

淀み流中の乱流の数値計算

阪大基礎工機械 高岡正憲 (Masanori Takaoka)

1 はじめに

大きいスケールの流れの最も簡単なものとして、(スケール無限大の)線形流が考えられる。これらの流れは大きく分けて、回転、せん断、淀み、の三種類となり、それぞれ、渦構造に与える影響としては、順に、回転、回転+引き伸ばし、引き伸ばし、がある。前二つの流れの場合はすでに数値計算もありいろいろと調べられているが、最後のものについてはあまり詳しく調べられていないようである。これら三つの場を比較検討することは、大キースケールからの影響を理解しモデル化する上でも重要なことである。

特に、渦の引き伸ばしは、三次元流の非線形性の特徴であるばかりでなく、解の特異性とも関係する重要な量である。そこで、本研究では淀み流中の乱流を直接数値シミュレーションし、引き伸ばしの役割について詳しく調べることを目的とする。また、実験における色素での観測との対応を考え、パッシブスカラー場もシミュレーションした。この場の支配方程式は、渦度方程式の(自己)引き伸ばしの無いものとみなすことも出来、引き伸ばしの効果をより詳しく見る上で役に立つと考えられる。¹ 現時点での解析はまだ十分に進んではないが、途中結果として今までに分かったことについて報告する。

次の章では、簡単に数値計算法などについて説明し、引き続き各章で、得られた計算結果と Rapid-Distortion-Approximation との比較や、渦層から渦管への遷移に対する引き伸ばしの影響を中心として書くことにする。最後の章で、得られた結果を簡単に箇条書でまとめる。

¹ エンストロフィ密度の支配方程式とパッシブスカラーのそれとを比べても、(自己)引き伸ばしの効果が対照的な形に入っている。

2 基礎方程式と数値計算法

速度場を平均流である淀み流の部分と揺らぎの部分とに分けて、次のように書く。

$$\mathbf{v} = (A_1 x_1 + u_1, A_2 x_2 + u_2, A_3 x_3 + u_3) \quad (1)$$

但し、今は平均流の時間変化および揺らぎからの跳ね返りの影響は考えていないし、非圧縮性を仮定しているので $A_1 + A_2 + A_3 = 0$ である。この時渦度場は、

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (2)$$

となり、流れ場を支配する方程式（渦度方程式）は、

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} = -u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - A_j x_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} + \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + A_i \omega_i + \nu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j^2} \quad (3)$$

パッシブスカラーの発展方程式は、

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} - A_j x_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2} \quad (4)$$

となる。ここに ν と κ はそれぞれ動粘性係数と拡散係数である。これらの基礎方程式には、空間変数が陽に入っているため、そのままでは数値計算が困難である。そこで次のような変数変換を行ない、

$$X_i = \exp(-A_i t) x_i = E_i(t) x_i \quad (5)$$

基礎方程式を書き直すと、

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} = -E_j u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} + E_j \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + A_i \omega_i + \nu E_j E_j \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j^2} \quad (6)$$

$$\omega_i = \epsilon_{ijk} E_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -E_j u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \kappa E_j E_j \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2} \quad (8)$$

となる。揺らぎの部分に“X-空間”での周期境界条件を課し、非線形項の計算には擬スペクトル法を用いる。但し、計算精度を保つために非等方グリッドでも計算できるようにしてある。また、時間方向の積分には、粘性項を繰り込んで安定化をはかった Runge-Kutta-Gill 法を

用いる。ただし、波数 k_i は時間の関数であり、 X_i に対する波数を K_i として、 $k_i(t) = E_i(t)K_i$ となることを注意しておく。

この系に現れる特徴的パラメータ（時間）としては、

$$\text{large eddy time scale : } t_{le}(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\nu Q(t)} \quad (9)$$

$$\text{small eddy time scale : } t_{se}(t) = \frac{1}{\sqrt{2Q(t)}} \quad (10)$$

$$\text{mean strain time scale : } t_{A_i} = \frac{1}{A_i} \quad (11)$$

がある。但し、 $\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \langle \|\mathbf{u}(t)\|^2 \rangle$ 、 $Q(t) = \frac{1}{2} \langle \|\boldsymbol{\omega}(t)\|^2 \rangle$ であり、Reynolds 数は、 $Re_\lambda = \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{t_{le}}{t_{se}}$ と書ける。計算に用いたパラメータを表 1 に示す。また、初期条件は、エネルギースペクトル $E(k)$ が

$$E(K) = CK^4 \exp(-K^2/K_0^2)$$

となるようなランダム場で、 $C = 2.35 \times 10^{-1}$ 、 $K_0 = 2$ 、 $\nu = 0.01$ 、 $\kappa = 0.01$ とした。この時、 $\varepsilon(0) = 5.0$ 、 $Q(0) = 50$ 、 $t_{le}(0) = 10$ 、 $t_{se}(0) = 0.1$ 、 $t_{A_i} \sim 10$ である。もう一つ、乱流場に対する淀み流の影響を見るために、上記の初期条件の淀み流がない ($A_i = 0$) 場合の数値計算の $t = 1.0$ の時の場で、 $\nu = 0.005$ 、 $\kappa = 0.005$ としたものも計算した。この時、 $\varepsilon(1) = 2 \sim 2.5$ 、 $Q(1) = 120 \sim 230$ 、 $t_{le}(1) = 30 \sim 40$ 、 $t_{se}(1) = 0.065 \sim 0.045$ 、 $t_{A_i} \sim 1$ である。

3 計算結果

3.1 積分量

今回報告する結果は、主に表 1 中の R60-63, C60-63, R70-72 のものである。図 1 に各 RUN に於ける、エネルギー、エンストロフィと各特徴的時間の時間発展の様子を示す。渦伸長でエンストロフィが急激に大きくなり、それにともない Reynolds 数の急激な減少が見られる。また、平均流のあるものの方が、エネルギーやエンストロフィの値が大きいことから、揺らぎの場への平均流からのエネルギー注入があると考えられる。実際、(全) エネルギー

の時間発展は,

$$\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = -A_j \int u_j u_j d\mathbf{x} - 2\nu Q(t) \quad (12)$$

で決まるので, 右辺第一項がそれに対応する.

これをさらに詳しく見るために, 図2に Fourier-空間におけるエネルギートランスファーを示した.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\mathbf{K})}{\partial t} &= -2\nu Q(\mathbf{K}) - A_j \|\tilde{u}_j(\mathbf{K})\|^2 \\ &+ \Im \left(k_j \left\{ \delta_{ii'} - \frac{k_i k_{i'}}{k_l k_l} \right\} \tilde{u}_i^*(\mathbf{K}) \sum_{\mathbf{K}'+\mathbf{K}''=\mathbf{K}} \tilde{u}_j(\mathbf{K}') \tilde{u}_{i'}(\mathbf{K}'') \right) \\ &= T_D(\mathbf{K}) + T_S(\mathbf{K}) + T_N(\mathbf{K}) \end{aligned} \quad (13)$$

ただし, $\tilde{u}_i^*(\mathbf{K}) = \tilde{u}_i(-\mathbf{K})$. 図には, "シェル"ではなく各方向に"ボード"状に足し上げて一次元トランスファーとした(式(16)参照) T_S と T_N とを別々に示してある. 低波数側で平均流からのエネルギー注入があり, 非線形効果で高波数側に流れていることが分かる. また, A_i が負の方向には, T_S が一部負の値をとることも分かる.

3.2 Rapid Distortion Approximation との比較

平均流があるような乱流に対する代表的理論として, Rapid Distortion Approximation がある. これは, 今の場合, $t_{le} \gg t_A$ ほど良い近似を与えるようなもので, 線形化した方程式:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \nu_T k^2 \tilde{u}_i = \left(2 \frac{k_i k_j}{k_l k_l} - \delta_{ij} \right) A_j \tilde{u}_j \quad (14)$$

により, その時間発展を予測するようなものである. この方程式は簡単に解けて, その解は,

$$\tilde{u}_i(t) = \frac{\exp(-\int_0^t \nu_T k^2 ds)}{k^2(t)} M_{ij} \tilde{u}_j(0) \quad (15)$$

$$M = \begin{pmatrix} D_{123} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & D_{231} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & D_{312} \end{pmatrix}$$

である. ここに $D_{pqr} = (k_p^2(0) + k_q^2(t) + k_r^2(t)) \exp(-A_p t)$, $C_{pq} = k_p(t)(k_q^2(0) - k_q^2(t))/k_q(0)$

図1からも予想できるように、今の計算に用いられたパラメータでは、その近似は急激に悪くなると考えられる。図3には、Reynolds Stressの時間発展の様子と、各時刻における場のデータを元に式(15)により計算されたものである。定性的な傾向はあっているが、いつも過大評価されており、時間とともにそのずれも大きくなっている。より詳しく見るために、エネルギーの一次元スペクトルを作り、その比較も行なってみた。ここに一次元スペクトルはエネルギーでは、

$$E_p(K_q) = \sum_{K_q, K_r} \frac{1}{2} \|u_p(\mathbf{K})\|^2, \quad E(K_q) = \sum_{p=1}^3 E_p(K_q) \quad (16)$$

で定義され、一様等方で $E(k) \propto k^{-5/3}$ の時には、

$$E_p(K_p) = \frac{9}{11} E(\|\mathbf{K}\|), \quad E_p(K_q) = \frac{5}{11} E(\|\mathbf{k}\|) \quad (p \neq q) \quad (17)$$

となる。図4にエネルギーとエンストルフィの一次元スペクトルの一例を示す。(a)はシミュレーションで得られた結果であり、(b)はRapid Distortion Approximationにより予測されたスペクトルである。低波数側で過大評価され、高波数側で散逸が大き過ぎることが分かる。これより、この近似で無視された非線形項が、等方化および高波数帯の励起を行なっているものと考えられる。

3.3 渦構造

最近の計算機の進歩により、一様乱流中に渦構造が存在することが指摘され、乱流の間欠性との関係から盛んに研究されるようになってきた。ここでは、平均流として与えられた渦伸長の効果が、その渦構造の時間発展にどのような影響を与えるかを見てみる。

まず、渦度場の時間発展の様子を図5に示す。これは等渦度面の透視図で、計算領域の一部を拡大したものである。閾値は、適当に渦構造が見やすくなるような値をとった。(この図では平均値の2.5倍。)初期は、低波数にのみ大きな値を持つエネルギー場なので、実空間では、いくつかの大きなボール状の固まりとして現れる。それらは、引き伸ばされてシート状となる。そして、おそらくKelvin-Helmholtz不安定と同様の機構により、巻き上がった部分がチューブ状の渦管へと遷移していく。

この遷移過程を数量化し、もう少し詳しく見ることを考える。計算された領域で、渦度が極大値をとる点を探し、その各点を中心に半径 r と $r + \delta r$ の球殻に挟まれた部分に存在する渦度がある値（極大値の 70, 50, 30%）以上の領域の体積を計算し、その r 依存性の巾プラス 1 で次元を定義する（図 6 参照）。この方法では、図 5 のような閾値の設定の任意性や、弱い渦構造を無視するという事はない。しかしながら、複雑な形状のものや実際の個々の渦構造の体積などは観測されていない。この結果を図 7 に示す。次元が 3（ボール）から 1（チューブ）へと遷移している様子が分かる。しかも、その値が大きいものほど速い。(a) と (b) とを比べると少しではあるが、渦構造の方がパッシブスカラーのそれよりも速く遷移していることが分かる。これにより、引き伸ばしの効果がこの遷移を促進していると考えられる。また、淀み流がある場合 (c) と無い場合 (d) とを比べると、これも少しではあるが (c) の方が遷移が速いようである。先にも述べたように、この場合引き伸ばしの効果以外にも、平均流からのエネルギーの注入があることが効いていると思われる。

4 まとめ

淀み流中の乱流場を直接数値シミュレーションした。(途中結果ではあるが) 次のことが分かった。

- 平均流である淀み流から揺らぎの場へのエネルギー注入が（低波数側で）ある。
- Rapid Distortion Approximation と数値シミュレーションの結果は、定性的に一致する。ただし、現パラメータでは全て過大評価した値を与える。これは、非線形効果による等方化と高波数帯の励起が考慮されていないためと考えられる。
- 引き伸ばしの効果のために、渦度場の方がパッシブスカラーより速くボール状からチューブ状へ遷移する。
- 引き伸ばしおよび平均流からのエネルギー注入のために、淀み流がある方が無いものよりボール状からチューブ状へ速く遷移する。

表1. 計算に用いたパラメタの一覧

RUN	Init. Cond.	ν	$N_1 \times N_2 \times N_3$	time
R60	Random (0, 0, 0)	0.01	$64 \times 64 \times 64$	0 ~ 1
R61w	Random (0.1, -0.1, 0)	0.01	$96 \times 64 \times 64$	0 ~ 1
R62w	Random (0.1, -0.05, -0.05)	0.01	$96 \times 64 \times 64$	0 ~ 1
R63w	Random (0.1, 0.1, -0.2)	0.01	$96 \times 96 \times 64$	0 ~ 1
R61	Random (1, -1, 0)	0.01	$128 \times 64 \times 64$	0 ~ 0.8
R62	Random (1, -0.5, -0.5)	0.01	$128 \times 64 \times 64$	0 ~ 0.8
R63	Random (0.5, 0.5, -1)	0.01	$128 \times 128 \times 64$	0 ~ 0.8
R90	Random (0, 0, 0)	0.007	$96 \times 96 \times 96$	0 ~ 1
R91	Random (1, -1, 0)	0.007	$192 \times 96 \times 96$	0 ~ 1
R92	Random (1, -0.5, -0.5)	0.007	$192 \times 96 \times 96$	0 ~ 1
R93	Random (0.5, 0.5, -1)	0.007	$192 \times 192 \times 96$	0 ~ 1
C60	R60($t=1$) (0, 0, 0)	0.005	$64 \times 64 \times 64$	0 ~ 0.8
C61	R60($t=1$) (1, -1, 0)	0.005	$128 \times 64 \times 64$	0 ~ 0.8
C62	R60($t=1$) (1, -0.5, -0.5)	0.005	$128 \times 64 \times 64$	0 ~ 0.8
C63	R60($t=1$) (0.5, 0.5, -1)	0.005	$128 \times 128 \times 64$	0 ~ 1
R70	Random (0, 0, 0)	0.005	$128 \times 128 \times 128$	0 ~ 1
R71	Random (1, 0, -1)	0.005	$256 \times 128 \times 96$	0 ~ 1
R72	Random (1, -0.5, -0.5)	0.005	$256 \times 96 \times 96$	0 ~ 1

図1. (a) エネルギー, (b) エントロピー, (c) $\frac{E_A}{E_S}$, (d) $\frac{E_{IE}}{E_S} \propto Re$ の時間発展.

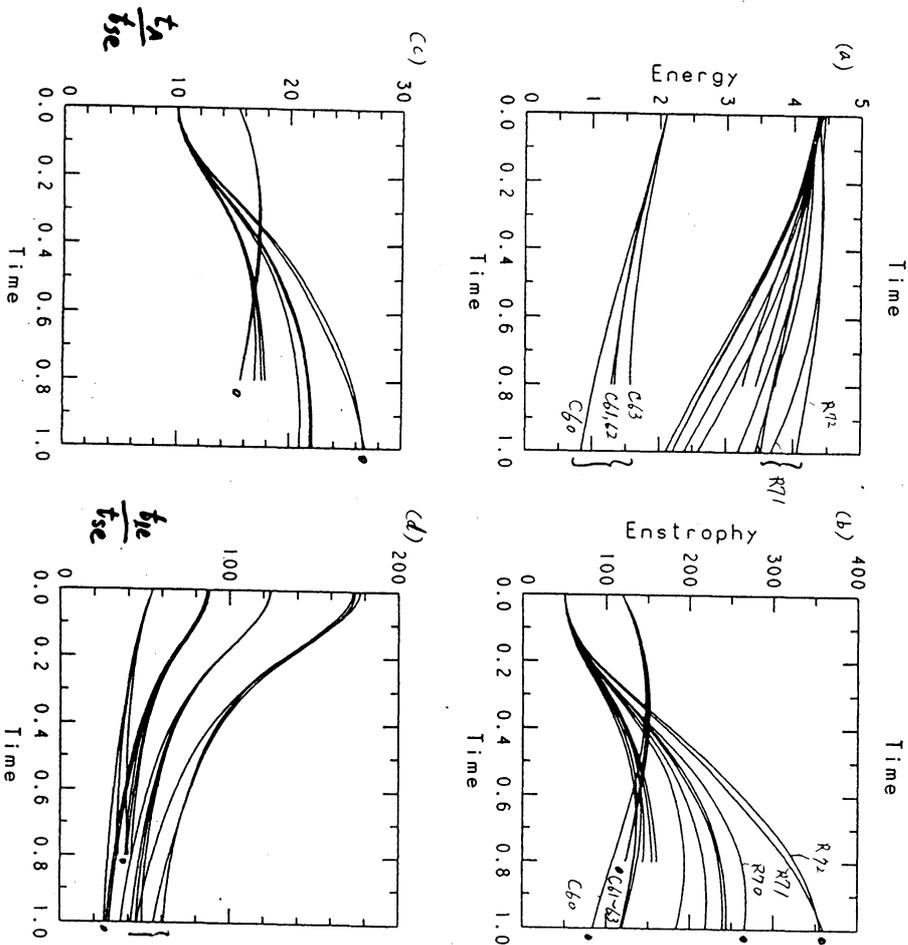
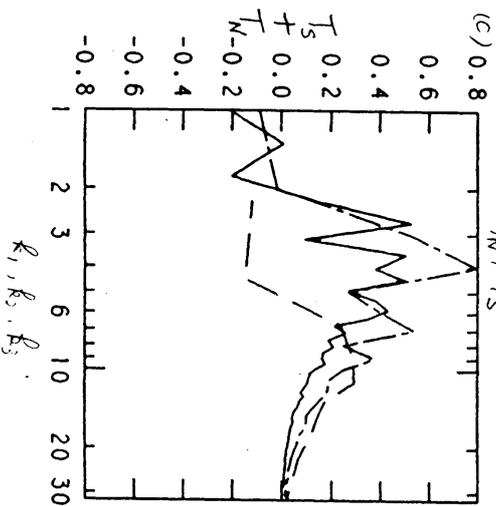
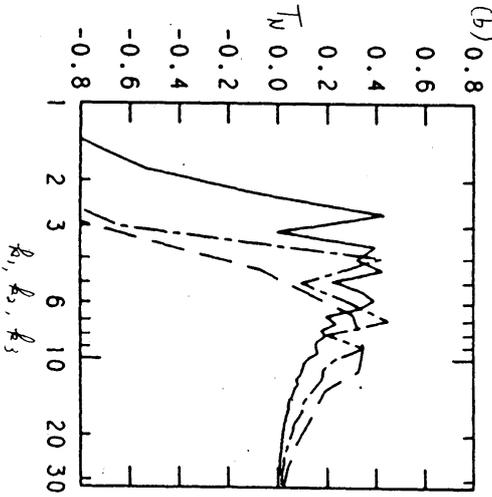
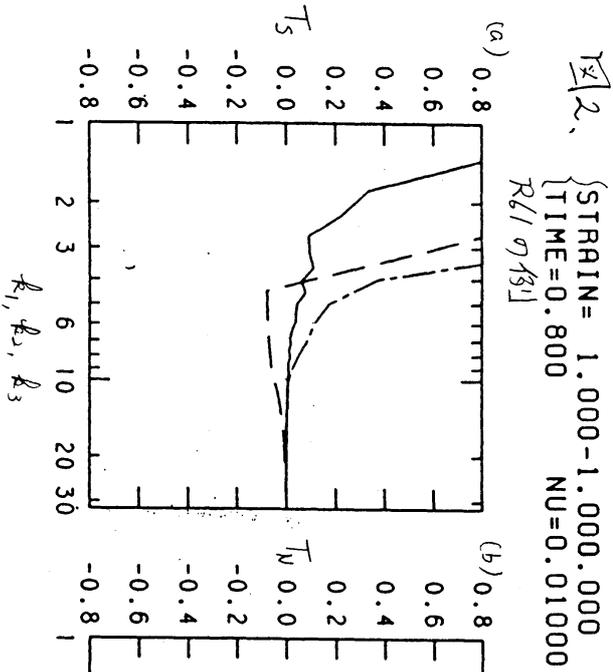
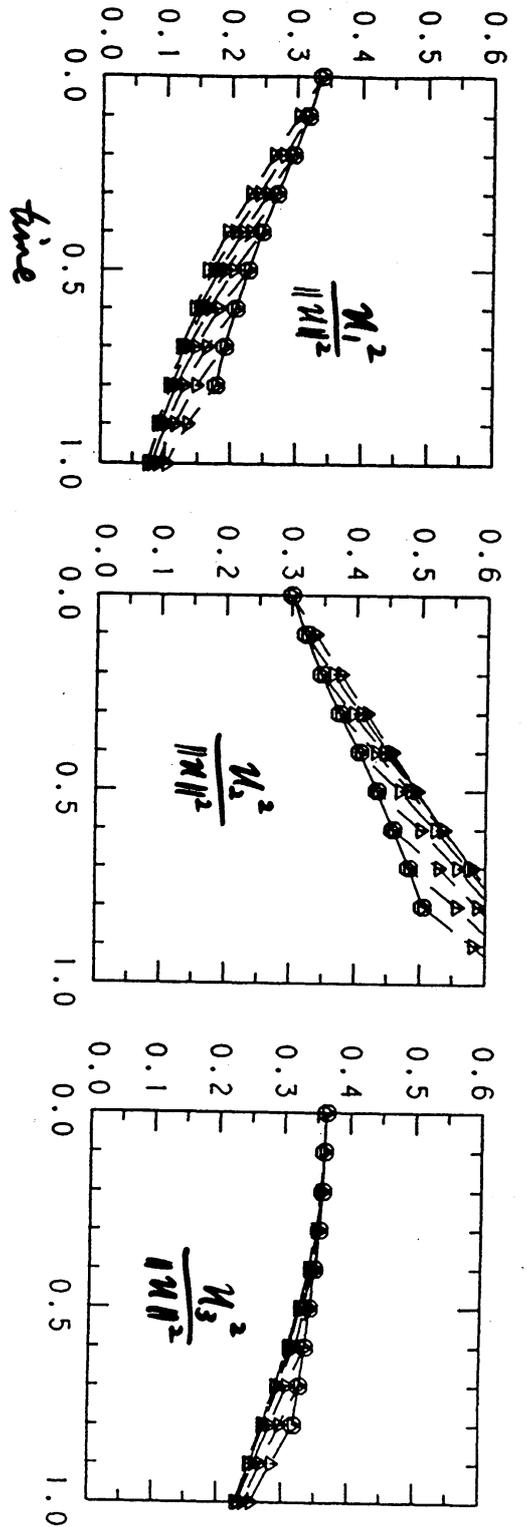


図3. Reynolds Strain の時間発展, $\circ \dots$ DNS, $\Delta \dots$ RDT, R_{61} の値



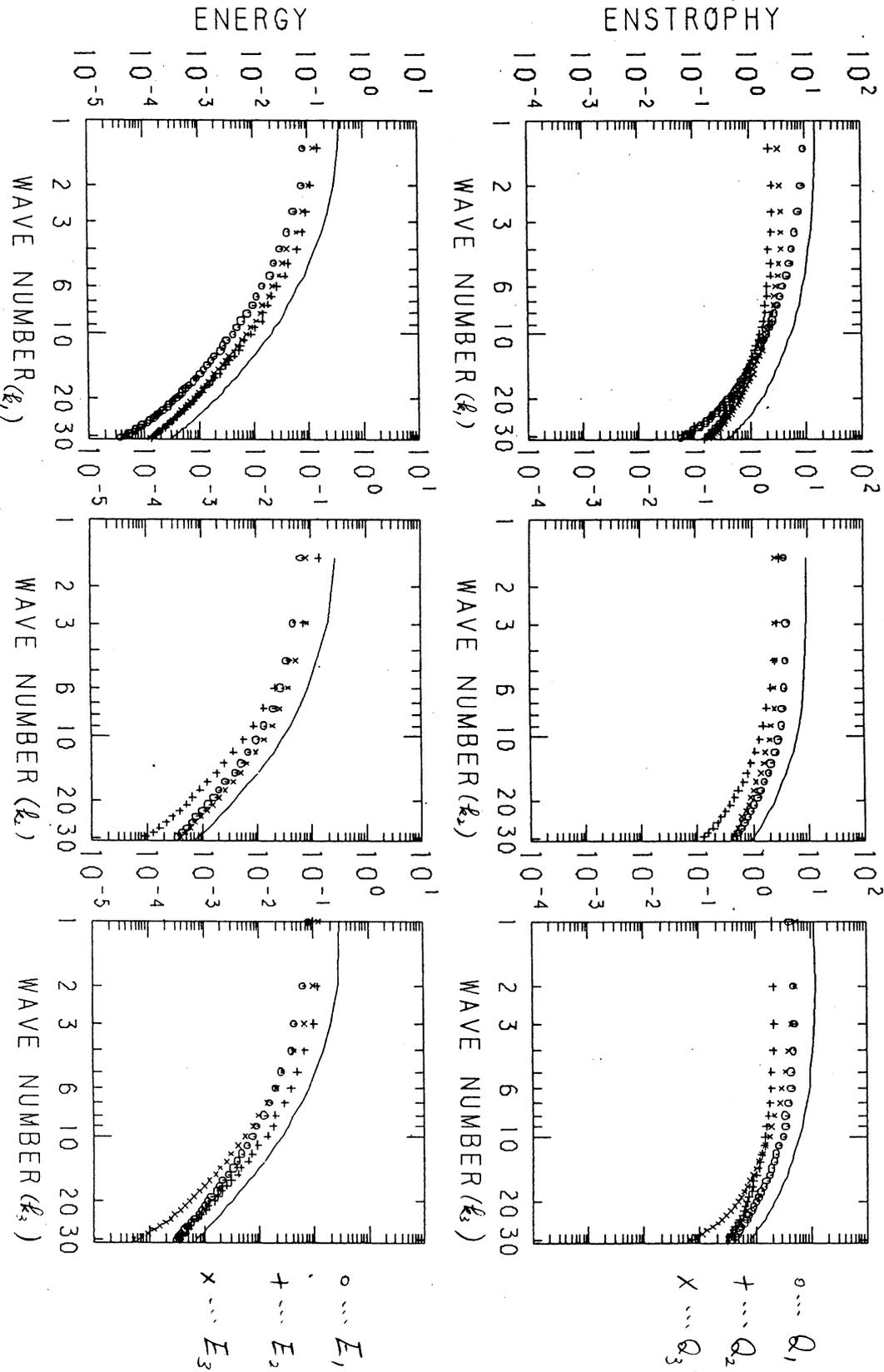
エネルギー-トランスファーのグラフ,
 (a) $-\square$; $T_S(k_1)$, $-\square$; $T_S(k_2)$, $-\square$; $T_S(k_3)$
 (b) $-\square$; $T_N(k_1)$, $-\square$; $T_N(k_2)$, $-\square$; $T_N(k_3)$
 (c) $T_N + T_S$

図4 (a)

R1:R2:R3 = 1.000 -1.000 0.000
 TIME=0.400 NU=0.00500

DT=0.00500

, C61の制, 数値計算で得られたスペクトル



4 (b)

R1:R2:R3 = 1.000 -1.000 0.000
 TIME=0.400 NU=0.00500

DT=0.00500

6101, $k=0$ の τ - g 基底に Rapid Distortion Approx. τ 予測された τ のプロット ($U_2 = U_2(t)$)

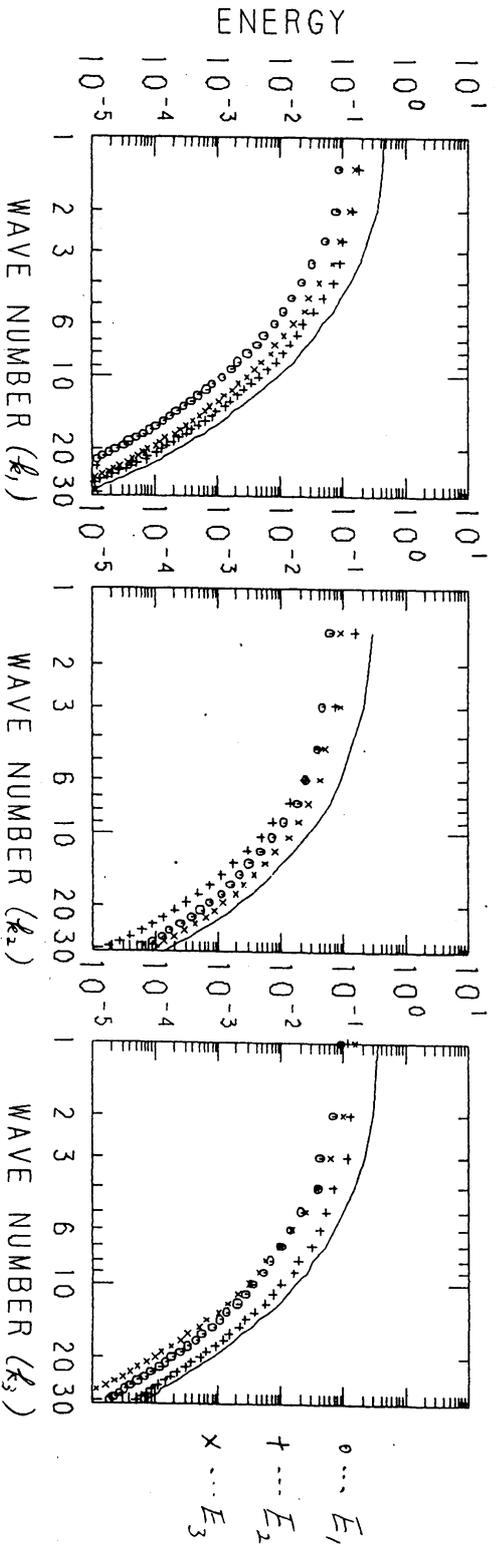
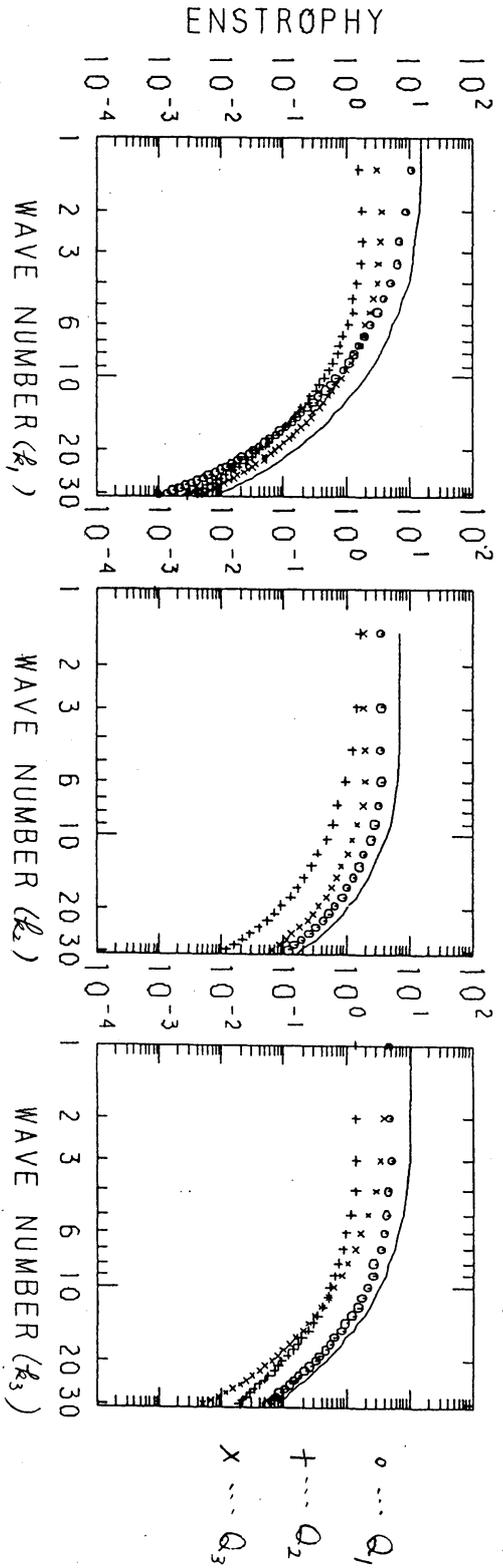
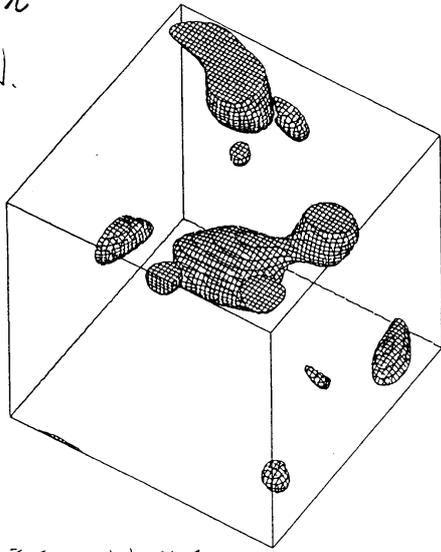
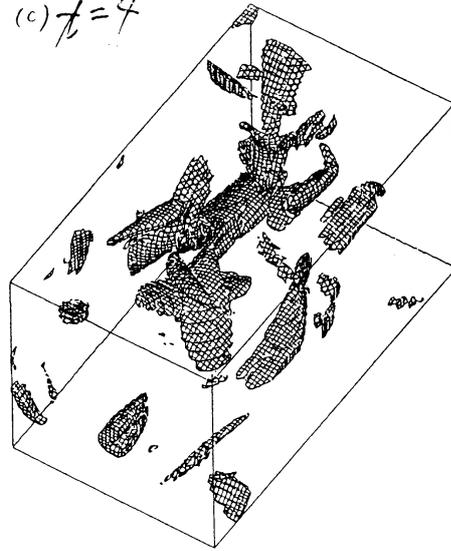


図5 (a) $t=0$

R²の別

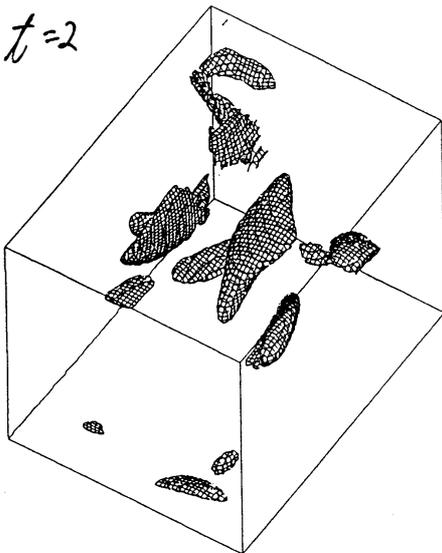


(c) $t=4$



等温度面の時間発展

(b) $t=2$



(d) $t=8$

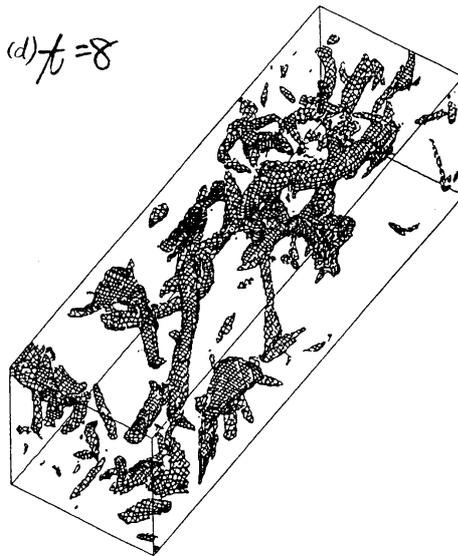
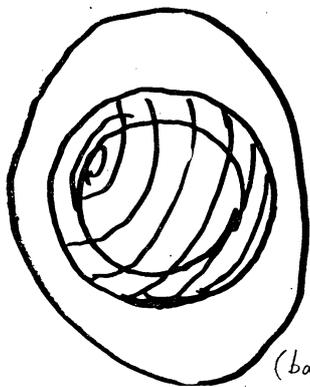
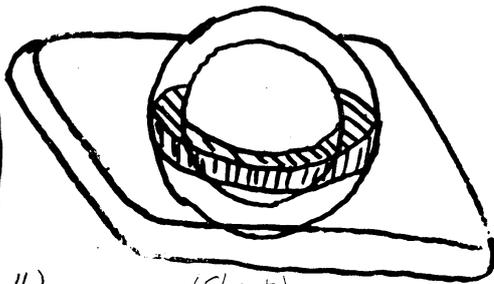


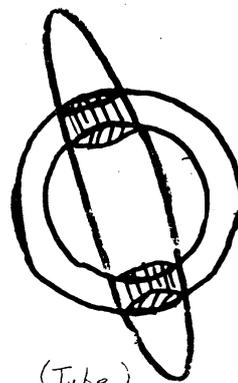
図6. 次元の定義のための概念図



(ball)

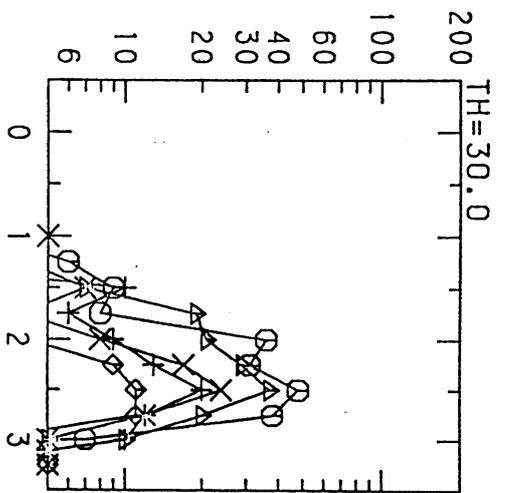
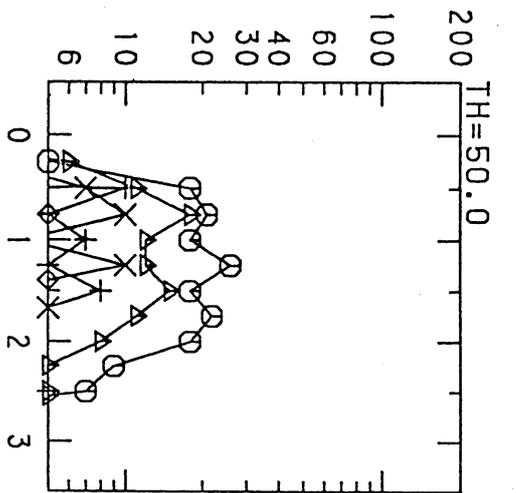
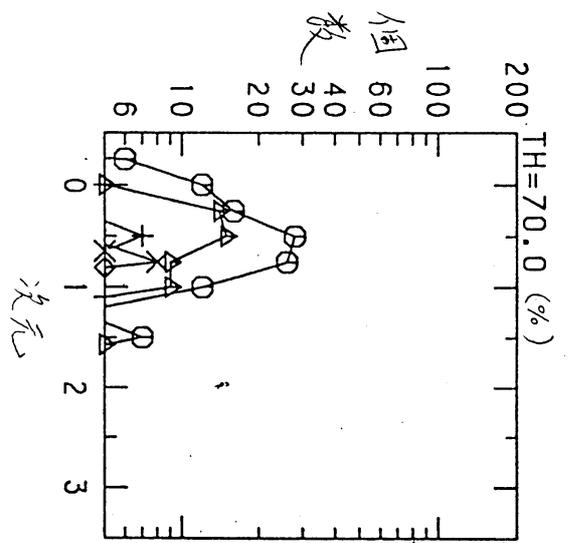


(Sheet)

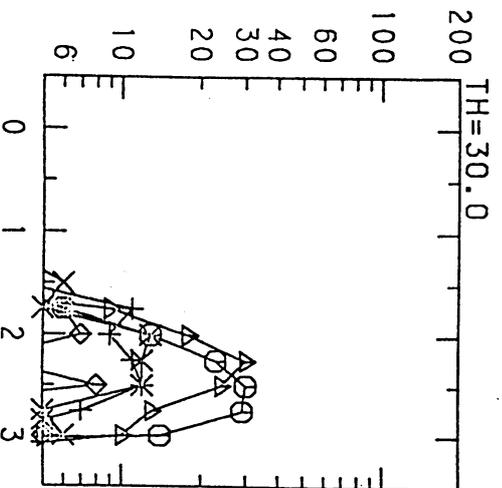
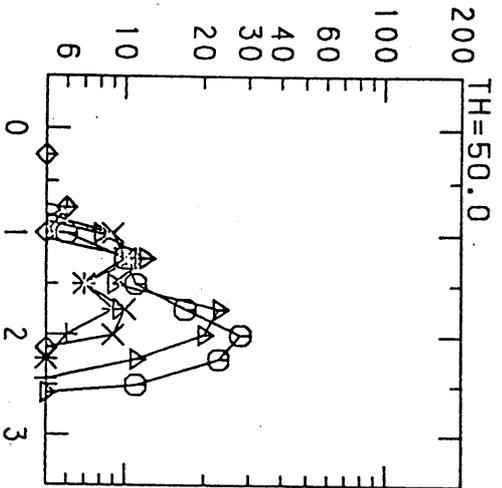
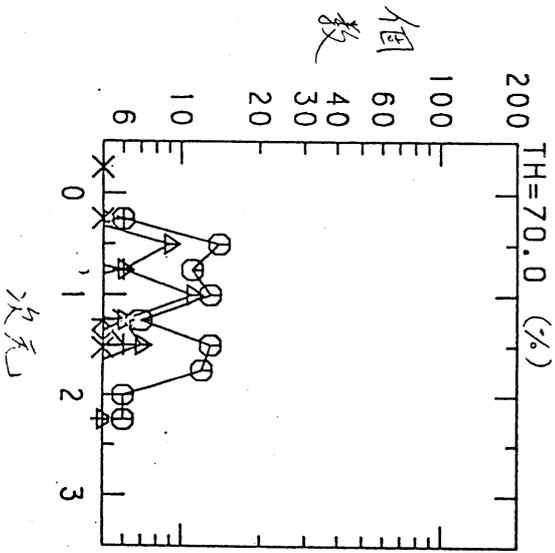


(Tube)

図7 (a) 各次元封印構造の個数分布, R_{62} の例, $\alpha=0.8$ の時.

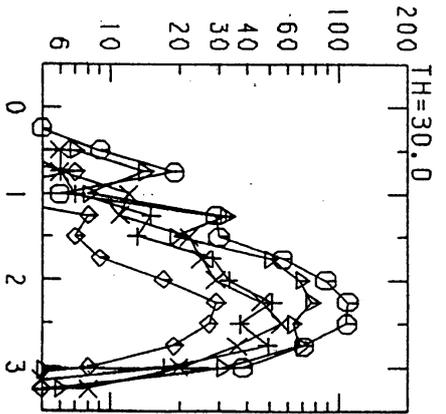
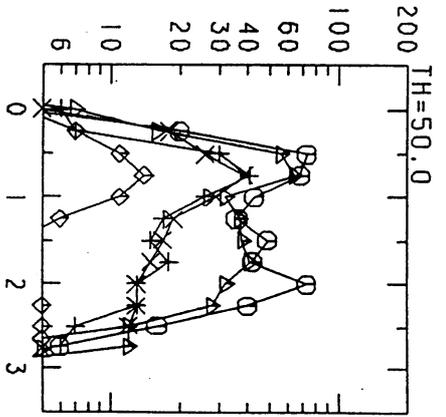
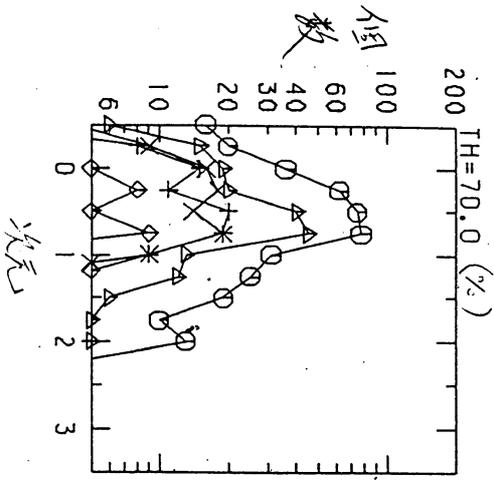


(a) 深度場

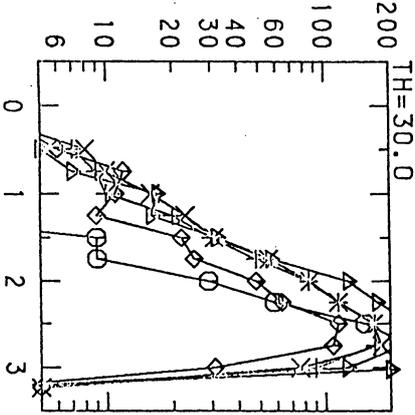
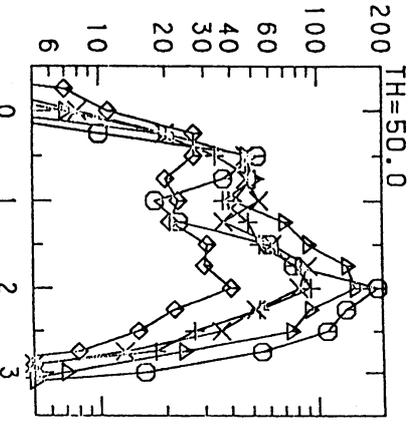
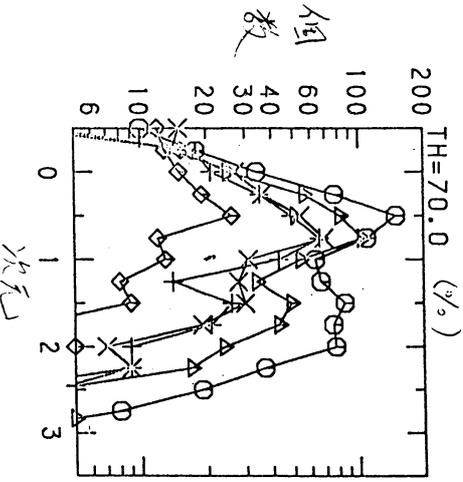


(b) パラメータ場

図7 (b) 平均流のあり場合(上)とない場合(下)



R12の $t=0.8$
温度場



R10の $t=0.8$
温度場

○...1.5, △...2, +...2.5, ×...3, ◆...3.5