

減衰等方性乱流の数値シミュレーション

航技研 山本稀義 (Kiyoshi Yamamoto)

電通大 細川巖 (Iwao Hosokawa)

酒井和彦 (Kazuhiko Sakai)

1. はじめに

計算機の進歩によって流体力学に於ける計算流体力学 (CFD) の役割は益々重要になってきている。これは乱流についても同様であって、従来の実験的研究に加えて、数値シミュレーションは乱流研究の重要な源となっている。計算方法についても従来は乱流モデルを使用した差分法が中心であったが、現在では計算精度の良いスペクトル法による直接数値シミュレーション (DNS) が多くの成果を挙げる様になってきた。これは主として最近の計算機の飛躍的發展によっている。スーパーコンピュータは現在ベクトル計算機から並列計算機へと発展しているが、その結果計算速度も GFLOPS から TFLOPS へと進展しようとしている。航空宇宙技術研究所では昨年新しい並列計算機である数値風洞 (Numerical Wind Tunnel: NWT) を導入したが、その理論的ピーク速度は 236 GFLOPS になっている。ここではこれを用いて行われた減衰一様等方性乱

流の DNS について述べる。

一様等方性乱流の DNS はしばしばその時点の最先端のスーパーコンピュータを用いて挑戦されてきた研究課題である。それらの中で、Kerr (1885)¹⁾ は 128^3 格子点の強制乱流の DNS を行い、テイラーのマイクロスケールレイノルズ数 R_λ が 83 までの乱流速度場を計算した。また、山本と細川 (1988)²⁾ は同じ 128^3 格子点で減衰乱流の DNS を行い、 $R_\lambda \sim 100$ の乱流速度場を得た。一方、Vincent & Meneguzzi (1991)³⁾ は 240^3 格子点の強制乱流の DNS を行い、 $R_\lambda \sim 150$ の結果を得た。さらに、最近 Chen et al (1993)⁴⁾ および Jiménez et al (1993)⁵⁾ 等は 512^3 格子点の DNS を行い、 $R_\lambda \sim 200$ までの乱流速度場を計算した。これらの内で格子点数 128^3 での DNS はベクトル計算機によって行われ、これより大きい格子点数の DNS は並列計算機によって行われた。この様に、数値シミュレーションの主流は今後並列計算機となると考えられる。

2. 数値風洞 (NWT)

NWT は 1.7 GFLOPS のピーク速度を持つベクトル計算機をその要素計算機 (PE) として最大 140 台並列化した並列計算機で、その理論的ピーク速度は 236 GFLOPS となる⁶⁾。しかし、現実の CFD プログラムの計算速度はこれよりはかなり小さく

なる。その原因は現実の計算プログラムでは各PE間のデータ転送が頻繁に必要となるが、これはPE内だけの計算速度に比べてかなり遅いため、PE間のデータ転送の頻度に依存して計算速度は遅くなるためである。また、各PEがベクトル計算機であるので、複雑な計算プログラムについて、ベクトル性能と理想的並列化を同時に達成する事はそれほど容易ではない。

図1に本DNSの計算プログラムによるNWTの性能測定の結果を示す。横軸の N_{PE} はNWTに使用されるPE台数を表し、縦軸はDNSの時間方向の積分において単位時間ステップ進むのに必要なCPU時間(秒)である。図中のいろいろな記号はDNSに使用された格子点数を示す。また、実線は $1/N_{PE}$ の勾配を示し、これはプログラムの並列化が理想的に行われた時の性能曲線と考えられる。それぞれの計算結果は N_{PE} の最大の点を除いてほぼ実線と同じ勾配に並んでいて、この範囲では並列化はほぼ理想的に行われていると考えられる。一方、 N_{PE} の最大の点のデータが直線からずれるのは、PE内の計算量に比べてPE間のデータ転送の時間が無視出来なくなるからである。以下のDNSでは N_{PE} はこの直線の範囲で選ばれる。すなわち、 128^3 のDNSは16台のPEを使用し、 256^3 のDNSは64台のPEを使用して行う。また、 512^3 のDNSは128台のPEで可能となる。

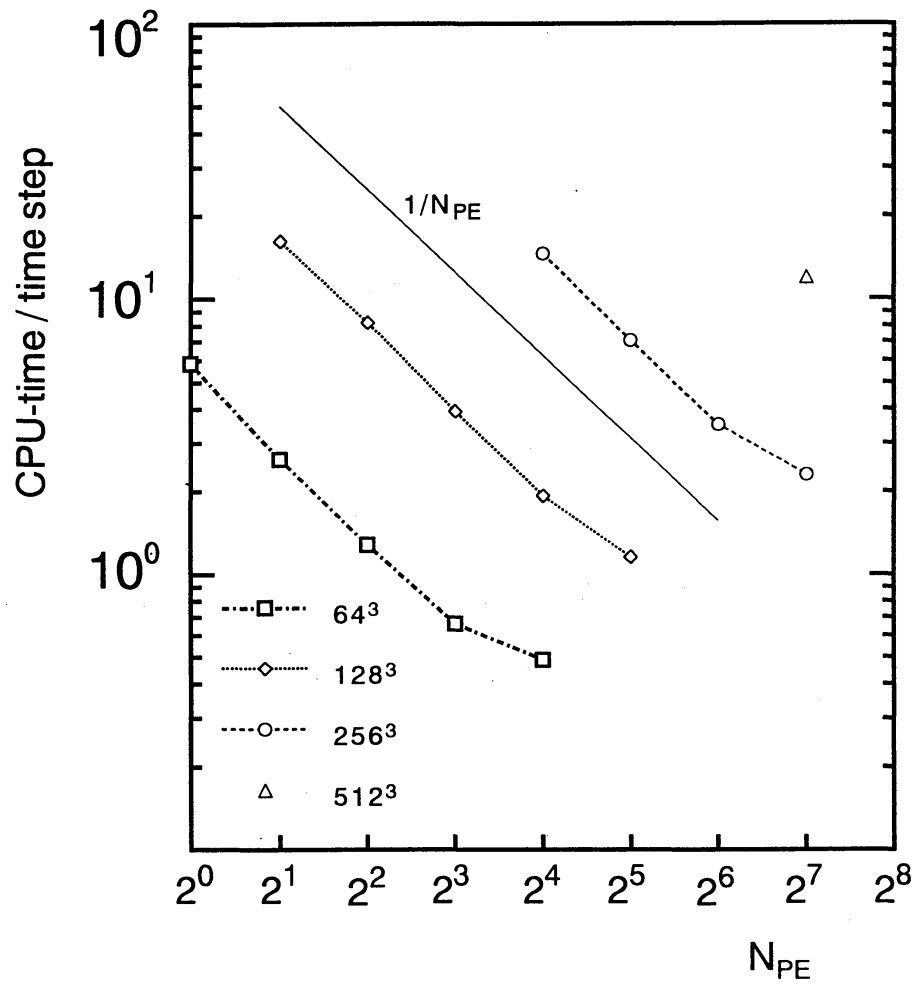


図1 本DNSのプログラムで測定されたNWTの性能
 N_{PE} はNWTに使用されたPE台数を表す。

3. 基礎方程式

流れの周期性を仮定し、速度場 $u(x, t)$ を

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{u}(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (1)$$

とフーリエ級数展開すると、 $u(k)$ の基礎方程式はナビエ・ストークス方程式から

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{k})}{\partial t} = -i \sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{u}(\mathbf{k}') \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') - i k p(\mathbf{k}) - \frac{k^2}{R} \mathbf{u}(\mathbf{k}) \quad (2)$$

とえられる。ここではさらに、受動的スカラーとして温度場 $\theta(x, t)$ を考えるとそのフーリエ成分の方程式は

$$\frac{\partial \theta(\mathbf{k})}{\partial t} = -i \sum_{\mathbf{k}'} \theta(\mathbf{k}') \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') - \frac{k^2}{RP_r} \theta(\mathbf{k}) \quad (3)$$

となる。ここで、 R は初期の流れに基づくレイノルズ数、 Pr はプラントル数である。これらの方程式はフーリエ・スペクトル法で計算されるが、その際 aliasing 誤差を消去するためにはシフト法を使用する¹⁾。また、時間方向の積分には Runge-Kutta-Gill 法が使用される。

ここでは減衰等方性乱流を取り扱うので初期の乱流場、速度と温度の両方、を与える必要がある。これには初期の乱れのスペクトルを

$$E(k) = \frac{16}{3} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} k^4 \exp(-2k^2) \quad (4)$$

と仮定する。これよりレイノルズ数 R は $R = v_0 / k_0 \nu$ と定義される。ここで、 v_0 は $v_0 = \sqrt{2 \int E(k) dk}$ 、 k_0 は初期スペクトル $E(k)$ が最大値を持つ波数（すなわち、 $k_0 = 1$ ）である。(1)式のフーリエ級数展開の数はレイノルズ数 R が 1000 の DNS では 256^3 個（分解能は同じ数の空間格子点の DNS と同等）、2000 の場合には 512^3 （現在実行中であるがここでの発表では除く）で行われた。

4. 計算結果と検討

4.1 エネルギースペクトル

図 2 はエネルギースペクトルの時間的発達の結果を示す。レイノルズ数 R は 1000 である。点線は初期に与えられたエネルギースペクトル、(4)式、を表す。エネルギースペクトルは時間と共に低波数のエネルギーが高波数に流れて、時間と共に発達した乱流スペクトルが形成される。そして、無次元時間 t がほぼ 10 でエネルギースペクトルの高波数領域は最大になり、その後は全領域でほぼ単調に減衰する。そして、この $t=10$ のエネルギースペクトルの中間領域（波数 k が 4 ~ 13 の範囲）で $k^{-5/3}$ 分布、コルモゴロフ・スペクトル、が観測される。しかし、その一致は必ずしも厳密ではない。この不一致はこれまでの DNS でも見られる傾向で⁸⁾、今後の問題

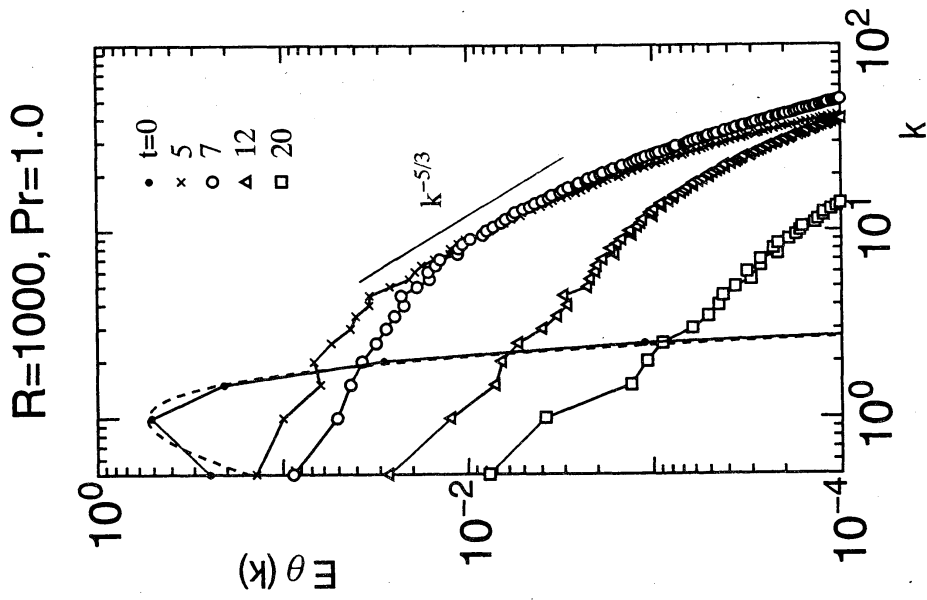


図2 エネルギースペクトルの時間的发展
点線は初期スペクトル(4)を表す。

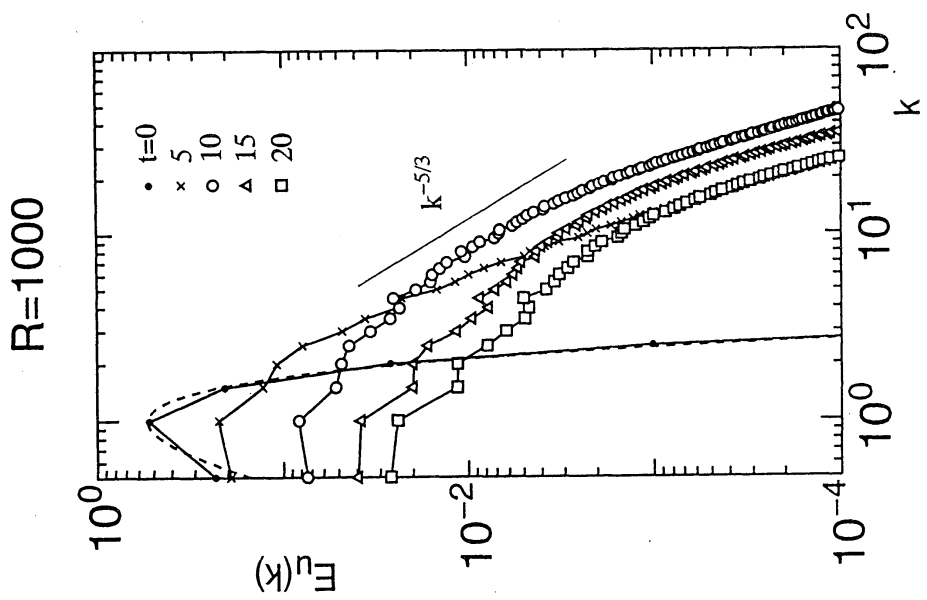


図3 温度の分散スペクトルの時間的发展
点線は初期スペクトル(4)を表す。

である。しかし、この $t=10$ で得られた速度場は発達した乱流の速度場と考えることが出来るので、これを数値解析して乱流のいろいろな力学的性質を調べてみる。

図 3 は温度場の分散のスペクトルの時間的発達の結果を示す。プラントル数は 1 と選んだ。スペクトルの発達の傾向は図 2 のエネルギースペクトルとほぼ同様であるが、その発達の時間スケールはエネルギースペクトルに比べて早く、 $t=7$ で高波数領域の最も発達したスペクトルが得られている。この温度分散スペクトルについては Batchelor⁹⁾ によって慣性領域で同様に $k^{-5/3}$ 分布となることが予測されている。計算結果はこの傾向に近づくがまだ必ずしも明確ではない。

4.2 平均量の時間的発達

図 2、図 3 で示されたように温度場のスペクトルは速度場のスペクトルに比べてその発展が早くなっている。これを定量的に明らかにするために次の様な速度場と温度場の積分スケールを計算してみる。

$$l_u = \frac{3\pi}{4} \frac{\sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{k} |\mathbf{u}(\mathbf{k})|^2}{\sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{u}(\mathbf{k})|^2}$$

$$l_\theta = \frac{3\pi}{4} \frac{\sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{k} |\theta(\mathbf{k})|^2}{\sum_{\mathbf{k}} |\theta(\mathbf{k})|^2}$$

図 4 はこれらの時間的発達の様子を示す。図 2、3 から分かるように時間と共にスペクトルの高波数領域が発達するため、積分スケールは小さくなるが、さらに時間が経つとスペクトルの高波数領域が早く減衰するため積分スケールは再び増大する。図 4 では明らかに l_0 は l_0 より早く変化する結果が得られている。

図 5 はいろいろなレイノルズ数に対するエネルギーの減衰曲線を示す。 $R=1000$ の結果と $R=500$ の結果が交わるのは計算精度の違いによるためと考えられる。今後計算精度の良い結果と比較する必要がある。

図 6 にテイラーのマイクロスケールレイノルズ数 R_λ の時間的变化を示す。 R_λ は時間と共に小さくなるが、これはエネルギーの減衰とエネルギー減衰率の増大による。 $R=1000$ の場合 $t=10$ では $R_\lambda=102$ が得られている。

図 7 は速度の縦微分の歪度因子 $\left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 \right\rangle / \left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\rangle^{3/2}$ の時間的発達の結果を示す。初期速度は正規分布で与えられたので、歪度因子は零から出発するが時間と共に $-0.4 \sim -0.5$ の間の値に漸近する。

4.3 確率分布関数

乱流の力学を記述する最も基本的な物理量は速度の分布関数である。 $t=10$ で得られた速度場と温度場のデータからいろ

$R=1000, Pr=1.0$

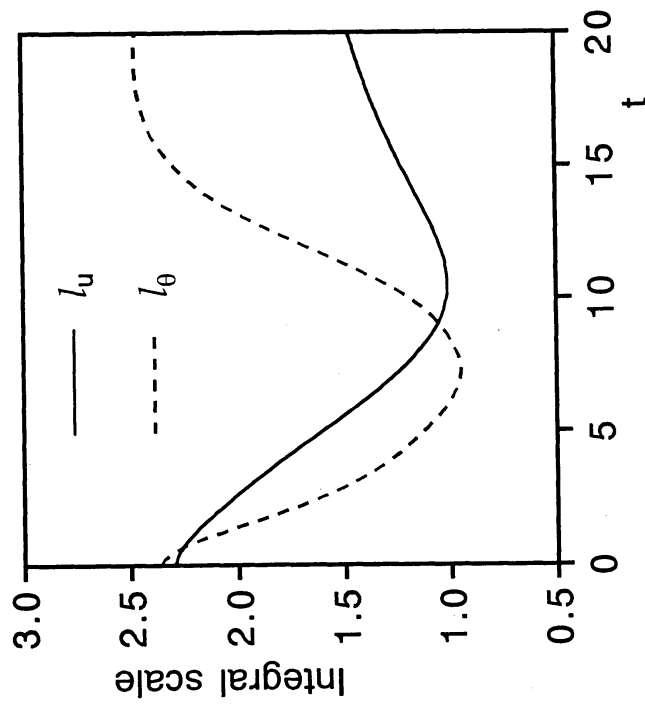


図4 速度場と温度場の積分スケールの時間的発達

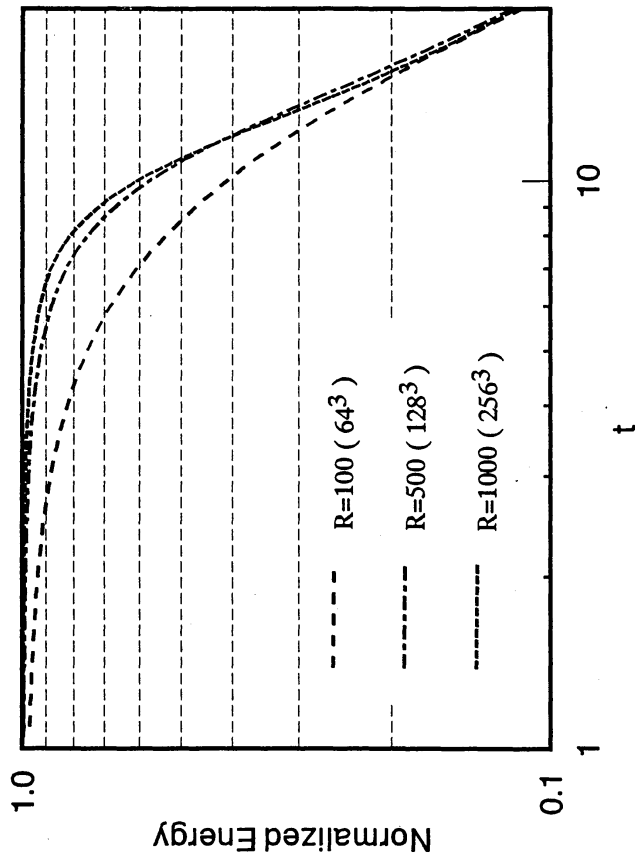


図5 速度場のエネルギーの減衰

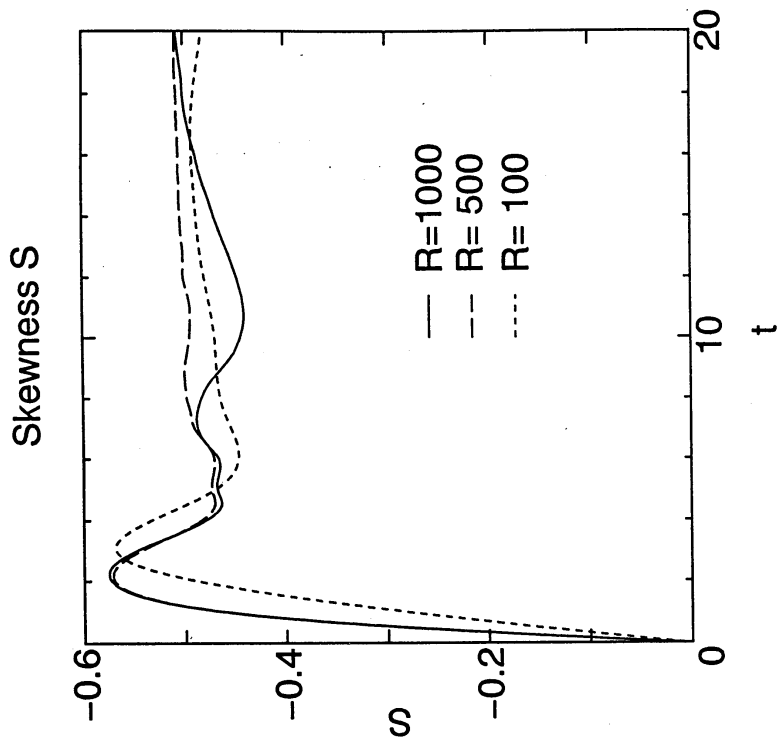


図7 速度の縦微分 $\partial u / \partial x$ の歪度因子

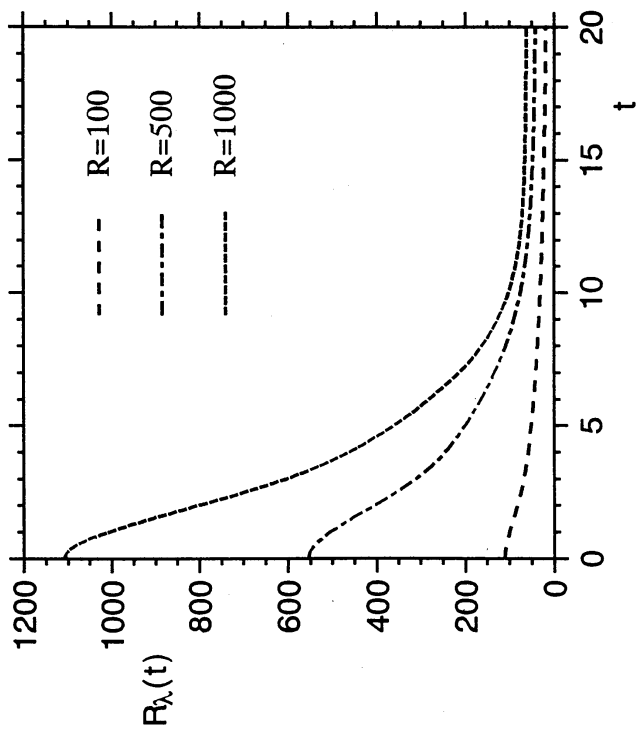


図6 テイラーのマイクロスケール・レイノルズ数

いろな力学量の確率分布を調べてみる。

図 8 は速度 u の確率分布の計算結果を示す。実線はガウス分布を示す。計算結果はガウス分布と良く一致す。これは理論的にも予測されている結果で、また実験的にも検証されている¹⁰⁾。

一方、図 9 は速度の縦微分 $\partial u/\partial x$ の確率分布の計算結果を示す。計算結果はガウス分布とは全く異なり指数分布をしている。この様な指数分布は最近 DNSによって検出されたもので^{11)、12)、13)}、乱流ではしばしば現れる分布であることが分かってきた。図 8 の結果の一つの重要な特徴は分布が横軸の原点について非対称で、負の領域の分布が正の領域より大きくなっていることである。この結果として、図 7 の負の歪度因子が発生する結果が得られている。他方、図 10 は速度の横微分 $\partial u/\partial y$ の計算結果を示す。この場合も分布は指数関数を示すが、分布は原点について対称である。また、温度場の確率分布も計算されたが、その結果もほぼガウス分布となるが結果はここでは省略する。

4.4 乱流の微細構造

乱流場の変動のデータを時空間で得られるのが DNSの大きな特徴である。これを数値解析することによって、乱流の時空間の微細構造を調べることが出来る。

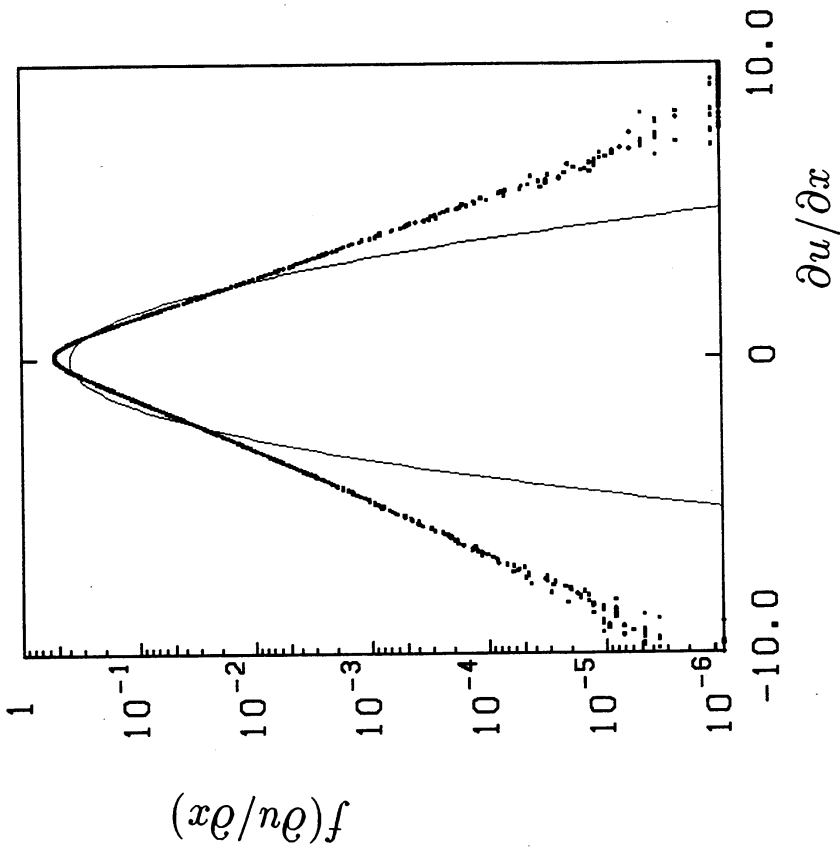


図 8 速度の確率分布関数

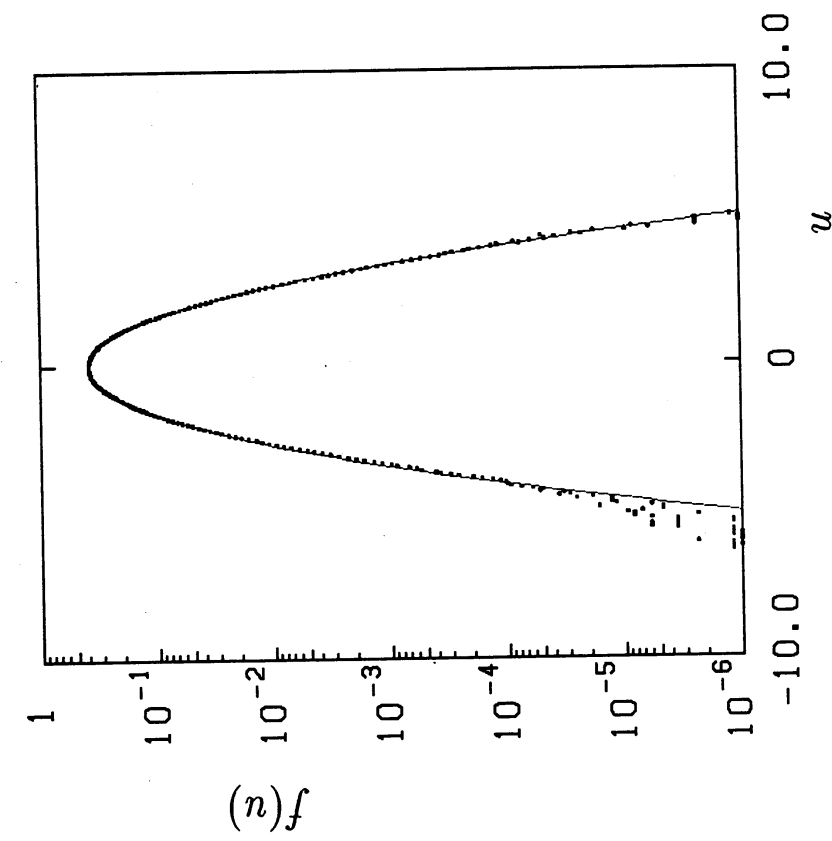


図 9 速度の縦微分 $\partial u / \partial x$ の確率分布関数

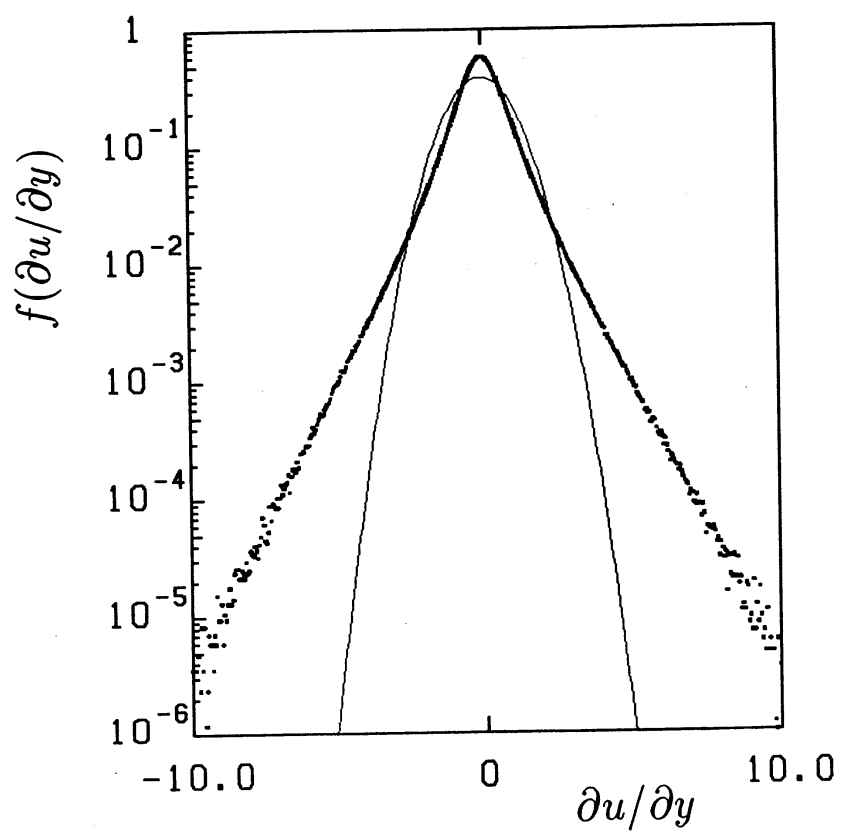


図 1 0 速度の横微分 $\partial u/\partial y$ の確率分布関数

図11は高渦度領域の空間的集中を示す計算結果で、等高線は 3.5ω のレベルで描いてある。ここで ω は渦度の自乗平均である。図から渦度は細長い管状の領域に集中し、その内部が渦度の高い部分である。この様な高渦度の管状の領域はしばしばワーム(worm)と呼ばれている^{2), 5)}。ワームが渦管であることを確認するために渦管内の格子点で渦度ベクトルと速度ベクトルを描いた結果を図12に示す。(原図では渦度ベクトルは黒い矢印、速度ベクトルは赤い矢印で区別して示されている。)その結果、渦度ベクトルは比較的組織的に並び、渦管を形成するが、速度ベクトルはその方向がかなり偶然的事であることが示されている。この様なワームの形成の力学的機構はまだ正確には分かっていない⁵⁾。また、渦度の集中する形状に関してはこれまで理論的に渦管¹⁴⁾およびシート¹⁵⁾が予測されているが、図11の結果は前者を支持する。

他方、図13は温度勾配 H の空間的集中の結果を示す。ここで、 $H = \left(\frac{\partial\theta}{\partial x_i} \frac{\partial\theta}{\partial x_i} \right)^{1/2}$ である。図から分かることは H はシート状に集中することである。この様な渦度場と温度勾配の渦管およびシート状集中の力学機構はまだ必ずしも明確ではない。

5. 結び

航空宇宙技術研究所に導入された並列計算機、数値風洞

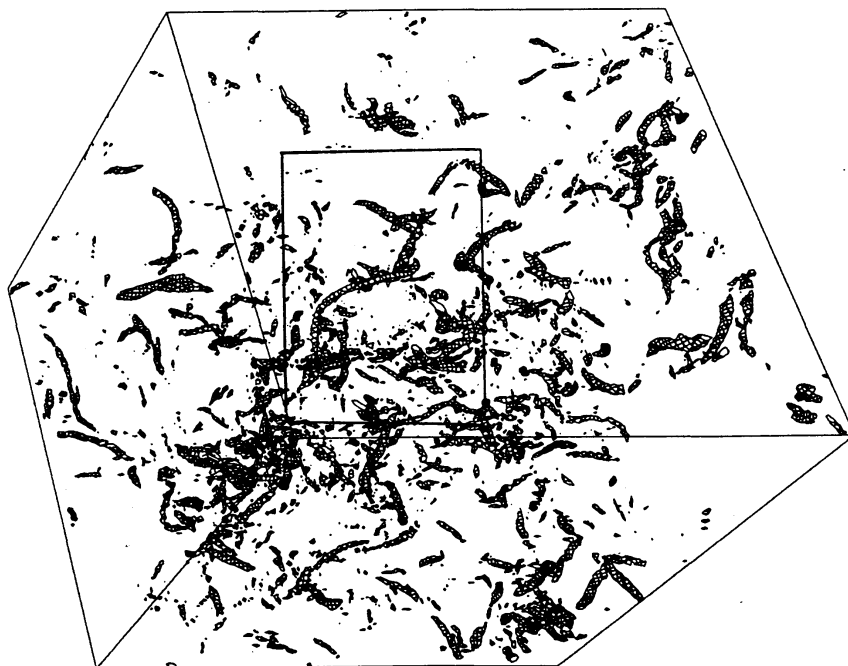


図 1.1 高渦度領域が空間的に集中する形状
等高線は 3.5ω の高さを示す。

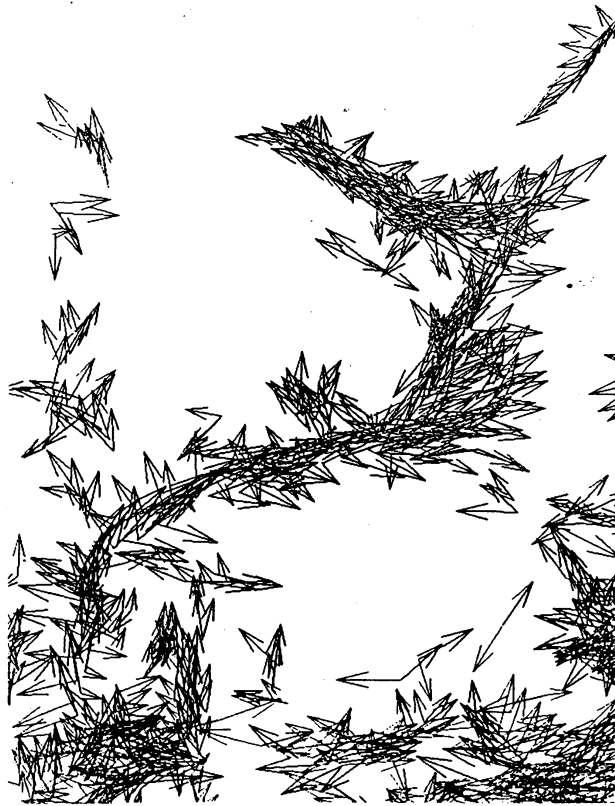


図 1.2 図 1.1 のなかの四角で囲まれた領域に
含まれる高渦度領域(渦管)中の格子点
で描かれた渦度ベクトルと速度ベクトル

(NWT)、を応用して減衰等方性乱流の 256^3 のDNSを行い、乱流のエネルギースペクトルや積分スケール等の時間的发展を調べた。また、 $t=10$ で得られた発達した乱流場を数値解析して、いろいろな乱流場の確率分布を調べた。さらに、渦度場や温度勾配の空間的集中領域を数値解析し、それぞれが管状およびシート状に集中する結果を得た。現在、さらに詳細な 512^3 のDNSを実行中である。

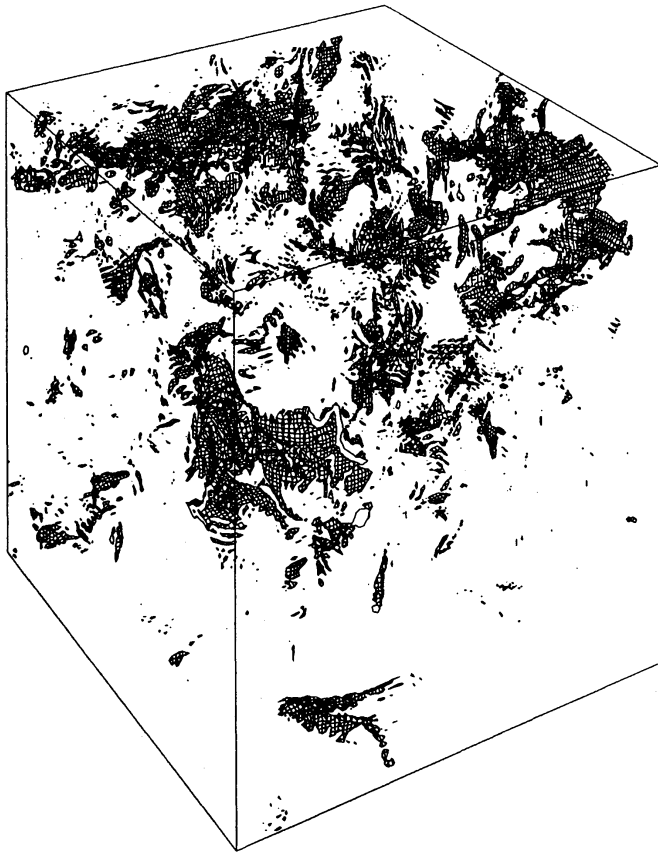


図 1 3 温度場の勾配の空間的集中領域
等高線は $3.0H$ の高さを示す。

参 考 文 献

- 1) R. M. Ker: J. Fluid Mech., 153 (1985) 31.
- 2) K. Yamamoto and I Hosokawa: J. Phys. Soc. Japan, 57 (1988) 1532.
- 3) A. Vincent and M. Meneguzzi: J. Fluid Mech., 225 (1991) 1.
- 4) S. Chen et al: Phys. Fluids, A 5 (1993) 458.
- 5) J. Jiménez et al: J. Fluid Mech., 255 (1993) 65.
- 6) T. Iwamiya, M. Fukuda, T. Nakamura and M. Yoshida: to appear in Proc. Parallel CFD' 93.
- 7) C. Canuto et al: Spectral Methods in Fluid Dynamics, 1988, Springer-Verlag, New York.
- 8) Z-S. She et al: Phys. Rev. Letts., 70 (1993) 3251.
- 9) G. K. Batchelor: J. Fluid Mech., 5 (1956) 113.
- 10) A. S. Monin and A. M. Yaglom: Statistical Fluid Mechanics, Vol. 1, 2, 1975, MIT Press
Cambridge.
- 11) Z-S. She et al: J. Sci. Comput. 3 (1988) 497.
- 12) I. Hosokawa and K. Yamamoto: J. Phys. Soc. Japan, 58 (1989) 20.
- 13) K. Yamamoto and T. Kambe: Fluid Dynamics Research, 8 (1991) 65.
- 14) H. Tennekes: Phys. Fluids, 11 (1968) 669.
- 15) R. Betchov: J. Fluid Mech., 1 (1956) 497.