数理解析研究所講究録
893 巻 1995 年 141-149

Circle packing immersions form regulary exhaustible surfaces

東工大　理　田辺正晴　(Masaharu Tanabe)

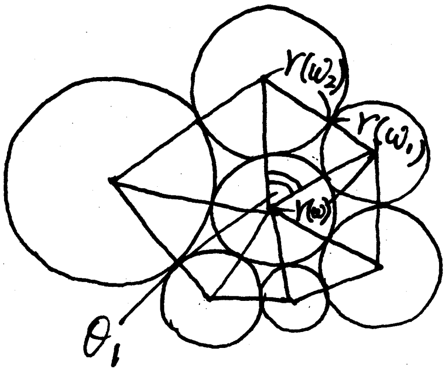
K. Callahan, B. Rodin "Circle packing immersions form regulary exhaustible surfaces" Complex Variables 1993 vol. 21, 171-177 より

regular hexagonal circle packing からの circle packing immersion により形成される multisheeted surface が. regularly exhaustible であり. Ahlfors の被覆面の理論が適用できることを示す。

定義及び定理

hexagonal lattice (HL) : $HL = \{m + ne^{i\pi/3}; m, n \in \mathbb{Z}\}$。原点 0 は of generation 0. 0 のまわりの 6 つの点は of generation 1. …として generation を定義する。$n > 0$ に対して、$6n$ コの of generation n となる点が存在する。半径 1/2 の円で HL の各点を中心に $\mathbb{C}$ - 平面をうめれば regular hexagonal circle packing of the plane (HCP) が得られる.

radius function : HL から $\mathbb{R}^+$ への function を radius function とよぶ。$r : HL \to \mathbb{R}^+$; radius function angle sum of r at $w \in HL$を以下のように定義する。$w_1, \cdots, w_6$をwのneighboursとする。（1, …, 6は反時計回りにとる。）w, w_i, w_{i+1} ($i=1, \cdots, 6$, $w_7 \equiv w_1$)に対して、半径$r(w)$, $r(w_i)$, $r(w_{i+1})$なる3つの互いに接する円を考える。θ_iは3つの円の中心を頂点とする、三角形の半径$r(w)$の円に属する頂点の角度とする。



$\theta_1 + \cdots + \theta_6$をangle sum of r at $w \in HL$とよぶ。

radius function of a circle packing immersion：angle sum of $r : HL \to \mathbb{R}^+$が$\forall w \in HL$で2πのときrをこうよぶ。

radius function rから、multisheeted surface Fを構成できる。rに従って円を平面におくことにより、互いに接し合う3つの円の中心を頂点とする三角形の集合が得られる。これらの三角形は、自明な辺の同一視を除いて、disjointであるとして、三角形をはり合わせてゆくことにより、Fが得られる。Fをsurface formed by the circle packing immersion r とよぶ。

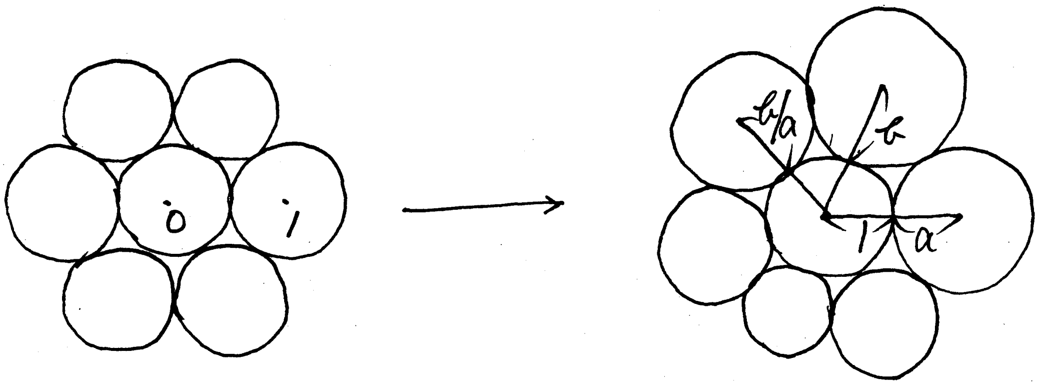
Theorem 1. F; surface formed by a circle packing immersion. F は regularly exhaustible. F_n を generation $\leq n$ の円とそのすき間からなる F の subset とし、$A(n)$, $L(n)$ を F_n のそれぞれ面積, boundary の長さ (in spherical metric) とすると、

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{L(n)}{A(n)} = 0 .$$

Theorem 2. F の finite な除外値は高々1つ。

Peter Doyle による circle packing immersion の例
$r_c(\omega) = |e^{c\omega}|$ for $\forall \omega \in HL$, where $c \in \mathbb{C}$. $\rho_0 = r_c(\omega_0)$ とすると、ω_0 の6つの neighbours の r_c の値は反時計まわりに、

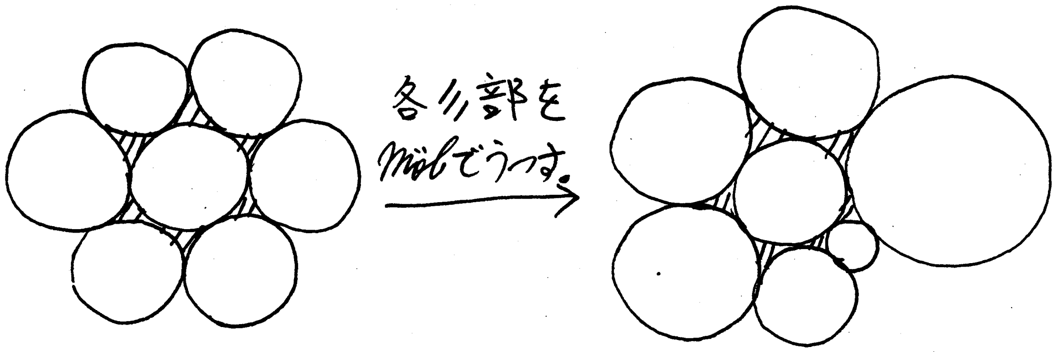
$a\rho_0$, $b\rho_0$, $(b/a)\rho_0$, $(1/a)\rho_0$, $(1/b)\rho_0$, $(a/b)\rho_0$
($a = |e^c|$, $b = |e^{c\alpha}|$, $\alpha = e^{i\pi/3}$)。このとき中心の円での angle sum は 2π になっている。特に $c = 0.1 - 0.4i$ のときは、$\omega_0 = 0$ とすると、$\rho_0 = 1 = r_c(0)$, $a = |e^{0.1-0.4i}| \fallingdotseq 1.1$
$b = |e^{c\,i\pi/3}| \fallingdotseq 1.5$, $b/a \fallingdotseq 1.3$, $1/a \fallingdotseq 0.99$, $1/b \fallingdotseq 0.67$, $a/b \fallingdotseq 0.74$.



Open Question: $r: HL \to \mathbb{R}^+$; radius function for a circle packing immersion. となり合う任意の$\omega, \omega' \in HL$に関して、$0<\delta<r(\omega)/r(\omega')<M<\infty$なる定数$\delta$, Mが存在するか?

このquestionが肯定的に解決されれば、$f: \mathbb{C} \to F$はquasiregularとなり、multisheeted image Fはregularly exhaustibleとなる。

$f: \mathbb{C} \to F$を明確に構成したければ、以下のようにしてもよい。HCPの各circular triangle intersticeからrにより得られるcircular triangle intersticeへのMöbius transformationを考える。



このとき．中心の円周上で変換はC-bi-Lipschitzになっていて($C\in\mathbb{R}^+$)円の内部へのC-q.c. extension可。こうして．continuous map $f:\mathbb{C}\to F$が得られる。

Proof of regularly exhaustibility

$f:\mathbb{C}\to F$ given．F_n; Fのsubsetでgeneration $\leq n$の円とそれらのすき間からなる。$\{F_n\}$は$F\to\hat{\mathbb{C}}$のexhaustion

$A(n)$，$L(n)$はそれぞれF_nの面積，boundaryの長さ(in spherical metric)とする。C_{nj} $(j=1,\cdots,6n)$; HCPにおけるgeneration $n\geq 1$の$6n$コの円とする。$\hat{r}_{nj}$; $f(C_{nj})$の半径の長さ．$P(n)=\sum_{j=1}^{6n}2\hat{r}_{nj}$ とdefine。このとき半径$\hat{r}_{nj}$のdiskの円周の長さは$2\pi\sin\hat{r}_{nj}$で．

$$L(n)\leq\sum_{j=1}^{6n}2\pi\sin\hat{r}_{nj}\leq 2\pi\sum_{j=1}^{6n}\hat{r}_{nj}=\pi P(n)\cdots(1)$$

$\hat{a}_{nj}=2\pi(1-\cos\hat{r}_{nj})$; $f(C_{nj})$の面積

$$4t^2\leq 2\pi^2(1-\cos t)\qquad \text{for } 0\leq t\leq\pi$$

だから．

$$\hat{r}_{nj}^2\leq\frac{\pi}{4}\hat{a}_{nj}\qquad(2)$$

$\hat{\alpha}_n=\sum_{j=1}^{6n}\hat{a}_{nj}$ とおくと．

$$\hat{\alpha}_n<A(n)-A(n-1)\qquad(3)$$

Schwarz's ineq．より．$\{\sum_{j=1}^{6n}\hat{r}_{nj}\}^2\leq 6n\sum_{j=1}^{6n}\hat{r}_{nj}^2$ だから．

$$P^2(n)=\{\sum_{j=1}^{6n}2\hat{r}_{nj}\}^2\leq 4\cdot 6n\sum\hat{r}_{nj}^2\underset{(2)}{\leq}6\pi n\hat{\alpha}_n\ (4)$$

(4) から $\sum_n (\alpha_n / P^2(n))$ は発散することがわかる。

$\{n \geq 1;\ P(n) < A^{3/4}(n)\}$ は無限コの元を含む。それは、

$\mathcal{N} = \{n \geq 1;\ P(n) \geq A^{3/4}(n)\}$ とおけば、

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{\alpha_n}{P^2(n)} \leq \sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{A(n) - A(n-1)}{A^{3/2}(n)} \leq \int_{A(0)}^{\infty} \frac{dt}{t^{3/2}} < \infty$$

であり、$\sum_n (\alpha_n / P^2(n))$ が発散するためには、$\{n \geq 1;\ P(n) < A^{3/4}(n)\}$ が ∞ コの元をもたねばならぬからである。

$\{n_i\} = \{n \geq 1;\ P(n) < A^{3/4}(n)\}$, $n_i \to \infty$ としよう。

$A(n) \to \infty$, $A(n) \to M < \infty$ as $n \to \infty$ の2つに場合わけする。

$A(n) \to \infty$ のとき： (1) より

$$\frac{L(n_i)}{A(n_i)} \leq \frac{\pi P(n_i)}{A(n_i)} < \frac{\pi A^{3/4}(n_i)}{A(n_i)} \to 0$$

だから、F は *regularly exhaustible*。

$A(n) \to M < \infty$ のとき： (4) より

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{P^2(n)}{6\pi n} \leq \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \leq A(N) \leq M.$$

だから $\inf \{P(n);\ 1 \leq n\} = 0$。（$= \varepsilon > 0$ ならば、左辺 $\geq (\varepsilon^2/6\pi) \sum 1/n$ *contradiction*。）

(1) より $\inf \{L(n);\ 1 \leq n < \infty\} = 0$。$L(n_i) \to 0$ as $n_i \to \infty$ なるよう $\{n_i\}$ をとれば、

$$\lim \frac{L(n_i)}{A(n_i)} = \frac{0}{M} = 0 .$$

$\{F_{n_i}\}$によって、Fはregularly exhaustible。□

Thm.2はThm.1よりただちに得られる。

Ahlforsの被覆面の理論について

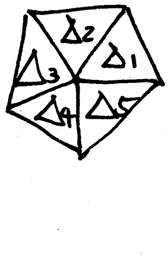
(遠木, 幾何学的函数論 共立出版から)

集合Δが$\mathbb{C}$－平面上の閉三角形にhomeo.であるとき、Δを三角形とよぶ。集合Fが次の条件をみたすような三角形の集合(Δ)に分割されるとき、Fは三角形分割可能であるといい、Fを面(surface)という。

i) (Δ)に属する三角形の各辺はちょうど二つの三角形に共通な辺となる。

ii) Δ, Δ′を(Δ)の任意の三角形とするとき、Δ, Δ′は、となり合った三角形の系列で連結できる。

iii) (Δ)の任意の三角形の一つの頂点を共有する三角形は有限コで、これに適当な順序をつけて、$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$であらわすとき、$\Delta_i$と$\Delta_{i+1}$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$及びΔ_nとΔ_1とがとなり合っている。



Fが有限コの三角形からなるとき、Fを閉じた面(closed surface)と言い、無限コの三角形からなるとき、開いた面(open surface)と言う。

集合Fが有限コの三角形に分割できて、境界辺及び境界辺上にある頂点を除いてi)～iii)を満足するようにできるならば、Fを有限面と言う。ただし境界辺とは、ただ1つの三角形に属している辺のことである。

三角形分割された二つの有限面F_0及びFにおいて、次の条件1),2)をみたすFからF_0への写像が与えられているとき、FをF_0の被覆面(covering surface)といい、F_0をFの基礎面(basic surface)という。

1) Fの各三角形ΔにそれぞれF_0の1つの三角形Δ_0が位相的に(homeo.)対応している。

2) Fのとなり合った三角形Δ, Δ'の共通辺には、Δ, Δ'に対応するF_0の三角形Δ_0, Δ_0'の共通辺が対応する。

開いた被覆面: F_1, $\cdots F_\nu$, $\cdots$をそれぞれ基礎面F_0の有限な被覆面の系列とし、かつ$F_\nu \subsetneq F_{\nu+1}$ $(\nu=1,2,\cdots)$とするとき$F^* = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} F_\nu$とすれば、$F^*$から$F_0$への写像$f^*$も定まる。$F^*$を$F_0$の開いた被覆面といい、$\{F_\nu\}$を$F^*$のexhaustionという。

以下、基礎面はリーマン球$\hat{\mathbb{C}}$、計量はspherical metricとする。($\hat{\mathbb{C}}$をunit sphere $S^2: \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ in $\mathbb{R}^3$ と

同一視し．$ds^2=d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2$ を metric とする。）

F_1，…，F_ν，…は $\hat{\mathbb{C}}$ の有限な被覆面，$F_\nu \subset F_{\nu+1}$ とする。このとき各 F_ν に $\hat{\mathbb{C}}$ の spherical metric を lift することにより metric を導入する。$\hat{\mathbb{C}}$ の全面積は 4π である。F_ν の全面積を A_ν であらわす。$S_\nu=A_\nu/4\pi$ を F_ν の平均枚数とよぶ。F_ν の相対境界の長さを L_ν であらわす。ある開いた被覆面 F^* において，次をみたすような exhaustion $\{F_\nu\}$ が存在するとき，F^* は regularly exhaustible であるという。

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{L_\nu}{S_\nu}=0.$$

特に exhaustion に属する各面が単連結である場合については，F^* の性質について多くの結果が得られている。
（Nevanlinna, Analytic Functions, Springer-Verlag 等参照。）