数理解析研究所講究録
第 887 巻 1994 年 35-45

一様空間上の推移確率の同程度一様連続性

DEDICATED TO PROFESSOR YASUO YAMASAKI
ON HIS SIXTIETH BIRTHDAY

信州大学工学部　河邊　淳 (Jun Kawabe)

1. 序論. X, Yは位相空間とする．この論文では，X上の Borel 確率測度μと$X\times Y$上の推移確率λとの複合確率測度

$$\mu\circ\lambda(D)=\int_X \lambda(x,D_x)\mu(dx)$$

の弱収束性について，[7] に引き続いて研究を進めた結果をまとめる．特に

- 複合確率測度の弱収束性に関して，[7] で得られた結果をさらに精密化すると共に，別の方向への一般化を行う．
- 主定理に対する具体例の一つとして，有限次元空間，さらには核型空間上の Gauss 型推移確率によって定まる複合確率測度が弱収束するための一つの十分条件が与えられている．

ことがこの論文のポイントである．複合確率測度の弱収束性を考察する動機付けについては，[7] を参照せよ．

2. 準備と記法. Xは位相空間，$\mathcal{B}(X)$はXの Borel 集合からなるσ-集合体，$\mathcal{P}(X)$はX上の Borel 確率測度の全体とする．

この論文では，Borel 測度*に対する“正則性”の一つの条件である，τ-正則性が役に立つ．すなわち，Borel 測度μが **τ-正則** (τ-smooth) であるとは，Xの閉集合からなる族$\mathcal{F}$が$\mathcal{F}\downarrow F_0$を満たせば，$\mu(F_0)=\inf_{F\in\mathcal{F}}\mu(F)$が成り立つことである．ただし，$X$の部分集合から成る族$\mathcal{A}$は

(i) filtering downwards, i.e. $\forall A_1,\forall A_2\in\mathcal{A}$に対して，$\exists A_3\in\mathcal{A}$ s.t. $A_3\subset A_1\cap A_2$

*以下この論文では，測度はすべて有限であるとする．

(ii) $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = A_0$

を満たすとき，**filtering downwards to** A_0 であるといい，$\mathcal{A} \downarrow A_0$ で表す．τ-正則性と他の“正則性”との関係は

$$\text{Radon} \Longrightarrow \tau\text{-正則} \overset{X\text{が正則の場合}}{\Longrightarrow} \text{正則}$$

である (Vakhania *et al.* [17; Proposition I.3.1] を見よ)．また，Suslin 空間 (i.e. ある Polish 空間の連続像として表される Hausdorff 空間) 上の任意の Borel 測度は Radon である (Schwartz [13; Theorem II.10 in Part I] を見よ)．

位相空間 X が完全正則のときは，$\mathcal{P}(X)$ 上に汎関数

$$\mu \in \mathcal{P}(X) \mapsto \int_X f(x)\mu(dx), \quad f \in C_b(X)$$

をすべて連続にする最弱な位相を導入する．ここで，$C_b(X)$ は X 上で定義された連続な有界実数値関数の全体を表す．この位相を**弱位相** (weak topology) といい，ネット $\{\mu_\alpha\} \subset \mathcal{P}(X)$ が $\mu \in \mathcal{P}(X)$ に**弱収束** (weak convergence) するとは，各 $f \in C_b(X)$ に対して

$$\lim_\alpha \int_X f(x)\mu_\alpha(dx) = \int_X f(x)\mu(dx)$$

が成り立つことであるとする (この概念は，Prokhorov [11] によって初めて導入された)．このとき，$\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu$ とかく．$\mathcal{P}_\tau(X)$ 上の弱位相はふたたび完全正則であり，それゆえ一様化可能である (Topsøe [15; Theorem 11.2] を見よ)．

X，Y は位相空間とする．写像 $\lambda : x \in X \mapsto \lambda_x(\cdot) \equiv \lambda(x, \cdot) \in \mathcal{P}(Y)$ は，$\forall B \in \mathcal{B}(Y)$ に対して，写像 $x \in X \mapsto \lambda(x, B)$ が Borel 可測であるとき，$X \times Y$ 上の**推移確率** (transition probability) であるという．また，$X \times Y$ 上の推移確率 λ は，$\forall x \in X$ に対して，λ_x が τ-正則，i.e. $\lambda_x \in \mathcal{P}_\tau(Y)$ となるとき，**τ-正則**であるという．

さて，以下では X，Y は共に一様空間とする．このとき，$\mathcal{P}_\tau(Y)$ 上の弱位相は完全正則，それゆえ一様化可能となるので，$X \times Y$ 上の推移確率に対して，“一様連続性”や“同程度一様連続性”の概念を導入することができる:

$X \times Y$ 上の τ-正則な推移確率 λ が**一様連続** (uniformly continuous) であるとは，写像 $x \in X \mapsto \lambda_x(\cdot) \in \mathcal{P}_\tau(Y)$ が X 上で一様連続となることである．一様連続な $X \times Y$ 上の τ-正則な推移確率の全体を $U(X, \mathcal{P}_\tau(Y))$ で表す．さらに，$Q \subset U(X, \mathcal{P}_\tau(Y))$ が**同程度一様連続** (uniformly equicontinuous) であるとは，写像 $x \in X \mapsto \lambda_x(\cdot) \in \mathcal{P}_\tau(Y)$ の集合 $\{\lambda_x : \lambda \in Q\}$ が X 上で同程度一様連続となることであるとする．このとき，次の結果が成り立つ:

結果 1 (Propositions 1 and 2 of [7]). $\mu \in \mathcal{P}(X)$ と $\lambda \in U(X, \mathcal{P}_\tau(Y))$ に対して，確率測度 $\mu \circ \lambda$ を $X \times Y$ 上の Borel 測度として

$$\mu \circ \lambda(D) = \int_X \lambda(x, D_x)\mu(dx) \quad \text{for all } D \in \mathcal{B}(X \times Y)$$

で定義できる．さらに，μ が τ-正則ならば，$\mu \circ \lambda$ も τ-正則となる．ここで，集合 $D \subset X \times Y$ に対して，D_x は D の x-切片，i.e. $D_x = \{y \in Y : (x, y) \in D\}$ を表す．

注意 1． 結果 1 は実際には，λ が連続，i.e. 写像 $x \in X \mapsto \lambda_x(\cdot) \in \mathcal{P}_\tau(Y)$ が X 上で連続であれば成り立つ．ここで，$X \times Y$ 上の τ-正則な推移確率 λ が連続であるための必要十分条件は，各開集合 $U \subset X \times Y$ に対して，写像 $x \in X \mapsto \lambda(x, U_x)$ が X 上で下半連続であることを注意しておく．

注意 2． 任意の $\mu \in \mathcal{P}(X)$ と任意の推移確率 λ に対して，$\mu \circ \lambda$ は直積 σ-集合体 $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ 上の確率測度としては常に定義可能である．ところが，一般には $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) \subsetneq \mathcal{B}(X \times Y)$ であり，また $\mu \circ \lambda$ を $\mathcal{B}(X \times Y)$ 上に拡張することも一般にはできない．結局，結果 1 のポイントは，推移確率 λ が一様連続 (実際には，連続であればよい) かつ τ-正則であれば，$\mu \circ \lambda$ を $\mathcal{B}(X \times Y)$ 上に拡張して，Borel 確率測度として $\mu \circ \lambda$ を定義できる点にある．

結果 1 で定義された確率測度 $\mu \circ \lambda$ のことを，μ と λ の**複合確率測度** (compound probability) という．また，$\mu \circ \lambda$ の Y 上への射影を $\mu\lambda$ で表す．すなわち，$\mu\lambda(B) = \mu \circ \lambda(X \times B)$ for all $B \in \mathcal{B}(Y)$ とする．

同程度一様連続な推移確率の例としては，次のようなものがある．このほかの重要な例として，4 章では Gauss 型推移確率が取り扱われる．

例 1． X，Y は一様空間で，$\{\nu_\alpha\} \subset \mathcal{P}_\tau(Y)$ とする．各 α に対して

$$\lambda_\alpha(x, B) = \nu_\alpha(B) \quad \text{for all } x \in X \text{ and all } B \in \mathcal{B}(Y)$$

とおけば，$\{\lambda_\alpha\} \subset U(X, \mathcal{P}_\tau(Y))$ は同程度一様連続となる．

例 2． G は位相群で，$\{\nu_\alpha\} \subset \mathcal{P}_\tau(Y)$ とする．各 α に対して

$$\lambda_\alpha(x, B) = \nu_\alpha(x^{-1}B) \quad \text{for all } x \in X \text{ and all } B \in \mathcal{B}(G)$$

とおけば，$\{\lambda_\alpha\} \subset U(G, \mathcal{P}_\tau(G))$ は，G 上の右一様構造に関して同程度一様連続となる．

例 3. T，Yは一様空間，$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ は確率測度空間とする．$\mathcal{B}(T) \times \mathcal{A}$-可測，$\tau$-正則，$Y$値確率過程の族 $Z_\alpha(t,\omega)$，$t \in T$，$\omega \in \Omega$ は一様確率連続とする．i.e. 各 $Z_\alpha(t,\omega)$ の分布がτ-正則で，$\forall\varepsilon > 0$ と $\forall$ 一様近傍 V on Y に対して，$\exists$ 一様近傍 U on T s.t. $(t_1, t_2) \in U$ ならば $P(\{\omega \in \Omega : (Z_\alpha(t_1,\omega), Z_\alpha(t_2,\omega)) \in V\}) > 1 - \varepsilon$ for all α であるとする．このとき，各 α に対して

$$\lambda_\alpha(t, B) = P(\{\omega \in \Omega : Z_\alpha(t,\omega) \in B\}) \quad \text{for all } t \in T \text{ and all } B \in \mathcal{B}(Y)$$

とおけば，$\{\lambda_\alpha\} \subset U(T, \mathcal{P}_\tau(Y))$ は同程度一様連続となる．

3. 複合確率測度の収束. X，Yは完全正則空間とし，$X \times Y$上の連続な τ-正則推移確率の全体を $C(X, \mathcal{P}_\tau(Y))$ で表す．推移確率の集合 $Q \subset C(X, \mathcal{P}_\tau(Y))$ の同程度連続性は，2 章の同程度一様連続性と同様に定義する．このとき，[7] では複合確率測度の弱収束性に関して，次の結果が示されている:

結果 2 (Theorem 1 of [7]). Xは完全正則な k-空間，Yは完全正則空間で，ネット $\{\lambda_\alpha\} \subset C(X, \mathcal{P}_\tau(Y))$ は次の 3 つの条件

(a) $\{\lambda_\alpha\}$ は Xの任意のコンパクト部分集合上で同程度連続

(b) 各 $x \in X$に対して，$\{\lambda_\alpha(x, \cdot)\}$ は一様緊密

(c) $\exists\lambda \in C(X, \mathcal{P}_\tau(Y))$ s.t. $\lambda_\alpha(x, \cdot) \xrightarrow{w} \lambda(x, \cdot)$ for every $x \in X$

を満たすとする．このとき，$\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu \in \mathcal{P}_\tau(X)$ なる一様緊密なネット $\{\mu_\alpha\} \subset \mathcal{P}_\tau(X)$ に対して，$\mu_\alpha \circ \lambda_\alpha \xrightarrow{w} \mu \circ \lambda$ が成り立つ．

ここで，位相空間 Xが **k-空間**であるとは，Xの位相が，性質 "Xの任意のコンパクト部分集合 Kとの共通部分 $A \cap K$が閉であるような Xの部分集合 A は，それ自身閉集合となる" を満たすことである．局所コンパクト集合や，第 1 可算公理を満たす空間 (特に，距離空間) は k-空間である (Kelley [10] を見よ)．また，$A \subset \mathcal{P}(X)$ が**一様緊密** (uniformly tight) であるとは，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，$\exists$ コンパクト部分集合 K_ε s.t. $\mu(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ for all $\mu \in A$ が成り立つことである．

この章では，結果 2 をさらに精密化すると共に，別の方向への一般化を行う．そのための鍵となる補題を述べる: 2 つの集合 X，Y に対して，$\pi_X : X \times Y \to X$，$\pi_Y : X \times Y \to Y$

は射影とする．また，$\gamma \in \mathcal{P}(X \times Y)$ に対して，その**周辺分布**を $\pi_X(\gamma)(A) = \gamma(\pi_X^{-1}(A))$ for all $A \in \mathcal{B}(X)$，$\pi_Y(\gamma)(B) = \gamma(\pi_Y^{-1}(B))$ for all $B \in \mathcal{B}(Y)$ で定義する．次の補題は，直積空間上の τ-正則な測度の集合が測度の弱位相に関して相対コンパクトであるための必要十分条件は，各因子空間上への周辺分布の集合が相対コンパクトであることを主張しているが，この補題はこの論文で述べる応用の他にも，例えば，与えられた分布を周辺分布としてもつような確率測度が存在するための条件に関する Strassen [14] の定理の証明にも応用される ([9] を見よ).

補題 1. X，Yは完全正則空間で，$\{\gamma_\alpha\} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$ はネットとする．このとき，$\pi_X(\gamma_\alpha) \xrightarrow{w} \mu \in \mathcal{P}_\tau(X)$ かつ $\pi_Y(\gamma_\alpha) \xrightarrow{w} \nu \in \mathcal{P}_\tau(Y)$ ならば，$\{\gamma_\alpha\}$ の任意の部分ネットは，μ，ν を周辺分布にもつような測度 $\gamma \in \mathcal{P}_\tau(X \times Y)$ に弱収束する．

注意 3. 上の結果は，μ，ν が Radon 測度の場合にはすでに知られている (Hoffmann-Jørgensen [5])．しかしながら，τ-正則な測度の場合には，Radon 測度の場合のようにコンパクト集合での近似という手法が使えないので，別のアイデアによる証明を必要とする．また，τ-正則な測度は一般には Radon とはならないので (cf. Varadarajan [18])，補題 1 をすでに知られている Radon 測度の場合の結果から導くことはできない．

さて，結果 2 は [7] では Ascoli の定理を用いて証明されている．そのために，Xが k-空間という制限および条件 (b) が必要であったが，補題 1 を用いることにより，これらの条件は過剰であることがわかった．結局，結果 2 は次のように精密化される:

定理 1. X，Yは完全正則空間で，ネット $\{\lambda_\alpha\} \subset C(X, \mathcal{P}_\tau(Y))$ は次の 2 つの条件

(a) $\{\lambda_\alpha\}$ は Xの任意のコンパクト部分集合上で同程度連続

(b) $\exists \lambda \in C(X, \mathcal{P}_\tau(Y))$ s.t. $\lambda_\alpha(x, \cdot) \xrightarrow{w} \lambda(x, \cdot)$ for every $x \in X$

を満たすとする．このとき，$\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu \in \mathcal{P}_\tau(X)$ なる任意の一様緊密なネット $\{\mu_\alpha\} \subset \mathcal{P}(X)$ に対して，$\mu_\alpha \circ \lambda_\alpha \xrightarrow{w} \mu \circ \lambda$ が成り立つ．

一方，次の定理も補題 1 を用いて示され，結果 2 の別な方向への一般化を与えている．すなわち，X，Yを一様空間とし，推移確率の集合に同程度一様連続性を仮定すると，定理 1 におけるネット $\{\mu_\alpha\}$ の一様緊密性の条件も取り除くことができる:

定理 2 (Theorem 1 of [8]). X，Yは一様空間で，ネット $\{\lambda_\alpha\} \subset U(X, \mathcal{P}_\tau(Y))$ は次の

2 つの条件

(a) $\{\lambda_\alpha\}$ は同程度一様連続

(b) $\exists\lambda \in U(X, \mathcal{P}_\tau(Y))$ s.t. $\lambda_\alpha(x,\cdot) \xrightarrow{w} \lambda(x,\cdot)$ for every $x \in X$

を満たすとする．このとき，$\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu \in \mathcal{P}_\tau(X)$ なる任意のネット $\{\mu_\alpha\} \subset \mathcal{P}(X)$ に対して，$\mu_\alpha \circ \lambda_\alpha \xrightarrow{w} \mu \circ \lambda$ が成り立つ．

通信理論への応用の可能性: 通信理論を関数解析の手法を用いて展開する立場からは，入力空間 X，出力空間 Y に対して，$X \times Y$ 上の推移確率は通信路 (channel) とよばれ，入力信号 $x \in X$ が通信路 λ に送られたとき，雑音のために，観測することができるのは，x の出力 y が集合 $B \subset Y$ に属する確率だけであり，その確率が $\lambda(x, B)$ であると考える．また，入力信号 $x \in X$ の出現頻度 $\mu \in \mathcal{P}(X)$ のことを入力情報源といい，それが通信路 λ を通過することによって得られる情報源 $\mu\lambda \in \mathcal{P}(Y)$，$\mu \circ \lambda \in \mathcal{P}(X \times Y)$ のことをそれぞれ，出力情報源，複合情報源という．このような設定のもとで，定理 2 は通信路 λ が一様連続であれば，入力情報源の集合から複合情報源 (resp. 出力情報源) の集合への写像

$$\mu \in \mathcal{P}_\tau(X) \mapsto \mu \circ \lambda \in \mathcal{P}_\tau(X \times Y) \quad (\text{resp. } \mu \in \mathcal{P}_\tau(X) \mapsto \mu\lambda \in \mathcal{P}_\tau(Y))$$

が弱位相に関して連続であることを主張している．言い換えれば，2 つの入力情報源 μ_1，μ_2 が分布の意味で近ければ，出力情報源 $\mu_1\lambda$，$\mu_2\lambda$ および複合情報源 $\mu_1 \circ \lambda$，$\mu_2 \circ \lambda$ もそれに応じて近くなるということを保証している．また，通信路容量を計算する際には，相対エントロピー $H(\mu, \nu)$ を用いて定義される相互情報量

$$I(\mu, \lambda) = H(\mu \circ \lambda, \mu \times \mu\lambda)$$

が利用されるが，定理 2 と，相対エントロピーの弱収束に関する同時下半連続性 (Donsker and Varadhan [3] を見よ) を用いれば，一様連続な通信路 λ に対しては，相互情報量の下半連続性:

$$\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu \quad \text{ならば} \quad \liminf_\alpha I(\mu_\alpha, \lambda) \geq I(\mu, \lambda)$$

が得られることになる．これらのことは，通信路の数学的基礎付けに応用できる (Umegaki [16] を見よ)．

ふたたび話を本論に戻す．特に，X，Y が共に Suslin 空間の場合には，任意の Borel 測度は Radon 測度，それゆえ τ-正則となるので，例えば定理 2 の仮定における τ-正則性の条件は不要となり，次の形の結果が得られる:

系 1 (Corollary 1 of [8]). X, Y は Suslin 一様空間で，ネット $\{\lambda_\alpha\} \subset U(X, \mathcal{P}(Y))$ は次の 2 つの条件

(a) $\{\lambda_\alpha\}$ は同程度一様連続

(b) $\exists \lambda \in U(X, \mathcal{P}(Y))$ s.t. $\lambda_\alpha(x, \cdot) \xrightarrow{w} \lambda(x, \cdot)$ for every $x \in X$

を満たすとする．このとき，$\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu \in \mathcal{P}(X)$ なる任意のネット $\{\mu_\alpha\} \subset \mathcal{P}(X)$ に対して，$\mu_\alpha \circ \lambda_\alpha \xrightarrow{w} \mu \circ \lambda$ が成り立つ．

定理 2 は，直積測度や畳み込み測度の弱収束に関するよく知られた結果を含んでいる．各 $\nu \in \mathcal{P}_\tau(Y)$ に対して

$$\lambda(x, B) = \nu(B) \quad \text{for all } B \in \mathcal{B}(Y)$$

とおくと，$\mu \circ \lambda = \mu \times \nu$ となるので，定理 2 と例 1 より，直積測度の弱収束に関する次の結果が得られる:

系 2 (Corollary 3 of [8]). X, Y は一様空間で，ネット $\{\mu_\alpha\} \subset \mathcal{P}(X)$, $\{\nu_\alpha\} \subset \mathcal{P}_\tau(Y)$ は $\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu \in \mathcal{P}_\tau(X)$, $\nu_\alpha \xrightarrow{w} \nu \in \mathcal{P}_\tau(Y)$ を満たしているとする．このとき，$\mu_\alpha \times \nu_\alpha \xrightarrow{w} \mu \times \nu$ が成り立つ．

注意 4. 上の結果は，X, Y が共に可分距離空間のときは Billingsley [1] で，上記の設定では Vakhania *et al.* [17] で示されている．彼らの用いたテクニックは，"弱収束 $\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu$ を示すには，適当な集合族に属する集合 A に対して，$\mu_\alpha(A) \to \mu(A)$ となることを示せばよい" というものであり，われわれの証明法とは異なる．

$X = Y = G$ (G は位相群) の場合は，各 $\nu \in \mathcal{P}_\tau(Y)$ に対して

$$\lambda(x, B) = \nu(x^{-1}B) \quad \text{for all } x \in X \text{ and all } B \in \mathcal{B}(Y)$$

とおくと，$\mu\lambda = \mu * \nu$ となるので，定理 2 と例 2 より，畳み込み測度の弱収束に関する Csiszár [2] の結果が得られる:

系 3 (Corollary 2 of [8]). G は位相群で，ネット $\{\mu_\alpha\} \subset \mathcal{P}_\tau(G)$, $\{\nu_\alpha\} \subset \mathcal{P}_\tau(G)$ は $\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu \in \mathcal{P}_\tau(G)$, $\nu_\alpha \xrightarrow{w} \nu \in \mathcal{P}_\tau(G)$ を満たしているとする．このとき，$\mu_\alpha * \nu_\alpha \xrightarrow{w} \mu * \nu$ が成り立つ．

4. Gauss 型推移確率の同程度一様連続性. 定理 2 の具体的な応用の一つの例とし

て，有限次元空間，さらには核型空間上の Gauss 型推移確率によって定まる複合確率測度の弱収束について得られた結果を述べる．

$(X, \mathcal{A})$ は測度空間，Ψは核型 Fréchet 空間または核型 Fréchet 空間の増加列の狭義帰納極限とし，Ψ'_β で Ψ の強双対空間を表す．$X \times \Psi'_\beta$ 上の推移確率 λ は，各 $x \in X$に対して，λ_x が Ψ' 上の Gauss 測度であるとき，**Gauss 型**であるという．Gauss 測度はその平均と共分散によって一意に定まるので，Gauss 型推移確率もその**平均関数**

$$m(x,u) = \int_{\Psi'_\beta} \eta(u)\lambda(x, d\eta), \quad x \in X \text{ and } u \in \Psi$$

と**共分散関数**

$$s(x,u,v) = \int_{\Psi'_\beta} \{\eta(u) - m(x,u)\}\{\eta(v) - m(x,v)\}\lambda(x,d\eta), \quad x \in X \text{ and } u, v \in \Psi$$

によって一意に定まる．そこで，$\lambda = \mathcal{TN}[m, s^2]$ と書くことにする．ただし，$s^2(x,u) = s(x,u,u)$ とする．核型空間については Schaefer [12]，核型空間上の測度については Itô [6]，Yamasaki [19] を参照すれば，さらに詳しい情報が得られる．

R^Nは N次元ユークリッド空間で，$u = (u_1, u_2, \cdots, u_N)$, $v = (v_1, v_2, \cdots, v_N) \in R^N$ に対して，$\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_Nv_N$，$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ とおく．また，$\mathcal{L}(R^N)$ は $N \times N$ 型の実行列全体からなる集合とする．このとき，$\mathcal{L}(R^N)$ は作用素ノルム $\|A\|_0 = \sup_{u \in R^N} \|Au\|/\|u\|$ に関して，可分な実 Banach 空間となる．特別な場合として，$\Psi = R^N$ のときは，$X \times R^N$上の Gauss 型推移確率 $\lambda = \mathcal{TN}[m, s^2]$ に対して，可測関数 $m : X \to R^N$ と $S : X \to \mathcal{L}(R^N)$ が存在して

$$m(x,u) = \langle m(x), u\rangle \quad \text{and} \quad s(x,u,v) = \langle S(x)u, v\rangle \quad \text{for all } x \in X \text{ and all } u, v \in R^N$$

と表される．そこで，$\Psi = R^N$の場合には，$\lambda = \mathcal{TN}[m, S]$ と書くことにする (ベクトル値および作用素値関数の可測性については，Hille and Phillips [4; page 74] を見よ)．

λ は $X \times R^N$上の推移確率とする．このとき，各 $x \in X$に対して，λ_xは R^N上の確率測度なので，その特性関数を

$$\hat{\lambda}_x(u) = \int_{R^N} e^{i\langle u,v\rangle}\lambda(x, dv), \quad x \in X \text{ and } u \in R^N$$

で定める．次の命題はフーリエ変換のテクニックを用いて証明され，$X \times R^N$上の (必ずしも Gauss 型ではない一般の) 推移確率の同程度一様連続性は，その特性関数によって判定できることを示している．

命題 1 (Proposition 1 of [8]). Xは一様空間で，$\mathcal{U}$をその一様構造とする．$X \times R^N$上の推移確率の集合 Q が同程度一様連続であるための十分条件は，$\forall \varepsilon > 0$ と $\forall$ コンパクト集合 $K \subset R^N$ に対して，$\exists U \in \mathcal{U}$ s.t.

$$(x_1, x_2) \in U \quad \text{ならば} \quad \sup_{u \in K} \left| \hat{\lambda}_{x_1}(u) - \hat{\lambda}_{x_2}(u) \right| \leq \varepsilon \quad \text{for all } \lambda \in Q$$

が成り立つことである．

命題 1 を Gauss 型推移確率に応用すれば，次の結果が得られる：

系 4 (Corollary 4 of [8]). Xは一様空間で，$X \times R^N$上の Gauss 型推移確率 $\lambda = \mathcal{TN}[m_\lambda, S_\lambda]$ の集合を Q とする．このとき，各 $u \in R^N$に対して，平均ベクトルの集合 $\{\langle m_\lambda(\cdot), u\rangle\}$ と共分散行列の集合 $\{\langle S_\lambda(\cdot)u, u\rangle\}$ が X 上で同程度一様連続ならば，Q は同程度一様連続となる．

定理 2 と系 4 により，$Y = R^N$の場合には，次の収束定理が得られる：

定理 3. Xは一様空間とする．$\lambda_\alpha = \mathcal{TN}[m_\alpha, S_\alpha]$, $\lambda = \mathcal{TN}[m, S]$ は $X \times R^N$上の Gauss 型推移確率とし，次の 2 つの条件を満たすとする：

(a) 各 $u \in R^N$に対して，写像の族 $\{\langle m_\alpha(\cdot), u\rangle\}$ および $\{\langle S_\alpha(\cdot)u, u\rangle\}$ は X上で同程度一様連続である．

(b) 各 $x \in X$と $u \in R^N$に対して，$\lim_\alpha \langle m_\alpha(x), u\rangle = \langle m(x), u\rangle$ および $\lim_\alpha \langle S_\alpha(x)u, u\rangle = \langle S(x)u, u\rangle$ が成り立つ．

このとき，$\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu \in \mathcal{P}_\tau(X)$ なる任意のネット $\{\mu_\alpha\} \subset \mathcal{P}(X)$ に対して，$\mu_\alpha \circ \lambda_\alpha \xrightarrow{w} \mu \circ \lambda$ が成り立つ．

$X = \Phi'_\beta$ (Φ は核型 Fréchet 空間または核型 Fréchet 空間の増加列の狭義帰納極限)，$Y = \Psi'_\beta$の場合には，いくつかの補題を準備することにより，次の収束定理が得られる：

定理 4 (Theorem 2 of [8]). $\lambda_n = \mathcal{TN}[m_n, s_n^2]$ $(n \geq 1)$，$\lambda = \mathcal{TN}[m, s^2]$ は $\Phi'_\beta \times \Psi'_\beta$ 上の Gauss 型推移確率とし，次の 2 つの条件 (a)，(b) を満たすとする：

(a) 各 $u \in \Psi$に対して，写像の族 $\{m_n(\cdot, u)\}$ および $\{s_n(\cdot, u)\}$ は Φ'_β 上で同程度一様連続である．

(b) 各 $\xi \in \Phi'$と $u \in \Psi$に対して，$\lim_{n\to\infty} m_n(\xi, u) = m(\xi, u)$ および $\lim_{n\to\infty} s_n(\xi, u) = s(\xi, u)$ が成り立つ．

このとき，$\mu_n \xrightarrow{w} \mu \in \mathcal{P}(\Phi'_\beta)$ なる任意の列 $\{\mu_n\} \subset \mathcal{P}(\Phi'_\beta)$ に対して，$\mu_n \circ \lambda_n \xrightarrow{w} \mu \circ \lambda$ が成り立つ.

参考文献

[1] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York, 1968.

[2] I. Csiszár, *On the weak* continuity of convolution in a convolution algebra over an arbitrary topological group*, Studia Sci. Math. Hungar. 6 (1971), 27-40.

[3] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan, *Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time, I*, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), 1-47.

[4] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-Groups*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1957.

[5] J. Hoffmann-Jørgensen, *Probability in Banach spaces*, Lecture Notes in Math. Vol. 598, Springer-Verlag, New York, 1977.

[6] K. Itô, *Foundations of Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensional Spaces*, CBMS 47, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1984.

[7] J. Kawabe, *Convergence of compound probability measures on topological spaces* (to appear in Colloquium Mathematicum).

[8] J. Kawabe, *Uniform equicontinuity of transition probabilities on uniform spaces* (submitted for publication).

[9] J. Kawabe, *A criterion for weak compactness of measures on product spaces with applications* (submitted for publication).

[10] J. L. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand, New York, 1955.

[11] Yu. V. Prokhorov, *Convergence of random processes and limit theorems in probability theory*, Theory Probab. Appl. 1 (1956), 157-214.

[12] H. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, Springer, New York, 1971.

[13] L. Schwartz, *Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures*, Oxford University Press, 1973.

[14] V. Strassen, *The existence of probability measures with given marginals*, Ann. Math. Statist. 36 (1965), 423-439.

[15] F. Topsøe, *Topology and Measure*, Lecture Notes in Math. Vol. 133, Springer-Verlag, New York, 1970.

[16] H. Umegaki, *Representations and extremal properties of averaging operators and their applications to information channels*, J. Math. Anal. Appl. 25 (1969), 41-73.

[17] N, N. Vakhania, V. I. Tarieladze and S. A. Chobanyan, *Probability Distributions on Banach Spaces*, D. Reidel Publishing Company, 1987.

[18] V. S. Varadarajan, *Measures on topological spaces*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. II, 48 (1965), 161-228.

[19] Y. Yamasaki, *Measures on Infinite Dimensional Spaces*, World Scientific, 1985.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF ENGINEERING
SHINSHU UNIVERSITY
WAKASATO, NAGANO 380
JAPAN
E-mail: JKAWABE@GIPWC.SHINSHU-U.AC.JP