数理解析研究所講究録
893巻 1995年 128-140

Convergence of circle packing of finie valence to Riemann mapping

京大 理　後藤泰宏
(Gotoh Yasuhiro)

本論文の目標

regular hexagonal packing に対する結果

$f_\varepsilon \rightrightarrows f$ (loc. unif.) …… Rodin-Sullivan

$f_{\varepsilon z} \rightrightarrows 0$ (〃)

$f_{\varepsilon z} \rightrightarrows f'$ (〃) } Rodin 及び He

を finite valenced packing に対しても示すこと。

証明の方針は regular hexagonal packing の場合と同じであり、regular hexagonal packing に対する証明の紹介は別ページにあるはずなので ここでは idea 上の相異点（次の①, ②）についてのみ紹介する。証明の流れは §1, §2 で紹介する。

① Length-Area-Isoperimetric Ineq. のかわりに（通常の extremal length に関する）Length-Area Method を利用. (§3)

② Schwarz lemma のかわりに Schwarz Pick lemma を利用 (§4)

Schwarz Pick lemma は Schwarz lemma よりはるかに強力であり、§4では Schwarz Pick lemma 及びそれを導くのに用いた Perron's Method について紹介する。

§1. Regular hexagonal packing における $f_\varepsilon \rightrightarrows f$, $f_{\varepsilon z} \rightrightarrows f'$, $f_{\varepsilon \bar{z}} \rightrightarrows 0$ の証明の復習

記号　P_ε ; 有界単連結領域 Ω 上の、半径 ε の円より成る regular hexagonal packing.

P'_ε ; P_ε に対応する $D = \{|z|<1\}$ 上の (normalized) Andreev packing.

Ω_ε ; P_ε に対応する triangulation の support.

Ω'_ε ; P'_ε 〃

$$S_n = \left(\sup \frac{\mathrm{rad}\, c_j}{\mathrm{rad}\, c_i}\right) - 1,$$

ここで sup は与えられた円 C を中心とする n-generation となっているような任意の hexagonal packing, 及び C と C に接する円 (計7コ) の中の任意の2円の組 (c_i, c_j) について取る。

基本評価

$r_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}^+$ を「$P_\varepsilon \ni C$ の中心 $\longmapsto \dfrac{\mathrm{rad}\, c'}{\mathrm{rad}\, c}$」の素直な拡張とするとき.

$$|f_{\varepsilon z}| = r_\varepsilon \cdot (1 + O(S_N))$$
$$|f_{\varepsilon \bar{z}}| = r_\varepsilon \cdot O(\sqrt{S_N})$$
$$|\mu_{f_\varepsilon}| = O(\sqrt{S_N})$$

$$\left(\Omega \text{ の各 cpt set } K \text{ 上 } \quad N = \left[\frac{d(K, \partial\Omega)}{2\varepsilon} \right] \right)$$

Rodin-Sullivan による $f_\varepsilon \rightrightarrows f$ (loc. unif) の証明

(・Ring lemma
・Klein 群論など)

$\Downarrow$

(infinite hexagonal packing の一意性)

$\Downarrow$

Length-Area Ineq

$\Downarrow$

(P'_ε の border circle の半径 $< C\cdot\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \to 0$)

$$S_n \to 0 \xRightarrow{\text{基本評価}} \underbrace{\mu_{f_\varepsilon} \rightrightarrows 0 \qquad\qquad}_{f_\varepsilon \rightrightarrows f}$$

Rodin 及び He による $f_{\varepsilon z} \rightrightarrows f'$, $f_{\varepsilon \bar z} \rightrightarrows 0$ (loc. unif.) の証明

Schwarz lemma

$\Downarrow$

r_ε : loc unif bdd

$\Downarrow$ ($S_n \to 0$ 基本評価)

$f_{\varepsilon \bar z} \rightrightarrows 0$

$\Downarrow$ (Fefferman-Stein)

$f_{\varepsilon z} \to f$ in BMO

(Length-Area-Isoperimetric Ineq)

$\Downarrow$

(P'_ε の border circle の半径 $< C\cdot\varepsilon^\alpha$)

$\Downarrow$ (Riemann map, q.c. map の distortion estimate)

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c} \|f_\varepsilon - f\|_{K,\infty} \leq C\,(S_N+\varepsilon)^\alpha \\ N = \left[\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\right] \end{array} \right) . \qquad S_n = O\left(\frac{1}{n}\right)}_{\|f_\varepsilon - f\|_{K,\infty} \leq C\cdot\varepsilon^\alpha}$$

$$\underbrace{f_{\varepsilon z} \to f \text{ in BMO} \qquad \|f_\varepsilon - f\|_{K,\infty} \leq C\cdot\varepsilon^\alpha}_{f_{\varepsilon z} \rightrightarrows f'}$$

○ $S_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ は He, 他は Rudin.

§2. Finite valenced packing への一般化

Packing P_ε の仮定

1) P_ε の valence $\le k_0$ （各 $c \in P_\varepsilon$ が，P_ε の高々 k_0 コの円としか接しないということ.）

2) P_ε の circle の半径 $\le \varepsilon$

3) $\sup\limits_{z \in \partial\Omega_\varepsilon} d(z, \partial\Omega) \le \varepsilon$

記号

P_ε', Ω_ε, Ω_ε' f_ε, r_ε は先と同様に定める。

$$S_n = \left(\sup \frac{\mathrm{rad}\, c_j' / \mathrm{rad}\, c_i'}{\mathrm{rad}\, c_j / \mathrm{rad}\, c_i} \right) - 1$$

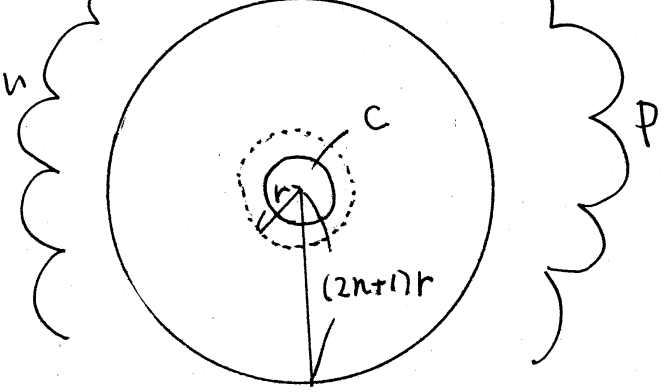
ここで sup は次の条件をみたす Packing P と circle $c \in P$ の組（P, c）及び，c と c に接する円（高々 k_0+1 コ）の中の任意の2円の組（c_i, c_j）について取る。

1) P の valence $\le k_0$

2) P の circle の半径 $\le r$

3) （c と同心，半径 $(2n+1)r$ の円板）$\subset$（P の support）

P_ε の circle の半径比を cpt set 上一様に評価することはもはやできないが Ring lemma より f_ε は $K = K(k_0)$ − q.c map であり q.c. map の理論が適用できる。



基本評価

$$|f_{\varepsilon z}| = r_\varepsilon (1 + O(S_N))$$

$$|f_{\varepsilon \bar z}| = r_\varepsilon \cdot O(\sqrt{S_N})$$

$$|\mu_{f_\varepsilon}| = O(\sqrt{S_N})$$

(Ω の各 cpt set K 上で $N = \left[\dfrac{d(K, \partial\Omega)}{4\varepsilon} \right]$)

(注) $|f_{\varepsilon z}|$ の評価には $S_n \to 0$ (後出)を用いた。

$f_\varepsilon \rightrightarrows f$ (loc. unif) の証明

$\boxed{S_n = O(\frac{1}{n})}$

基本評価 $\Downarrow$

$\mu_{f_\varepsilon} \rightrightarrows 0$

$\boxed{P_\varepsilon' \text{ の border circle の半径 } < C\cdot\varepsilon^\alpha \to 0}$

$f_\varepsilon \rightrightarrows f$

$f_{\varepsilon z} \rightrightarrows f'$, $f_{\varepsilon \bar z} \rightrightarrows 0$ (loc. unif.) の証明

$\boxed{\text{Schwarz-Pick lemma}}$

$\Downarrow$

r_ε : loc. unif bdd

($S_n \to 0$ 基本評価) $\Downarrow$

$f_{\varepsilon \bar z} \rightrightarrows 0$

Fefferman-Stein $\Downarrow$

$f_{\varepsilon z} \to f'$ in BMO

$\boxed{P_\varepsilon' \text{ の border circle の半径 } < C\cdot\varepsilon^\alpha \to 0}$

(Riemann map, q.c. map の distortion estimate) $\Downarrow$

$\left(\|f_\varepsilon - f\|_{K,\infty} \le C(S_N + \varepsilon)^\alpha, \quad N = \left[\frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}}\right] \right)$ $\quad \boxed{S_n = O(\frac{1}{n})}$

$\|f_\varepsilon - f\|_{K,\infty} \le C\cdot\varepsilon^\alpha$

$f_{\varepsilon z} \rightrightarrows f'$

よって新たに示すべきことは、以下の3つ。

① $S_n = O(\frac{1}{n})$

㋺ P_ε' の border circle の半径 $< C \cdot \varepsilon^\alpha$ （→§3）

㋩ Schwarz-Pick lemma （→§4）

①については、He による hexagonal packing についての証明がそのまま使える。（He-Rodin では He の証明との技術上の相異点が list up してあるだけである。）

§3. P_ε' の border circle の半径 $< C \cdot \varepsilon^\alpha$ なること.

$f_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \Omega_\varepsilon'$ は $z_0 \in \Omega$ が 0 の近くにくるよう normalize してあるものとする。

c : c' の半径が border circle 中最大であるような P の circle
（r : c の半径, r' : c' の半径 とする。）

$\gamma_1 := c \cap \Omega_\varepsilon$

$\gamma_2 := c_0 \cap \Omega_\varepsilon$ の z_0 を含む成分 （c_0 は c と同心で z_0 を通る円）

Γ ; Ω_ε 内で γ_1 と γ_2 を結ぶ curve family

G ; 図の領域  $\subset D$ (= 単位円板)

c の取り方より $G \subset \Omega_\varepsilon'$.

f_ε は c の中心を中心とする star region 上（scale をかえれば）一様に bi-Lipschitz なので、

$0 < {}^\exists s < 1$, （c' と同心で半径 sr' の円）$\cap G$ は $f_\varepsilon(\gamma_1)$ の内側にある

そこで

$\gamma_1' :=$ (C'と同心で半径sr'の円)$\cap G$

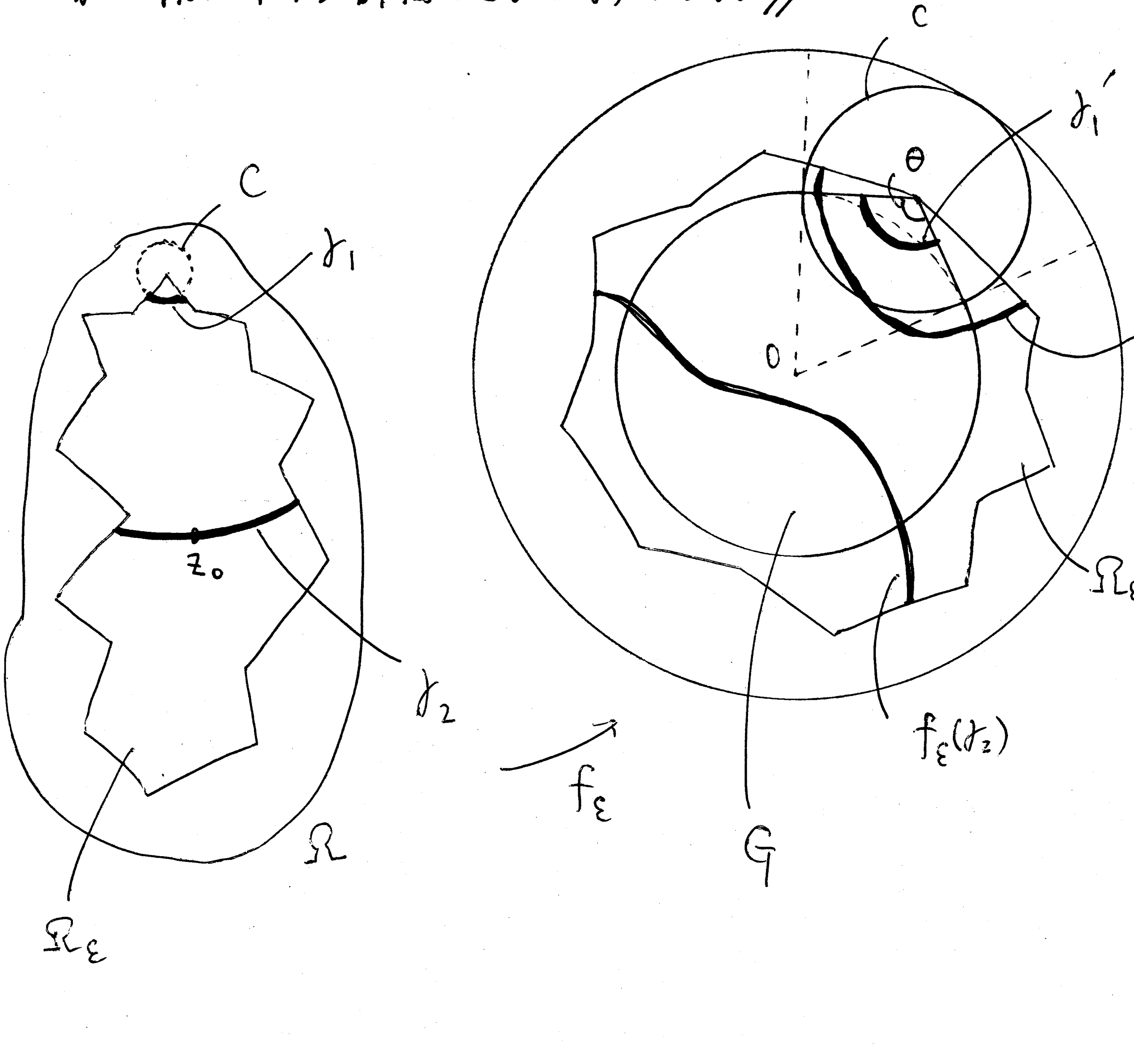
$\Gamma' :=$ G内で$f_\varepsilon(\gamma_2)$とγ_1'を結ぶ curve family

$\lambda(\cdot)$; extremal length

として.

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi}\log\frac{k}{\varepsilon} \le \frac{1}{2\pi}\log\frac{k}{r} \le \lambda(\Gamma) \le K\cdot\lambda(f_\varepsilon(\Gamma)) \\ \lambda(f_\varepsilon(\Gamma)) \le \lambda(\Gamma') \end{cases} \qquad (K = K(R_0)).$$

よって $\lambda(\Gamma') \le K_1 \cdot \log\frac{K_2}{r'}$ なる const $K_1, K_2 > 0$ の取れることをいえばよいが, それは $f_\varepsilon(\gamma_2)$が原点の十分近くを通ること, 及び, 図のθが一様に下から評価できることよりわかる。//



§4. Schwarz-Pick lemma (Perron's Method)

記号

K; orientable compact bordered surface の triangulation

V; K の vertex の全体

V_i; K の interior vertex の全体

V_b; K の border vertex の全体

$K(r)$; $r : V \to (0, \infty]$ の定める (singularity をもつ) hyperbolic surface.

(r を hyperbolic radius fun. と呼ぶ)

$\mathcal{R} = \{$ hyperbolic radius fun. $\}$

$$\theta_v(r) = \sum_f \theta(v, r, f), \quad v \in V, \ r \in \mathcal{R}$$

ここで Σ は v の star をなす triangule f の全体について取り、$\theta(v, r, f)$ は、f の、structure $K(r)$ に関する v での angle とする。

定義

$r \in \mathcal{R}$ が <u>subpacking</u> とは、$\theta_v(r) \geq 2\pi, \quad {}^\forall v \in V_i$

$r \in \mathcal{R}$ が <u>packing</u> とは、$\theta_v(r) = 2\pi, \quad {}^\forall v \in V_i$

たとえば r : subpacking, $0 < t \leq 1 \Rightarrow tr$; subpacking.

$r_1, r_2 \in \mathcal{R}$ に対し　$r_1 \vee r_2 \in \mathcal{R}$ を

$$r_1 \vee r_2 := \max(r_1, r_2),$$

また $r \in \mathcal{R}$, $v \in V_i$ に対し，$r^v \in \mathcal{R}$ を

$$r^v(u) := \begin{cases} r(u), & u \neq v \\ c & u = v \end{cases}$$

（c は $\theta_v(r^v) = 2\pi$ として一意に定まるところの値）

とおく。

r^v は「領域内の円板上での関数の値を，その Poisson 積分でおきかえる」ことに対応していると考えられる。

補題

① r_1, r_2 : subpacking $\Rightarrow$ $r_1 \vee r_2$; subpacking

② r : subpacking, $v \in V_i$ $\Rightarrow$ r^v : subpacking で
$r^v(v) \geq r(v)$

③ r : subpacking, $v \in V_b$, $c \geq r(v)$ に対し

$$r'(u) = \begin{cases} r(u) & u \neq v \\ c & u = v \end{cases}$$

は subpacking.

これらは次の事実からわかる。

「$v \in V_i$, $r \in \mathcal{R}$ において　$r(v)$ の値のみ大きくしてゆけば

- $\theta(v)$ の値は狭義単調に減少する
- v にとなりあう vertex u においては $\theta(u)$ は狭義単調に増加する。」

定義

subpackingの族 $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}$ が Perron族 とは、

① $\mathcal{R}_0 \neq \emptyset$

② $r \in \mathcal{R}_0$, $v \in V_i \Rightarrow r^v \in \mathcal{R}_0$

③ $r_1, r_2 \in \mathcal{R}_0 \Rightarrow r_1 \vee r_2 \in \mathcal{R}_0$

補題より、subharmonic fun. に対する Perron's Method の証明がそのまま適用でき

定理 (Perron's Method)

$\mathcal{R}_0$ が Perron族 ならば

$$\tilde{r}(u) = \sup_{r \in \mathcal{R}_0} r(u),$$

として $\tilde{r}$ は packing となる。

ただし、subharmonic fun. の Perron族では「恒等的に $+\infty$」なる関数が生じることもあったが 今の設定では、そうはならない。

というのは

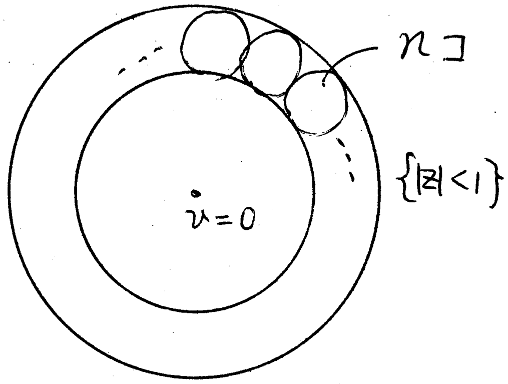
「r : subpacking, $v \in V_i$, $n =$ (vの starをなす triangle の コスウ)

とするとき、$r(v) \leq \sqrt{n}$」

∵ vの starをなす subpacking についてのみ示せば十分。
必要なら $r(v)$ の値を大きく取りかえて packing としてよい。

uをv以外のvertexとする。$r(u)$を大きく取りかえると、$\theta(v)$の値は大きくなるのでpackingとなるように$r(v)$の値を調節すれば$r(v)$の値は大きくなる。よって$r(u)=\infty$とすれば$r(v)$は最大となる。

よってv以外のすべてのvertex uに対し$r(u)=\infty$なるときに$r(v)$は最大。あとは$v=0$となる$\{|z|<1\}$なるhyperbolic surfaceのmodel上で考えてみればよい。(図参照) //



以下ではPerron's MethodをDirichlet問題に応用する。

$g : V_b \to (0, \infty]$ が与えられたとき

$$\mathcal{R}_0 = \{ r \in \mathcal{R} \mid r : \text{subpacking},\ r(v) \leq g(v),\ \forall v \in V_b \}$$

として

<u>定理</u>

$\mathcal{R}_0 \neq \emptyset$ ならば $\mathcal{R}_0$ は Perron族であり $\hat{r}$ は $\hat{r}|V_b = g$ をみたすただひとつのpackingである。

(:) 一意性以外の主張は補題より O.K. 一意性のみ示す。

r を条件をみたす他の packing とすると、$\tilde{r}(v) \geq r(v)$, $v \in V$

より $\mathrm{Area}_{\tilde{r}}(K) \geqq \mathrm{Area}_r(K)$, かつ $\theta_v(\tilde{r}) \geqq \theta_v(r)$, $v \in V_b$

ここで

$$\begin{cases} N = K \text{ の triangle のコスウ} \\ p = \# V_i \end{cases}$$

として

$$\mathrm{Area}_{\tilde{r}}(K) = (N-2p)\pi - \sum_{v \in V_b} \theta_v(\tilde{r})$$

$$\mathrm{Area}_r(K) = (N-2p)\pi - \sum_{v \in V_b} \theta_v(r)$$

よって $\sum_{v \in V_b} \theta_v(r) \geqq \sum_{v \in V_b} \theta_v(\tilde{r})$ となり $\theta_v(r) = \theta_v(\tilde{r})$, $v \in V_b$

であり $\mathrm{Area}_{\tilde{r}}(K) = \mathrm{Area}_r(K)$. よって $r = \tilde{r}$ をうる。

特に K が closed disk の triangulation であれば、どのような $g : V_b \to (0, \infty]$ に対しても $\mathcal{R}_0 \neq \emptyset$ なので

((:) 十分小さい $t > 0$ に対し $\{|z| < t\}$ での K の Andreev packing を hyperbolic surface の model $\{|z| < 1\}$ にうめこめばよい。)

<u>系</u>

K : closed disk の triangulation

$g : V_b \to (0, \infty]$

$\Longrightarrow$ $r|V_b = g$ なる packing r がただひとつ存在する。

さらに $g \equiv \infty$ とすれば K の任意の packing は $\mathcal{R}_0$ の元なので

系 (Schwarz-Pick lemma for circle packing)

K ; closed disk の triangulation

r_a ; K の Andreev packing

r ; K の任意の packing

$\Rightarrow$ $r(v) \leq r_a(v) \quad \forall v \in V$

$$\mathrm{Area}_r(f) \leq \mathrm{Area}_{r_a}(f), \quad \forall f : \text{triangle}$$

また ある $v \in V_i$ (or ある f : triangle) で等号が成立すれば r は Andreev packing r_a に一致する。

∵ 一意性のみ示せばよいが、一般に 2つの packing r_1, r_2 $r_1 \leq r_2$ について ある $v \in V_i$ で $r_1(v) = r_2(v)$ となれば $r_1 = r_2$ なることより O.K. f についても同様 //

[参考文献]

[1] Zheng-Xu He and Burt Rodin, Convergence of circle packings of finite valence to Riemann mappings, Comm. in Analysis and Geometry 1 (1993) 31-41.

(Schwarz-Pick lemma については)

[2] Alan F. Beardon and Kenneth Stephenson, The Schwarz-Pick lemma for circle packings, Ill. J. Math. 141 (1991), 577-606.