ に対して, 定数 $C\ge 0$, $q\ge 0$ が存在して

$$|\Theta(\xi,\eta)|\le C\exp\epsilon\left(|\xi|_{p+q}^2+|\eta|_{-p}^2\right),\qquad \xi,\eta\in E_{\mathbb{C}}.$$

明らかに, (O2′) $\Longrightarrow$ (O2) である[20]. 簡単な検証で, $\mathcal{L}((E),(E)^*)$ 又は $\mathcal{L}((E),(E))$ に属する作用素 Ξ のシンボル $\Theta=\widehat{\Xi}$ は (O1), (O2) 又は (O1), (O2′) をみたす.

実は, 次の定理に述べる通り上の性質は作用素のシンボルを特徴づけるのである. (いくつかの部分的議論を経て [19] で証明が完成した.)

定 理 3.4 $E_{\mathbb{C}}\times E_{\mathbb{C}}$ 上の複素数値関数 Θ が性質 (O1), (O2) をみたしているとする. このとき核超関数 $\kappa_{l,m}\in(E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*_{\mathrm{sym}(l,m)}$ が一意的に存在して,

$$\Theta(\xi,\eta)=\sum_{l,m=0}^{\infty}\langle\!\langle \Xi_{l,m}(\kappa_{l,m})\phi_\xi,\,\phi_\eta\rangle\!\rangle,\qquad \xi,\eta\in E_{\mathbb{C}}.\tag{3.10}$$

さらに, 級数

$$\Xi\phi=\sum_{l,m=0}^{\infty}\Xi_{l,m}(\kappa_{l,m})\phi,\qquad \phi\in(E),\tag{3.11}$$

は $(E)^*$ の中でその位相に関して収束し, (3.11) で定義される作用素 Ξ は $\mathcal{L}((E),(E)^*)$ に属し, $\widehat{\Xi}=\Theta$. さらに, Θ が (O2′) をみたせば, 核超関数 $\kappa_{l,m}$ は $((E_{\mathbb{C}}^{\otimes l})\otimes(E_{\mathbb{C}}^{\otimes m})^*)_{\mathrm{sym}(l,m)}=(E_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} l})\otimes(E_{\mathbb{C}}^{\otimes m})^*_{\mathrm{sym}}$ に属し, 級数 (3.11) は (E) で収束し, $\Xi\in\mathcal{L}((E),(E))$.

---

[20] ノルムの定義から $p\in\mathbb{R}$, $q\ge 0$ に対して $|\xi|_p\le\rho^q|\xi|_{p+q}$ が成り立つ. 但し, $\rho=\|A^{-1}\|_{OP}=1/2$.

指数ベクトルは一次独立であって, Fock 空間の稠密部分空間を張ることから, Fock 空間上の作用素を考える時, しばしば指数ベクトル上の作用だけを扱っている ([12], [25]). 代数的な議論はこれで十分なことも多いようであるが, 関数解析的取り扱いのためには, 考えている作用素の定義域が指数ベクトルの張る代数的部分空間からどの程度拡張されるか? が基本的な問題となる. 上に述べたシンボルの特徴づけ定理は, この問いに対する一つのアプローチになっている. 計算例は, [19], [21] 等を参照. また後で議論する一般化された積分核作用素や量子的 Hitsuda-Skorokhod 積分を定義するときにも用いている ([22], [23] も参照).

3.5 Fock 展開

作用素 $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ のシンボルは (O1) と (O2) をみたすので, 定理 3.4 によって, Ξ が積分核作用素で再構成される. $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E))$ についても同様であり, 次の定理が成り立つ.

定 理 3.5 任意の $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ に対して核超関数 $\kappa_{l,m} \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*_{\mathrm{sym}(l,m)}$ が一意的に存在して,

$$\Xi\phi = \sum_{l,m=0}^{\infty} \Xi_{l,m}(\kappa_{l,m})\phi, \qquad \phi \in (E), \tag{3.12}$$

が成り立つ. ここで級数 (3.12) は $(E)^*$ の位相で収束する. もし $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E))$ ならば, $\kappa_{l,m} \in ((E_{\mathbb{C}}^{\otimes l}) \otimes (E_{\mathbb{C}}^{\otimes m})^*)_{\mathrm{sym}(l,m)} = (E_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} l}) \otimes (E_{\mathbb{C}}^{\otimes m})^*_{\mathrm{sym}}$ であって, 級数は (E) で収束する.

こうして得られた $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ の積分核作用素による分解 (3.12) を Fock 展開と呼ぶ. Ξ の Fock 展開 (3.12) が与えられたとき, 両辺のシンボルを求めると,

$$e^{-\langle\xi,\eta\rangle}\widehat{\Xi}(\xi,\eta) = \sum_{l,m=0}^{\infty} \left\langle \kappa_{l,m},\, \eta^{\otimes l} \otimes \xi^{\otimes m} \right\rangle, \qquad \xi,\eta \in E_{\mathbb{C}}. \tag{3.13}$$

従って, 与えられた作用素の Fock 展開を求めるためには, $e^{-\langle\xi,\eta\rangle}\widehat{\Xi}(\xi,\eta)$ の Taylor 展開を求めればよい. ついでながら, (L^2) 上の有界作用素は, その定義域を (E) に限れば $\mathcal{L}((E),(E)^*)$ に属するので, Fock 展開可能である. しかしながら, スカラーではない (L^2) 上の有界作用素の Fock 展開は常に無限級数である. これは, 積分核作用素が生成・消滅演算子の合成であり, 非有界作用素になっていることの現れである.

3.6 積分核作用素の拡張

これまでの議論では, 積分核作用素

$$\Xi_{l,m}(\kappa) = \int_{\mathbb{R}^{l+m}} \kappa(s_1,\cdots,s_l,t_1,\cdots,t_m)\partial_{s_1}^*\cdots\partial_{s_l}^*\partial_{t_1}\cdots\partial_{t_m}ds_1\cdots ds_l dt_1\cdots dt_m,$$

が中心的な役割を果たしてきた. ここで核超関数 κ はスカラー作用素とみなせることに注意しよう. そうすれば, 自然な一般化として κ を作用素値超関数にとることに思い当た

る. ここでは,

$$\int_{\mathbb{R}^{l+m}} \partial_{s_1}^* \cdots \partial_{s_l}^* L(s_1, \cdots, s_l, t_1, \cdots, t_m) \partial_{t_1} \cdots \partial_{t_m} ds_1 \cdots ds_l dt_1 \cdots dt_m \tag{3.14}$$

とかかれる作用素を導入する. ここで $L \in \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)}, \mathcal{L}((E),(E)^*))$ であり, $\mathbb{R}^{l+m}$ 上の $\mathcal{L}((E),(E)^*)$-値超関数というのが相応しい. 必要とする作用素値超関数の一般論は [20] で展開された. ここでは, 核定理から導かれる (位相もこめた) 同型

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)}, \mathcal{L}((E),(E)^*)) &\cong (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^* \otimes \mathcal{L}((E),(E)^*) \\ \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)}, \mathcal{L}((E),(E))) &\cong (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^* \otimes \mathcal{L}((E),(E)) \end{aligned}$$

に注意しておこう[21]. 実際には, (3.14) は

$$\langle\langle \Xi\phi_\xi, \phi_\eta \rangle\rangle = \left\langle\!\left\langle L(\eta^{\otimes l} \otimes \xi^{\otimes m})\phi_\xi, \phi_\eta \right\rangle\!\right\rangle, \qquad \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}}, \tag{3.15}$$

をみたす連続作用素 $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ として一意的に定義される. この定義が有効であることは, シンボルの特徴づけ定理からわかる. この作用素を一般化された積分核作用素, または単に積分核作用素と呼ぶ. 特に, L がスカラー作用素値超関数であれば, 一般化された積分核作用素は従来の積分核作用素と一致する.

3.7 Fubini 型定理

一般化された積分核作用素は従来の積分核作用素に既に内包されているのである. そのことを見るために, テンソル積の縮約と呼ばれる演算を思い出しておく. $l+m$ 変数の超関数 $\kappa \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*_{\mathrm{sym}(l,m)}$ と $l+n$ 変数のテスト関数 $g \in E_{\mathbb{C}}^{\otimes l+n}$ が与えられれば, κ のはじめの l 変数と g のはじめの l 変数に関して標準双線型形式を適用してスカラー化して, 残った変数を順に並べて $m+n$ 変数の超関数が得られる[22]. これを $\kappa \otimes^l g$ とかいて左側縮約と呼ぶ. 右側縮約 $\otimes_l$ も同様である.

整数 $0 \le \alpha \le l$, $0 \le \beta \le m$ を固定する. 与えられた $\kappa \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*_{\mathrm{sym}(l,m)}$ に対して,

$$\begin{aligned} &L(\eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_\alpha \otimes \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_\beta) \\ &\qquad = \Xi_{l-\alpha, m-\beta}\left((\kappa \otimes_\beta (\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_\beta)) \otimes^\alpha (\eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_\alpha)\right) \end{aligned} \tag{3.16}$$

をみたす $L \in \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}}^{\otimes(\alpha+\beta)}, \mathcal{L}((E),(E)^*))$ が一意的に存在する. 証明は標準的な議論による. この記号の下で, 次の Fubini 型定理が成り立つ ([23]).

---

[21] (E) を一般の可算 Hilbert 空間 $\mathfrak{E}$ におきかえたとき, 同様な同型が成り立つかどうかは定かではない. $\mathcal{L}(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}^*)$ が Fréchet 空間 ならば (この条件は $\mathfrak{E}$ が Hilbert 空間であることと同値であるが) 同型が成り立つ. [19, p.162] と [20, p.205] の説明文には, "同値になるのはこのときに限る" というニュアンスがあり不適切であった. この場合のように, $\mathfrak{E}$ が核型空間ならば核定理が適用できて同型が証明される.

[22] もう少し正確に述べれば, $g_l \in E_{\mathbb{C}}^{\otimes l}$ と $g_n \in E_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$ に対して, $\kappa \otimes^l (g_l \otimes g_n) \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(m+n)})^*$ が,

$$\langle \kappa \otimes^l (g_l \otimes g_n), \zeta \rangle = \langle \kappa \otimes g_n, g_l \otimes \zeta \rangle, \qquad \zeta \in E_{\mathbb{C}}^{\otimes(m+n)}.$$

をみたす一意的な元として定まる. 一般の $g \in E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)}$ に対する $\kappa \otimes^l g$ は連続性を用いて定義される. 詳細は [19] を見よ.

定 理 3.6 整数 $0 \leq \alpha \leq l$, $0 \leq \beta \leq m$ を固定する. $\kappa \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*$ として, $L \in \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}}^{\otimes(\alpha+\beta)}, \mathcal{L}((E),(E)^*))$ は (3.16) で定義されているものとする. このとき,

$$\Xi_{l,m}(\kappa) = \int_{T^{\alpha+\beta}} \partial_{s_1}^* \cdots \partial_{s_\alpha}^* L(s_1, \cdots, s_\alpha, t_1, \cdots, t_\beta) \partial_{t_1} \cdots \partial_{t_\beta} ds_1 \cdots ds_\alpha dt_1 \cdots dt_\beta.$$

上の結果は積分核作用素に対して簡単な演算を保証している. つまり, $\Xi_{l,m}(\kappa)$ の積分表示は形式的なものであるが, あたかも可積分関数の積分であるかのようにみなして逐次積分できるのである.

4 量子確率過程

4.1 定義

非常に一般的な立場では, 時間パラメーターをもつ確率変数の族を確率過程というように, Fock 空間上の作用素の族で時間パラメーターをもつものを量子確率過程と呼ぶこともできよう. しかしながら, ホワイトノイズ解析を有効に適用するために, 考える量子確率過程に少し制限を加える. 既に述べたように, ホワイトノイズ解析の特徴の一つは, ホワイトノイズ $\{x(t)\}$ を $(E)^*$ 中の連続な流れと捉えることである. 後から述べるが, $\{x(t)\}$ は Fock 空間上のかけ算作用素の族とも見なせるのだが, このようなものは当然, 我々の立場で量子確率過程として扱えねばならない. 良い定義は多くの実例の蓄積の後に見つかるものであるが, 当面, 次の定義を採用してみる.

定 義 4.1 作用素の族 $\{\Xi_t \,;\, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}((E),(E)^*)$ で $t \mapsto \Xi_t$ が連続写像になっているものを量子確率過程[23] とよぶ. 連続線型写像 $\Xi \in \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}((E),(E)^*))$ を量子確率超過程という. 量子確率超過程 $\Xi \in \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}((E),(E)^*))$ が $E_{\mathbb{C}}^*$ から $\mathcal{L}((E),(E)^*)$ への連続線型写像に拡張できるとき正則であるという.

$\{\Xi_t \,;\, t \in \mathbb{R}\}$ が量子確率過程ならば, $\{\Xi_t^* \,;\, t \in \mathbb{R}\}$ も量子確率過程である. これを共役という. 同様に, (正則な) 量子確率超過程の共役も定義され, (正則な) 量子確率超過程になる.

補 題 4.2 Ξ が正則な量子確率超過程ならば $\{\Xi_t = \Xi(\delta_t)\}$ は量子確率過程である.

証 明 定義によって, Ξ は $E_{\mathbb{C}}^*$ から $\mathcal{L}((E),(E)^*)$ への連続線型作用素に拡張できるが, その拡張も同じ記号で表す. 写像 $t \mapsto \Xi_t \equiv \Xi(\delta_t)$ は, 2 つの連続写像 $t \mapsto \delta_t$, $y \mapsto \Xi(y)$ の合成であるから, 連続である. よって $\{\Xi_t\}$ は量子確率過程である. 証明終

上の主張の逆は正しくない. 今後, 正則な量子確率超過程のことを正則な量子確率過程ともいう.

[23] もちろん t は $\mathbb{R}$ 全体を走る必要はないが, 簡単のためそうしておく. 以下同様.

4.2 基本的な例

例 1. 補題 3.2で見たように

$$f \mapsto \Xi_{0,1}(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\partial_t \, dt \in \mathcal{L}((E),(E)^*), \qquad f \in E_{\mathbb{C}}^*,$$

は連続であるから, $\Xi_{0,1} \in \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}}^*, \mathcal{L}((E),(E)^*))$. よって $\{\partial_t = \Xi_{0,1}(\delta_t)\}$ は正則な量子確率過程である. $\{\partial_t^*\}$ は $\{\partial_t\}$ の共役である. なお, 補題 3.1から $t \mapsto \partial_t \in \mathcal{L}((E),(E))$ としても連続である.

例 2. $\Phi \in (E)^*$ と $\phi \in (E)$ に対して, $\Phi\phi = \phi\Phi \in (E)^*$ が

$$\langle\langle \Phi\phi, \psi \rangle\rangle = \langle\langle \Phi, \phi\psi \rangle\rangle, \qquad \psi \in (E),$$

をみたす $(E)^*$ の元として定まり, $\phi \mapsto \Phi\phi$ は (E) から $(E)^*$ への連続線型作用素となる. これを $\Phi \in (E)^*$ から引き起こされるかけ算作用素といい, 同じ記号で表す. このとき得られる自然な写像 $(E)^* \to \mathcal{L}((E),(E)^*)$ は連続である. なお $\Phi \in \mathcal{L}((E),(E)) \Longleftrightarrow \Phi \in (E)$ に注意しておこう. さて, $(E)^*$ の中の連続な流れ $t \mapsto \Phi_t \in (E)^*$ はかけ算作用素として量子確率過程となる. これは古典的確率 (超) 過程を量子確率過程とみなす標準的な仕方である.

例 3. 例 2 の特別な場合であるが, ホワイトノイズ $\{x(t)\}$ は $(E)^*$ の中の連続な流れであったから, かけ算作用素とみなせば量子確率過程である. これを量子的ホワイトノイズという. 一方, ホワイトノイズはかけ算作用素として,

$$x(t) = \partial_t + \partial_t^*, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

であることが知られているから, 量子的ホワイトノイズは正則な量子確率過程である.

例 4. Hudson-Parthasarathy [12] などの量子確率過程の議論で中心的役割を担っているのは,

$$A_t = \int_0^t \partial_s \, ds, \qquad A_t^* = \int_0^t \partial_s^* \, ds, \qquad \Lambda_t = \int_0^t \partial_s^* \partial_s \, ds, \tag{4.2}$$

の 3 つの量子確率過程である. これらは順に, 消滅過程, 生成過程, 個数 (ゲージ) 過程と呼ばれている. これらが t に関して連続になっていることは直接にも証明できるが, 次節の定理 4.4を利用しても良い.

例 5. 量子的 Brown 運動とは,

$$Q_t = A_t + A_t^* = \int_0^t (\partial_s + \partial_s^*) ds \qquad t \geq 0. \tag{4.3}$$

で定義される量子確率過程のことである. Q_t を真空ベクトルに作用させると, (古典的) 確率過程を得るがそれは, Brown 運動に他ならない:

$$Q_t\phi_0(x) = \left\langle x, 1_{[0,t]} \right\rangle = B_t(x), \qquad x \in E^*, \quad t \geq 0.$$

したがって量子的 Brown 運動 Q_t は確かに Brown 運動 B_t をかけ算作用素と見做したものになっている.

例 6. $l \geq 0$ を定数とする.

$$P_t = \Lambda_t + \sqrt{l}\,Q_t + lt = \int_0^t \left(\partial_s^*\partial_s + \sqrt{l}(\partial_s^* + \partial_s) + l\right) ds,$$

で与えられる量子確率過程を量子的 Poisson 過程という. 名称の由来については [12], [25] を参照のこと.

4.3 量子確率過程の積分

この節では, 量子確率過程 $\{L_s\}$ の ds に関する積分を定義する. これは確率積分ではない. まず次から始める.

補 題 4.3 $\{L_t\}$ を量子確率過程とする. 任意の a, b に対して

$$\langle\langle \Xi_{a,b}\phi,\, \psi\rangle\rangle = \int_a^b \langle\langle L_s\phi,\, \psi\rangle\rangle\, ds, \qquad \phi, \psi \in (E), \tag{4.4}$$

をみたす $\Xi_{a,b} \in \mathcal{L}((E), (E)^*)$ が一意的に存在する.

証 明 a, b は固定して考える. 写像 $s \mapsto L_s$ は連続であるから, この写像によって 有界閉区間 $[a, b]$ は $\mathcal{L}((E), (E)^*)$ のコンパクト集合 K に写される. 特に K は有界集合であることに注意. 同型 $\mathcal{L}((E), (E)^*) \cong ((E) \otimes (E))^*$ を用いて

$$\langle\langle L_s\phi,\, \psi\rangle\rangle = \langle\langle L_s,\, \phi \otimes \psi\rangle\rangle, \qquad \phi, \psi \in (E),$$

とかくことにする. K は $((E) \otimes (E))^*$ の有界集合でもあるから, ある $p \geq 0$ が存在して

$$C \equiv \sup_{a \leq s \leq b} \| L_s \|_{-p} < \infty.$$

よって $a \leq s \leq b$ なる限り,

$$|\langle\langle L_s\phi,\, \psi\rangle\rangle| = |\langle\langle L_s,\, \phi \otimes \psi\rangle\rangle| \leq \| L_s \|_{-p} \| \phi \otimes \psi \|_p \leq C \| \phi \|_p \| \psi \|_p.$$

これを用いれば,

$$\left| \int_a^b \langle\langle L_s\phi,\, \psi\rangle\rangle\, ds \right| \leq C|b - a| \| \phi \|_p \| \psi \|_p, \qquad \phi, \psi \in (E).$$

したがって, (4.4) の右辺はϕ, ψ に関して (E) 上の連続な双線型形式となる. したがって, (4.4) をみたす線型作用素 $\Xi_{a,b} \in \mathcal{L}((E), (E)^*)$ が一意的に存在する. 証明終

上で構成した $\Xi_{a,b}$ を

$$\Xi_{a,b} = \int_a^b L_s\, ds$$

とかく.

定 理 4.4 $\{L_t\}$ を量子確率過程とする. 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\Xi_t = \int_a^t L_s\, ds, \qquad t \in \mathbb{R},$$

とおけば, $\{\Xi_t\}$ は量子確率過程である.

証 明 問題は $t \mapsto \Xi_t$ の連続性である. そのためには $a < b$ として $(a, b) \ni t \mapsto \Xi_t$ が連続であることを示せば良い. 補題 4.3のように定数 $p \geq 0$, $C \geq 0$ を選んでおく. 定義から

$$\langle\!\langle (\Xi_{t_1} - \Xi_{t_2})\phi,\, \psi \rangle\!\rangle = \int_{t_2}^{t_1} \langle\!\langle L_s\phi,\, \psi \rangle\!\rangle\, ds, \qquad a < t_1, t_2 < b,$$

であるから,

$$|\langle\!\langle (\Xi_{t_1} - \Xi_{t_2})\phi,\, \psi \rangle\!\rangle| \leq C|t_1 - t_2|\, \|\phi\|_p \, \|\psi\|_p, \qquad a < t_1, t_2 < b, \quad \phi, \psi \in (E).$$

これは, $(a, b) \ni t \mapsto \Xi_t \in \mathcal{L}((E), (E)^*)$ の連続性を示す. 証明終

系 4.5 $L \in \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}}^*, \mathcal{L}((E), (E)^*))$ を正則な量子確率超過程とする. このとき, $a \leq b$ に対して

$$L(1_{[a,b]}) = \int_a^b L_s\, ds$$

が成り立つ.

証 明 簡単のために右辺の作用素を Ξ とおくと, 定義から

$$\langle\!\langle \Xi\phi,\, \psi \rangle\!\rangle = \int_a^b \langle\!\langle L_s\phi,\, \psi \rangle\!\rangle\, ds = \int_a^b \langle\!\langle L(\delta_s)\phi,\, \psi \rangle\!\rangle\, ds, \qquad \phi, \psi \in (E). \tag{4.5}$$

さて $L : E_{\mathbb{C}}^* \to \mathcal{L}((E), (E)^*) \cong ((E) \otimes (E))^*$ なので $L^* \in \mathcal{L}((E) \otimes (E), E_{\mathbb{C}})$ である. これを用いると,

$$\langle\!\langle L(\delta_s)\phi,\, \psi \rangle\!\rangle = \langle\!\langle L(\delta_s),\, \phi \otimes \psi \rangle\!\rangle = \langle \delta_s,\, L^*(\phi \otimes \psi) \rangle = L^*(\phi \otimes \psi)(s).$$

これを (4.5) に代入して

$$\begin{aligned} \langle\!\langle \Xi\phi,\, \psi \rangle\!\rangle &= \int_a^b L^*(\phi \otimes \psi)(s)\, ds = \left\langle 1_{[a,b]},\, L^*(\phi \otimes \psi) \right\rangle \\ &= \left\langle\!\!\left\langle L(1_{[a,b]}),\, \phi \otimes \psi \right\rangle\!\!\right\rangle = \left\langle\!\!\left\langle L(1_{[a,b]})\phi,\, \psi \right\rangle\!\!\right\rangle, \qquad \phi, \psi \in (E). \end{aligned}$$

よって $\Xi = L(1_{[a,b]})$ となり, 題意が示された. 証明終

定 理 4.6 2つの量子確率過程 $\{L_t\}$, $\{\Xi_t\}$ が

$$\Xi_t = \int_a^t L_s\, ds, \qquad t \in \mathbb{R},$$

をみたしているとき, Ξ_t は $\mathcal{L}((E), (E)^*)$ の位相に関して微分可能で,

$$\frac{d}{dt}\Xi_t = L_t$$

が成り立つ.

証 明 $t \in \mathbb{R}$ を固定して t における微分可能性を示す．そのためには $B_1, B_2 \in (E)$ を有界集合として，

$$\lim_{h\to 0}\left\| \frac{\Xi_{t+h}-\Xi_t}{h} - L_t \right\|_{B_1,B_2} = 0 \tag{4.6}$$

を示せばよい．定義から

$$\left\langle\!\!\left\langle \left(\frac{\Xi_{t+h}-\Xi_t}{h} - L_t \right)\phi,\, \psi \right\rangle\!\!\right\rangle = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \langle\!\langle (L_s - L_t)\phi,\, \psi\rangle\!\rangle\, ds, \qquad \phi,\psi \in (E).$$

また $s \mapsto L_s$ は連続であるから，任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，

$$\| L_s - L_t \|_{B_1,B_2} < \epsilon, \qquad |s-t| < \delta,$$

が成り立つ．したがって，$0 < |h| < \delta$ であれば，

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\Xi_{t+h}-\Xi_t}{h} - L_t \right\|_{B_1,B_2} &\le \sup_{\phi\in B_1,\psi\in B_2} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} |\langle\!\langle (L_s-L_t)\phi,\, \psi\rangle\!\rangle|\, ds \\ &\le \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \| L_s - L_t \|_{B_1,B_2}\, ds \\ &\le \epsilon.\end{aligned}$$

これは (4.6) を示している．　　　　証明終

系 4.7 消滅過程 $\{A_t\}$，生成過程 $\{A_t^*\}$ に対して

$$\frac{d}{dt}A_t = \partial_t, \qquad \frac{d}{dt}A_t^* = \partial_t^*,$$

が $\mathcal{L}(E),(E)^*)$ の位相で成り立つ．

この事実は Hudson-Parthasarathy [12] で導入された dA_t, dA_t^* に関する量子確率積分を $\partial_t\, dt$, $\partial_t^*\, dt$ で置き換えて議論する可能性を示唆する．これについて次節で議論しよう．

4.4 量子確率積分

まず次の補題から始める．

補 題 4.8 $\{L_t\}$ を量子確率過程とするとき，$\{L_t\partial_t\}$, $\{\partial_t^* L_t\}$ もそうである．

証 明 問題は $t \mapsto L_t\partial_t \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ の連続性である．任意の $t \in \mathbb{R}$ と任意の有界集合 $B_1, B_2 \subset (E)$ に対して

$$\lim_{s\to t} \| L_s\partial_s - L_t\partial_t \|_{B_1,B_2} = 0 \tag{4.7}$$

を示せば良い．まず，

$$|\langle\!\langle (L_s\partial_s - L_t\partial_t)\phi,\, \psi\rangle\!\rangle| \le |\langle\!\langle L_s(\partial_s - \partial_t)\phi,\, \psi\rangle\!\rangle| + |\langle\!\langle (L_s - L_t)\partial_t\phi,\, \psi\rangle\!\rangle| \tag{4.8}$$

に注意しよう. $a<t<b$ となる a,b を固定して, 補題4.3の証明を真似れば,

$$\begin{aligned}|\langle\langle L_s(\partial_s-\partial_t)\phi,\,\psi\rangle\rangle| &= |\langle\langle L_s,\,(\partial_s-\partial_t)\phi\otimes\psi\rangle\rangle|\\ &\le \|L_s\|_{-p}\|(\partial_s-\partial_t)\phi\otimes\psi\|_p\\ &\le C\|(\partial_s-\partial_t)\phi\|_p\|\psi\|_p, \qquad a<s<b,\end{aligned}$$

を得る. よって, $t\mapsto\partial_t\in\mathcal{L}((E),(E))$ の連続性を思い出せば

$$\sup_{\phi\in B_1,\psi\in B_2}|\langle\langle L_s(\partial_s-\partial_t)\phi,\,\psi\rangle\rangle|\le\sup_{\phi\in B_1,\psi\in B_2}C\|(\partial_s-\partial_t)\phi\|_p\|\psi\|_p\to 0,\quad s\to t. \tag{4.9}$$

(4.8) の第2項についても同様のアイデアで

$$\sup_{\phi\in B_1,\psi\in B_2}|\langle\langle(L_s-L_t)\partial_t\phi,\,\psi\rangle\rangle|\le\sup_{\phi\in B_1,\psi\in B_2}\|L_s-L_t\|_{-p}\|\partial_t\phi\|_p\|\psi\|_p\to 0. \tag{4.10}$$

よって (4.7) は (4.9) と (4.10) からしたがう. 共役をとれば $t\mapsto\partial_t^*L_t$ の連続性は今や明らかである.

証明終

上の補題と定理4.4によって次の定義が意味を持つ.

定義 4.9 量子確率過程 $\{L_t\}$ に対して新しい量子確率過程

$$\int_a^t L_s\partial_s\,ds, \qquad \int_a^t \partial_s^*L_s\,ds$$

をそれぞれ L_t の消滅過程, 生成過程に関する確率積分という.

[22], [23] において, 正則な量子確率過程 $\{L_t\}$ に対して量子的 Hitsuda-Skorokhod 積分 Ω_t を導入した. それはシンボルの特徴づけ定理を用いて

$$\langle\langle\Omega_t\phi_\xi,\,\phi_\eta\rangle\rangle=\langle\langle L(1_{[a,t]}\eta)\phi_\xi,\,\phi_\eta\rangle\rangle, \qquad \xi,\eta\in E_{\mathbb{C}}, \tag{4.11}$$

のように定義される. 実は, この Ω_t は上記の生成過程に関する確率積分の特別な場合で

$$\Omega_t=\int_a^t\partial_s^*L_s\,ds$$

が成り立つ[24]. したがって, この論文の定義の方が一般的であるが, 我々の生成過程に関する確率積分もまた量子的 Hitsuda-Skorokhod 積分と呼ぶことにする.

---

[24] なお, 正則な量子確率過程 $\{L_t\}$ に対しては, シンボルの特徴づけ定理を用いて

$$\int_{-\infty}^t\partial_s^*L_s\,ds$$

のような無限区間上の積分も定義される.

もともと 1970 年代前半に Itô 積分の拡張として, ホワイトノイズ解析とは独立に導入された Hitsuda-Skorokhod 積分はホワイトノイズ解析の枠組で定式化されている (例えば [9]). その定義を思い出そう. $t \mapsto \Phi_t \in (E)^*$ が連続であれば,

$$\langle\langle \Psi_t, \phi \rangle\rangle = \int_a^t \langle\langle \partial_s^* \Phi_s, \phi \rangle\rangle \, ds, \qquad \phi \in (E),$$

をみたす $\Phi_t \in (E)^*$ が一意的に存在する. これを

$$\Psi_t = \int_a^t \partial_s^* \Phi_s ds, \tag{4.12}$$

とかいて Hitsuda-Skorokhod 積分[25] と呼ぶ.

一方, かけ算作用素と見做すことによる連続な埋め込み $(E)^* \subset \mathcal{L}((E), (E)^*)$ を思いだそう (§4.2). 与えられた連続写像 $t \mapsto \Phi_t$ に対して, 区別をはっきりさせるために, $\widetilde{\Phi}_t$ で対応するかけ算作用素を表す. 上の議論から我々は 2 通りの確率積分を持つ. 1 つは, 量子的 Hitsuda-Skorokhod 積分

$$\Omega_t = \int_a^t \partial_s^* \widetilde{\Phi}_s ds \tag{4.13}$$

であり, もう 1 つは (4.12) で定義される元々の Hitsuda-Skorokhod 積分 Ψ_t である. 改めて注意しておくと Ω_t は作用素であり, Ψ_t はホワイトノイズ超関数である.

定 理 4.10 任意の $\Phi \in \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}}^*, (E)^*)$ に対して量子的 Hitsuda-Skorokhod 積分 Ω_t と Hitsuda-Skorokhod 積分 Ψ_t を考える. このとき ϕ_0 を真空ベクトルとして,

$$\Psi_t = \Omega_t \phi_0, \qquad t \geq 0,$$

が成り立つ. したがって Ψ_t をかけ算作用素と見做せば Ω_t と一致する.

こうして, 我々の量子的 Hitsuda-Skorokhod 積分と古典的 Hitsuda-Skorokhod 積分との関連がついた. さらに適合過程の概念を導入して, 我々の確率積分が Hudson-Parthasarathy [12] で導入された伊藤型量子確率積分の一般化になっていることがわかるのだが, これについては別の機会に議論しよう. 一言だけ注意しておくと, 彼らが基本的作用素として位置づけた個数過程

$$\Lambda_t = \int_0^t \partial_s^* \partial_s \, ds$$

は, 我々の立場では消滅過程に関する確率積分であるから特別扱いしないで良い. 言い替えると, 我々は, 生成過程・消滅過程の 2 つこそが基本的な量子確率過程であり, 他のものはこれらの確率積分で構成するという立場をとるのである. 次節の内容はこの関連から興味ある.

[25] $\Psi_t \in (E)^*$ を定義するだけならば, $t \mapsto \Phi_t$ の連続性の仮定は弱められる. また, ここで定義した Hitsuda-Skorokhod 積分は, 確かに Itô 積分の拡張になっているのだが詳細は省略する. [9] などを見よ.

4.5 作用素の量子確率積分表示

任意の $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ の Fock 展開を

$$\Xi = \sum_{l,m=0}^{\infty} \Xi_{l,m}(\kappa_{l,m})$$

として, 3 つの部分に分けよう:

$$\Xi^{(1)} = \sum_{l\geq 0, m\geq 1} \Xi_{l,m}(\kappa_{l,m}), \quad \Xi^{(2)} = \sum_{l=1}^{\infty} \Xi_{l,0}(\kappa_{l,0}), \quad \Xi^{(3)} = \Xi_{0,0}(\kappa_{0,0}).$$

$\Xi^{(3)}$ はスカラー作用素であり, Ξ の真空期待値を c とすれば,

$$\Xi^{(3)} = \Xi_{0,0}(\kappa_{0,0}) = cI.$$

さて, $\Xi^{(1)}$ を考えよう. そこに現れる積分核作用素は少なくとも 1 つの消滅作用素 ∂_t を含むことに注意して, Fubini の定理 (定理 3.6) を適用すると, その積分核作用素は

$$\Xi_{l,m}(\kappa_{l,m}) = \int_{\mathbb{R}} L_{l,m}(t)\partial_t\, dt, \qquad L_{l,m} \in \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}((E),(E)^*)),$$

の形に書き換えられる. ここで,

$$L = \sum_{l\geq 0, m\geq 1} L_{l,m}$$

が $\mathcal{L}(E_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}((E),(E)^*))$ で収束し,

$$\Xi^{(1)} = \sum_{l\geq 0, m\geq 1} \Xi_{l,m}(\kappa_{l,m}) = \int_{\mathbb{R}} L(t)\partial_t\, dt$$

となることがわかる. $\Xi^{(2)}$ についても同様であり, 次の結果に到達する.

定 理 4.11 任意の $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ に対して

$$L \in \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}((E),(E)^*)), \quad M \in \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}((E),(E))), \quad c \in \mathbb{C}$$

が存在して,

$$\Xi = \int_{\mathbb{R}} L(t)\partial_t dt + \int_{\mathbb{R}} \partial_t^* M^*(t)\, dt + cI \tag{4.14}$$

のように表現できる.

(4.14) の右辺第 2 項は $\Xi^{(2)}$ に対応するので, $M^*(t)$ は生成作用素しか含まない. よって任意の $\xi \in E_{\mathbb{C}}$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して $[M(\xi), \partial_t] = 0$ となっている. したがって, (4.14) は

$$\Xi = \int_{\mathbb{R}} L(t)\partial_t dt + \int_{\mathbb{R}} M^*(s)\partial_t^*\, dt + cI$$

とかいてもよい. 積分区間は全区間 $\mathbb{R}$ でとっているが, 第 1 項は消滅過程 $\partial_t dt = dA_t$ に関する積分, 第 2 項は生成過程 $\partial_t^* dt = dA_t^*$ に関する積分と見做しうる.

参考文献

[1] L. Accardi et al. (eds.): "Quantum Probability and Applications to the Quantum Theory of Irreversible Processes," Lect. Notes in Math. Vol. 1055, Springer-Verlag, 1984; "Quantum Probability and Applications II–V," Lect. Notes in Math. Vol. 1136, 1985; Vol. 1303, 1988; Vol. 1396, 1989; Vol. 1442, 1990; "Quntum Probability and Related Topics Vol. VI–VIII," World Scientific, 1991, 1992, 1993.

[2] 有光敏彦・斉藤 健: 量子確率微分方程式の系統的体系, 物性研究 **59** (1992), 213–233.

[3] T. Arimitsu: A canonical formalism of non-equilibrium and dissipative quantum systems – A unified framework of quantum stochastic differential equations, preprint, 1993.

[4] F. A. Berezin: "The Method of Second Quantization," Academic Press, 1966.

[5] F. A. Berezin: *Wick and anti-Wick operator symbols*, Math. Sbornik **15** (1971), 577–606.

[6] C. W. Gardiner: "Quantum Noise," Springer-Verlag, 1991.

[7] T. Hida: "Analysis of Brownian Functionals," Carleton Math. Lect. Notes, no. 13, Carleton University, Ottawa, 1975.

[8] T. Hida: "Brownian Motion," Springer-Verlag, 1980 (未増補原著: 岩波書店, 1975).

[9] T. Hida, H.-H. Kuo, J. Potthoff and L. Streit: "White Noise," Kluwer Academic, 1993.

[10] T. Hida, N. Obata, and K. Saitô: *Infinite dimensional rotations and Laplacians in terms of white noise calculus*, Nagoya Math. J. **128** (1992), 65–93.

[11] Z. Huang: *Quantum white noises – White noise approach to quantum stochastic calculus*, Nagoya Math. J. **129** (1993), 23–42.

[12] R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy: *Quantum Ito's formula and stochastic evolutions*, Commun. Math. Phys. **93** (1984), 301–323.

[13] P. Krée: *La théorie des distributions en dimension quelconque et l'intégration stochastique*, in "Stochastic Analysis and Related Topics," (H. Korezlioglu and A. S. Ustunel, eds.), pp. 170–233, Lect. Notes in Math. Vol. 1316, Springer-Verlag, 1988.

[14] P. Krée and R. Rączka: *Kernels and symbols of operators in quantum field theory*, Ann. Inst. H. Poincaré Sect. **A28** (1978), 41–73.

[15] I. Kubo: *The structure of Hida distributions*, in "Mathematical Approach to Fluctuations (T. Hida ed.)," pp. 49–114, World Scientific, 1994.

[16] I. Kubo and S. Takenaka: *Calculus on Gaussian white noise I–IV*, Proc. Japan Acad. **56A** (1980), 376–380; 411-416; **57A** (1981), 433–437; **58A** (1982), 186–189.

[17] P. A. Meyer: "Quantum Probability for Probabilists," Lect. Notes in Math. Vol. 1538, Springer-Verlag, 1993.

[18] N. Obata: *Toward harmonic analysis on Gaussian space*, 京都大学数理解析研究所講究録, **855** (1993), 118–141.

[19] N. Obata: "White Noise Calculus and Fock Space," Lect. Notes in Math. Vol. 1577, Springer-Verlag, 1994.

[20] N. Obata: *Operator calculus on vector-valued white noise functionals*, J. Funct. Anal. **121** (1994), 185–232.

[21] N. Obata: ホワイトノイズによる量子確率解析, 物性研究 **62** (1994), 62–85.

[22] N. Obata: *White noise approach to quantum stochastic integrals*, 京都大学数理解析研究所講究録, **874** (1994), 156–167.

[23] N. Obata: *Integral kernel operators on Fock space and quantum Hitsuda-Skorokhod integrals*, preprint, 1994.

[24] M. Ohya and D. Petz: "Quantum Entropy and Its Use," Springer-Verlag, 1993.

[25] K. R. Parthasarathy: "An Introduction to Quantum Stochastic Calculus," Birkhäuser, 1992.

[26] K. R. Parthasarathy and K. B. Sinha: *Stochastic integral representation of bounded quantum martingales in Fock space*, J. Funct. Anal. **67** (1986), 126–151.

[27] 山崎泰郎: 無限次元空間上の測度 (全 2 巻), 紀伊国屋, 1978 (英訳もあり: World Scientific, 1985).

[28] Y. Yokoi: *Simple setting for white noise calculus using Bargmann space*, 京都大学数理解析研究所講究録, **874** (1994), 202–223.