数理解析研究所講究録
893巻 1995年 114-127

On the convergence of derivatives of circle packing isomorphisms

東工大・理 志賀 啓成
(Hiroshige Shiga)

1. Introduction.

ここでは, B. Rodin "Schwarz's Lemma for Circle Packings. II" (J. Differential Geometry 30 (1989), 539 − 554) の解説をする。この論文は、その標題よりも、むしろこの解説の標題のように, circle packing によるリーマン写像の近似の際の微分の収束について扱ったものである。

平面上に単連結領域Ωと、その内部の2点 z_0, z_1 が与えられたとき、リーマンの写像定理によって、Ωから単位円板Dへの等角写像 f で、$f(z_0)=0$, $f(z_1)>0$ なるものが唯一つ存在する。この等角写像はΩの circle packing から得られる写像によって近似されることが証明されている (Rodin − Sullivan [RS])。まず、その手続きを簡単に復習する。

任意の正数εに対して、$HCP(\varepsilon)$を半径εの円による平面の regular hexagonal circle packing とする。このとき領

域Ωの$HCP(\varepsilon)$の円による内部近似をΩ_εとする。すなわち、Ω_εは自分自身とその回りの6つの円が全てΩに含まれている円(inner circle)と、Ωに含まれてはいるが、inner circleではない円(border circle)、からなっている。このようなΩ_εに対して、これと組み合せ的に同値なcircle packingが(Ω_ε'とかく)単位円D内にとれる。ただし、Ω_ε'のborder circleは全て∂Dに接しているものをとる。(Andreev-Thurstonの定理)。Ω_εの円で、z_0, z_1の近くにあるものをC_0, C_1, それに対応するΩ_ε'の円をC_0', C_1'とする。Dを不変にするMöbius変換を作用させることによって、C_0'の中心は原点、C_1'の中心は正の実軸上にあると仮定してよい。

さて、Ω_εとΩ_ε'は組み合せ的に同値であったから、それぞれの円の中心を頂点(vertex)、互いに接する円の中心を結ぶ線分を辺(edge)とする複体(それを、それぞれT_ε, T_ε'とする)を作れば、それらの間に自然な写像f_εが存在する。この写像f_εはT_εのcarrier $|T_\varepsilon|$からT_ε'のcarrier $|T_\varepsilon'|$への区分的linear mapととれる。したがって、特にquasi conformalである。そして、packing constant(後述)が、$\varepsilon \to 0$のとき0に収束することから、このf_εが等角写像、すなわちリーマン写像に収束していることがわ

かる。

実際には、上の収束はΩ上広義一様収束になっているのだが、ここでは更に、f_εの「微分」の収束を問題にする。

[Question]

f_ε の image の円と pre-image の円の半径比は Riemann 写像の微分に収束するか？

[この論文での解答]

ある条件の下では Yes. 一般には BMO-norm で正しい。

注意　上の「ある条件」とは、packing constant の評価についての条件だが、実はこの条件は He[H] によって、正しいことが示されているので、結局、この論文で示された定理の結論が、いつも成立していることになる。

2. 記号と定義

Ω：平面内の有界単連結領域 $\ni z_0, z_1$.

D：単位円板，　$\varepsilon > 0$.

f：Ω から D への conformal map (Riemann map) で、正規化条件 $f(z_0)=0$，$f(z_1)>0$ なるもの。

Ω_ε：Ω の regular hexagonal circle packing による近似

Ω_ε'：D の circle packing で、Ω_ε と組み合せ的に同値なもの。

$T_\varepsilon^{(\prime)}$：$\Omega_\varepsilon^{(\prime)}$より得られる複体

$|T_\varepsilon^{(\prime)}|$：$T_\varepsilon^{(\prime)}$ の carrier

f_ε：$|T_\varepsilon|$から$|T_\varepsilon'|$への自然な写像

$|T_\varepsilon|$ の三角形の頂点zはΩ_εの円の中心に対応していた。また、T_εとT_ε'は組み合せ的に同値であったから、$|T_\varepsilon'|$にも対応する点がある。そこで、$r_\varepsilon(z)$を

$$r_\varepsilon(z) = \frac{(C'\text{の半径})}{(C\text{の半径})}$$

で定義する。ここに、Cはz中心のΩ_εの円、C'はそれに対応するΩ_ε'の円である。$|T_\varepsilon|$の頂点で定義された関数 $r_\varepsilon(z)$を$|T_\varepsilon|$全体に連続的に拡張して、それをやはり同じ$r_\varepsilon(z)$と書く（拡張のやり方は、例えば三角形の重心座標を用いて、内部の点を頂点で表せば容易。）。このようにして、連続関数

$$r_\varepsilon : |T_\varepsilon| \to \mathbb{R}$$

を得る。

Packing constant S_n

$^\forall n \in \mathbb{N}$に対して、$HCP_n$を平面の regular hexagonal packing の第n世代までの circles 全体、HCP_n'をHCP_nと組み合せ的に同値な circle packing とする。

このHCP$_n'$に対して、その第0世代の円と第1世代の円の半径比をρとして、

$$s_n = \sup_{HCP_n'} |1 - \rho|$$

とおく。ここにsupは上のようなHCP$_n'$全てに渡って考えるものとする。このとき、$s_n \to 0$ $(n \to \infty)$が知られている。

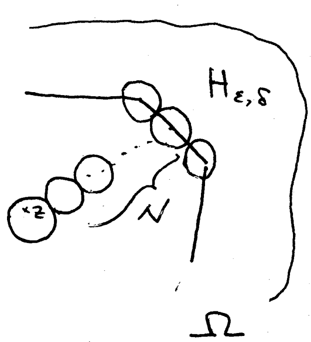
3. 微分の収束

Proposition 1.

前節の記号で、$s_n = O(\frac{1}{n})$ ならば、$\varepsilon \to 0$ のとき、r_ε は $|f'|$ に Ω 上広義一様収束する。

証明　$z \in \Omega$, $\varepsilon, \delta > 0$ を固定する。ただし、ε, δ は $\mathrm{dist}(z, \partial\Omega) > {}^{\exists}d \gg \delta \gg \varepsilon > 0$ ととっておく。ここで、

$H_{\varepsilon,\delta}$: z に最も近い円を中心とした直径 2δ の六角形とする。ここでは、特に第N世代の円の中心を結んでできる六角形になっているとする。(図参照)



したがって、$\delta = 2\varepsilon N$ である。

よって、Ω_ε は $[d/2\varepsilon] = [Nd/\delta]$ 世代の円は必ず含む。そして、この世代数は z の近傍の点を z の代わりに考えても成立している。ここで $\varepsilon \to 0$ とすると、六角形 $H_{\varepsilon,\delta}$ はあ

る六角形 $H_{0,\delta}$ に収束しているとしてよい。また、f_ε は f に広義一様収束しているので、

$$|f'(z)|^2 = \lim_{\delta\to 0} |f(H_{0,\delta})|/|H_{0,\delta}|$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} |f_\varepsilon(H_{\varepsilon,\delta})|/|H_{\varepsilon,\delta}|,$$

ここに $|\cdot|$ は Euclid の面積である。

さて、前段の議論から、Ω_ε と同様、Ω'_ε も第 $[N\delta/\varepsilon]$ 世代までの円を含んでいる。したがって、Ω'_ε の第0世代の円の半径を R とすると、S_n の定義により、そのような任意の円の半径 r は、

$$R(1-S_{[\delta N/\varepsilon]})^N \le r \le R(1+S_{[\delta N/\varepsilon]})^N$$

と評価される。よって、

(三角形がすべて一辺 $R(1-S_{[\delta N/\varepsilon]})^N$ の正三角形の場合の $f_\varepsilon(H_{\varepsilon,\delta})$ の面積)

$\le |f_\varepsilon(H_{\varepsilon,\delta})|$

$\le$ (三角形が 〃 〃 $R(1+S_{[\delta N/\varepsilon]})^N$ 〃 〃 〃)

$H_{\varepsilon,\delta}$ はすべて一辺 ε の正三角形からなるので、

$$\left(\frac{R}{\varepsilon}\right)^2(1-S_{[\delta N/\varepsilon]})^{2N} \le |f_\varepsilon(H_{\varepsilon,\delta})|/|H_{\varepsilon,\delta}|$$

$$\le \left(\frac{R}{\varepsilon}\right)^2(1+S_{[\delta N/\varepsilon]})^{2N}$$

ここで $S_n = O(\frac{1}{n})$ を使う。$^{\exists}B>0$ s.t. $0 \leq S_n \leq B/n$ なので、

$$(1+S_{[dN/\delta]})^{2N} \leq (1+B/[dN/\delta])^{2N} \xrightarrow{N\to\infty} e^{2B\delta/d}$$
$$(1-S_{[dN/\delta]})^{2N} \geq (1-B/[dN/\delta])^{2N} \xrightarrow[N\to\infty]{} e^{-2B\delta/d}$$

$\varepsilon \to 0$ のとき、$N \to \infty$ なので、

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \left(\frac{R}{\varepsilon}\right)^2 e^{-\frac{2B\delta}{d}} \leq \frac{|f(H_{0,\delta})|}{|H_{0,\delta}|} \leq \underline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \left(\frac{R}{\varepsilon}\right)^2 e^{\frac{2B\delta}{d}}$$

定義より、$r_\varepsilon(z) = R/\varepsilon$ だったから、$\delta \to 0$ とすれば上式より、$r_\varepsilon \to |f'|$ を得る。収束の広義一様性は N の評価の一様性から従う。 Q.E.D.

<u>注意</u> Introduction でも述べたように、「$S_n = O(\frac{1}{n})$」という条件は、He [H] によって示されている。

擬等角写像 f_ε の微分に関しても同様のことが示せる。それは次の事実と Proposition 1 から直ちに従う。

<u>Theorem 1</u>

$$\left|\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial z}\right| = r_\varepsilon(1+O(S_n))$$

$$\left|\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \bar{z}}\right| = r_\varepsilon\, O(\sqrt{S_n})$$

$$|\mu_\varepsilon| = O(\sqrt{S_n})$$

ただし、μ_ε は f_ε の complex dilatation である。

証明　Rodin [R1] を見よ。

4. r_ε の BMO-norm による収束.

前節の Proposition 1 でみたように、$s_n = O(\frac{1}{n})$ という仮定のもとで、$r_\varepsilon \to |f'|$ ($\varepsilon \to 0$) の収束が証明され、しかも、He によって、$s_n = O(\frac{1}{n})$ が示されているので、$r_\varepsilon \to |f'|$ に関しては一応の結果を得たのであるが、ここでは、Rodin の論文に沿って、$r_\varepsilon \to |f'|$ の BMO-norm に関する結果を簡単に紹介する。ただし、ここでは、BMO に関する事実は、基本的なものについては省略する。適当な教科書を参照されたい。

補題 1.

w, w_n ($n=1,2,\cdots$) : Ω 上の quasi conformal

$\{w_n\}$ は $n \to \infty$ のとき広義一様に w に収束しており、更に微分 $\{\partial w_n/\partial \bar{z}\}$ も $\partial w/\partial \bar{z}$ に L^∞-norm で局所的に収束していると仮定する。このとき、微分 $\{\partial w_n/\partial z\}$ は $\partial w/\partial z$ に Ω 内局所的に、BMO-norm で収束する。

略証

Hilbert 変換 S を

$$S\omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\omega(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\xi\, d\eta \quad (\zeta = \xi + i\eta)$$

で定義すると、これは L^∞ から BMO への連続作用素

$\Longrightarrow$ 一方、 $S(\partial f/\partial\bar{z}) = \partial f/\partial z$

$\Longrightarrow$ よって $\partial w_n/\partial\bar{z} \to \partial w/\partial z$ loc. in L^∞ から

$$\partial w_n/\partial z = S(\partial w_n/\partial\bar{z}) \to S(\partial w/\partial\bar{z}) = \partial w/\partial z$$

loc. in BMO がいえる。

(実際には、議論を局所化する必要があるので、$C_0^\infty(\Omega)$ の適当な関数との積を考えて、上の推論を行う。) Q.E.D.

Theorem 2.

Ω 上局所的に r_ε は $|f'|$ に BMO-norm で収束する。

証明

r_ε は局所一様有界で、s_n は $(n\to\infty)$ 0 に収束するから、Theorem 1 から $\partial f_\varepsilon/\partial\bar{z} \to 0$ (loc. in L^∞)。また、f_ε は等角写像 f に局所一様収束している。よって $\{f_\varepsilon\}$ は $\varepsilon\to 0$ のとき、上記補題の条件を満たしている。よって

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial z} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{loc. in BMO}).$$

再び Theorem 1 を用いると、$r_\varepsilon \to |f'|$ (loc. in BMO) がわかる。 Q.E.D.

系

$$\partial f_\varepsilon/\partial z \longrightarrow f' \quad (\text{loc. in BMO}).$$

5. The rate of convergence of $f_\varepsilon \to f$

この節では、$f_\varepsilon \to f$ の収束の評価を ε を用いて行う。

<u>Theorem 3.</u>

$z_0, z_1 \in \Omega$, K を Ω 内の compact 集合、f_ε を $HCP(\varepsilon)$ と z_0, z_1 に関して作った circle packing isomorphism とする。このとき、$\exists C$, $\exists p > 2$ がとれて、$\forall \varepsilon > 0$ に対し、

$$\| f - f_\varepsilon \|_K \leq C\left(\sqrt{S_{[\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}]}} + \varepsilon^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

が成立する。ここに f は $f(z_0)=0$, $f(z_1)>0$ なる Ω の Riemann 写像である。

<u>略証</u> $W_\varepsilon = |T_\varepsilon|$, $D_\varepsilon = |T'_\varepsilon|$ とおいて、G_{W_ε}, G_{D_ε} をそれぞれ、W_ε, D_ε の Riemann 写像で、$G_{W_\varepsilon}(z_0)=0$, $G_{W_\varepsilon}(z_1) > 0$, $G_{D_\varepsilon}(0)=0$, $G_{D_\varepsilon}(f_\varepsilon(z_1)) > 0$ なるものとする。そこで、

$$|f(z) - f_\varepsilon(z)| \leq |f(z) - G_{W_\varepsilon}(z)|$$
$$+ |G_{W_\varepsilon}(z) - G_{D_\varepsilon}\circ f_\varepsilon \circ G_{W_\varepsilon}^{-1}(G_{W_\varepsilon}(z))| + |G_{D_\varepsilon}(f_\varepsilon(z)) - f_\varepsilon(z)|$$

という不等式を考え、右辺を ε で評価することを考える。

右辺の第1項 $|f(z) - G_{W_\varepsilon}(z)|$ は2つの領域 Ω, W_ε の Riemann 写像の比較である。しかも、その境界同士の近さは ε で評価される。したがって、f, G_{W_ε} の差も、古典的な Warschawski の結果から ε で評価できる（[R2] Lemma 3.1）。

第3項 $|G_{D_\varepsilon}(f_\varepsilon(z)) - f_\varepsilon(z)|$ は D_ε の Riemann 写像と恒等写像の差（の $f_\varepsilon(z)$ での値）とみなせる。その評価を行う為には、領域 D_ε が単位円板 D へ"どれほど"近いかを見る必要がある。D_ε の構成法を考えれば、それは D の packing Ω_ε' の border circle の半径を評価することに他ならない。そのために、次の補題を使う。

補題2（Length-Area-Theorem の拡張）

次の性質を満たす絶対定数 $C > 0$ が存在する。

C : Ω_ε' の border circle

C のまわりの第1世代から第 N 世代までの circles の cross cut が C と O とを分離していたとする。

このとき、

$$S (= S(k, N)) = \inf\{\text{第}j\text{世代の cross cut chain の半径の和, ただし } k \leq j \leq 2k-1 < N\}$$

とおくと、 $S \leq C(k/N)^{\pi^2/24}$.

証明　略. [R2] Lemma 3.2 を見よ。

この補題から、Ω_ε' の border circle の半径を ε で評価できる。実際、border circle の半径は $k = 1$ のときの、上記 S より小さいから、$\leq C(1/N)^{\pi^2/24}$. よって、border circle と O とを分離する世代数 N を評価すればよい。Ω_ε と Ω_ε' は組み合せ的に同値なので、Ω_ε において z_0 と border circle を分

離する世代数と同じである。ところが、この世代数は容易に、$\mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)/2\varepsilon$ 程度であることがわかる。したがって、$N = O(\frac{1}{\varepsilon})$．よって、$\Omega'_\varepsilon$ の border circle の半径は、ある $C_\Omega > 0$ がとれて、$\leq C_\Omega \varepsilon^{\pi^2/24}$ となる。よって、D_ε と D との近さを評価できる。

第２項 $|G_{W_\varepsilon}(z) - G_{D_\varepsilon} \circ f_\varepsilon \circ G_{W_\varepsilon}^{-1}(G_{W_\varepsilon}(z))|$ の評価は最もデリケートである。この項は、擬等角写像 $G_{D_\varepsilon} \circ f_\varepsilon \circ G_{W_\varepsilon}^{-1}$ と恒等写像の差（の $G_{W_\varepsilon}(z)$ での値）と見る。

そのためには、$h_\varepsilon := G_{D_\varepsilon} \circ f_\varepsilon \circ G_{W_\varepsilon}^{-1}$ とおいて、h_ε の complex dilatation を評価すればよい。というのは、h_ε は $D \to D$ の qc で、$h_\varepsilon(0) = G_{D_\varepsilon} \circ f_\varepsilon \circ G_{W_\varepsilon}^{-1}(0) = G_{D_\varepsilon} \circ f_\varepsilon(z_0) = 0$, $p = G_{W_\varepsilon}(z_1)$ とおくと、$h_\varepsilon(p) = G_{D_\varepsilon}(f_\varepsilon(z_1)) > 0$ であり。G_{W_ε} が局所一様に Riemann 写像 f に収束するから、$\exists p_0 > 0$ s.t. $\forall \varepsilon > 0$ に対し、$p_0 < p < 1$ である。よって、h_ε はある程度の正規化条件をみたしているので、その complex dilatation で、恒等写像との差分が評価できる（[R2] Lemma 3.4）。

一方、h_ε は f_ε と conformal map とを合成させたものなので、f_ε の complex dilatation μ_ε を考えればよい。μ_ε については Theorem 1 より $\|\mu_\varepsilon\|_K = O(\sqrt{s_n})$ であることが分かる。ただし $n = [\mathrm{dist}(K, \partial\Omega)/2\varepsilon]$。ところで、一般に擬等角写像と恒等写像との差を見るのに、compact 集合上での、

complex dilatation の情報だけでは十分ではない。しかし、単位円板から単位円板への、「正規化された」擬等角写像については、その compact 集合の「サイズ」を用いて評価できる([R2] Lemma 3.4)。この結果を用いる為には、μ_ε の大きさが評価できる W_ε の compact 集合に対応する、h_ε の定義域、すなわち D での compact 集合の「サイズ」を調べることによって得られる。(詳細略)　　Q.E.D.

<u>注意</u>　最後の部分、すなわち、W_ε の compact 集合に対応する D での compact 集合の「サイズ」を調べるには、G_{W_ε} による compact 集合の対応を見ればよいが、Rodin は論文では、Warschawski の結果([R2] Lemma 3.1)から従うと、書いてあるが、筆者にはその理由が判然としなかった。

References

[H] He, Z., An estimate for hexagonal circle packings, J. Differential Geometry **33** (1991), 395–412.

[MR] Marden, A. and B. Rodin, On Thurston's formulation and proof of Andreev's theorem, LNM **1435** Springer (1990), pp. 103–115.

[R1] Rodin, B., Schwarz's Lemma for Circle packings, Invent. Math. **89** (1987), 271–289.

[R2] Rodin, B., Schwarz's Lemma for Circle packings II, J. Differential Geometry **30** (1989), 539–554.

[RS] Rodin, B. and D. Sullivan, The convergence of circle packings to the Riemann mapping, J. Differential Geometry **26** (1987), 349–360.