数理解析研究所講究録
第 893 巻 1995 年 94-96

An Estimate for Hexagonal Circle Packings

須川敏幸 (TOSHIYUKI SUGAWA)
京都大学理学部

このノートは

Zheng-Xu He "An estimate for hexagonal circle packing" J.Diff.Geom. Vol.33(1991) pp.395-412 の解説である。

H_n を第 n 世代までの regular hexagonal circle packing, つまり

$$H_n = \{\{z \in \mathbb{C}; |z - (2(k_1 + k_3) + 2e^{\pi i/3}(k_2 - k_3))| = 1\}; k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}, |k_1| + |k_2| + |k_3| \le n\}$$

とし、$\mathcal{P}_n$ を circle packing で H_nに組み合わせ同値なもの全体のなす集合、$\mathcal{P}_n^0$をその部分集合で、中心の円が単位円周であり、1 を一つの接点に持つようなもの全体とする。

c_0は単位円周とし、$c_{j+1} = \{z; |z - 2e^{\pi i j/3}| = 1\}$ $(j = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ と定める。($c_j \in H_1 \subset H_n$)

$P \in \mathcal{P}_n^0$に対しては単位円周 $c_0' = c_0 \in P$に 1 で接する円を c_1に対応させることにより、一意的に組み合わせ同値を与える写像$\rho : H_n \to P$が定まる。以下では$\rho(c) = c', \rho(H_m) = H_m'(0 \le m \le n)$ などと略記することがある。

次の n にのみ依存する普遍定数

$$s_n = \sup_{P \in \mathcal{P}_n^0} \max_{1 \le j,k \le 6} \left(\frac{\mathrm{rad} c_j'}{\mathrm{rad} c_k'} - 1 \right)$$

に関して次を示すのがこの論文での主結果である。

定理. $s_n = O(\frac{1}{n})$ $(n \to \infty)$

注意: $s_n \ge 4/n$ なのでこの結果は order としては最良である。$s_n \ge 4/n$ は実際に、$g(z) = \frac{2(n+1)z-1}{2(n+1)-z}$とすれば $g(H_n) \in \mathcal{P}_n$で

$$s_n \ge \frac{\mathrm{rad} g(c_1)}{\mathrm{rad} g(c_4)} - 1 = \frac{16n + 16}{4n^2 - 1} > \frac{4}{n}$$

となることから分かる。

では、以下でこの定理の証明の概略について解説する。まず、$\delta_1 > 0$ を hexagonal packing に対する ring lemma に於ける定数とする。つまり、

$$\delta_1 = \inf_{P \in \mathcal{P}_n^0} \min_{1 \le j \le 6} \mathrm{rad} c_j'$$

であるとする。すると、次の補題が成り立つことが分かる。

Lemma2.1. $\hat{c}_0, \hat{c}_1, \hat{c}_2$を互いに他と外接する円で$\delta_1 \leq \frac{\mathrm{rad}\,\hat{c}_j}{\mathrm{rad}\,\hat{c}_k}$とする。この時、次の性質を満たす*Möbius* 変換の元gが一意的に存在する：

$$g(\hat{c}_0) = c_0, \quad g(\hat{c}_1) = c_1, \quad g(\hat{c}_2) = c_2.$$

さらに、$\hat{c}_0 = c_0$なら gは c_0上 C_1-*bilipschitz* である。（ここに、$C_1 \geq 1$ は普遍定数。）

Lemma. $f : c_0 \to c_0$が C_1-*bilipschitz* とすると fを$\tilde{f} : \overline{D} \to \overline{D} \quad (D = \{|z| < 1\})$ に$\tilde{f}(re^{i\theta}) = rf(e^{i\theta})$ により拡張すると$\tilde{f}$は C_1-擬等角である。

以下、n を固定して $P \in \mathcal{P}_n^0$も固定する。上の２つの補題からまず H_{n-1}の隙間の和から $H'_{n-1} = \rho(H_{n-1})$ の隙間の和への等角写像が自然に定まり、あとはそれを円の内部に上のように radial に拡張することにより C_1-擬等角写像φ が定義される：

$$\varphi : \mathrm{hull}(\cup H_{n-2}) \to \mathrm{hull}(\cup H'_{n-2})$$

さらにここで、単位円板から複素平面の中への C_1-擬等角写像 $f : D \to \mathbb{C}$ に対し $f|_{\{|z|<1/\sqrt{3}\}}$は C_2-擬等角写像$\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に拡張できることに注意する。ここに、C_2は C_1のみに依存する定数である。　これにより、φ の $\{|z| < n - 2\}$ への制限を C_2-擬等角写像 $\psi : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}} \quad (\psi(\infty) = \infty)$ に拡張しておく。($\mathrm{hull}(\cup H_{n-2}) \supset \{|z| < (n-2)\sqrt{3}\}$ に注意。)

次に m を$\frac{n-3}{2}$の整数部分とすれば $\cup H_m \subset \{|z| \leq n - 2\}$ となることに注意しておく。

円 c に関する反転をγ_cと書くことにして、$\{\gamma_c\}_{c \in H_m}, \{\gamma_{c'}\}_{c' \in H'_m}$で生成される群をそれぞれ G_m, G'_mと書くと、$\gamma_c \mapsto \gamma_{c'} \quad (c' = \rho(c))$ により同型写像$\tau : G_m \to G'_m$が定まるが、このτは自然に同相写像$\tau_* : \Lambda(G_m) \to \Lambda(G'_m)$ を誘導する。($\Lambda(G)$ は G の limit set)

I_mを H_mの隙間の和集合、U_mを$\widehat{\mathbb{C}} \setminus \cup_{c \in H_m} c$ の非有界成分としたとき、$I_m \cup U_m =: W_m$が G_mの基本領域となる。そこで $m = [\frac{n-3}{2}]$として、$f = f_n$を

$$f := \begin{cases} \tau(g) \circ \psi \circ g^{-1} & \text{on } g(\overline{W}_m) \quad (g \in G_m) \\ \tau_* \quad \text{on} & \Lambda(G_m) \end{cases}$$

により定めると次のことが成り立つ。

(1) $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$は C_2-擬等角写像,

(2) $f(0) = 0, f(1) = 1, f(\infty) = \infty$,

(3) $f \circ g = \tau(g) \circ f$ for $\forall g \in G_m$,

(4) fは $J_m = \cup_{g \in G_m} g(I_m)$ 上等角。

ここで J_mに対して次のような評価が成り立つことが分かる。

Lemma2.2. $|D \setminus J_m| \leq C_3/m^2$（ここに $C_3 > 0$ は普遍定数）

実は論文ではこの評価にかなりのページが割かれているが、幾分技術的な評価などが色々必要になるので、ここでは証明は省略する。J_mは $G_n \quad (m \leq n)$ の不連続領域を含むのでこの系として次の結果が得られる。

COROLLARY. $G_\infty = \varinjlim G_m$の *limit set* は 2 次元測度 *0* である。

さて、以下では次の主張を示すことを考える。

主張. 単位円周c_0上の任意の点zについて$|\varphi(z)-z| \le \frac{C_4}{n}$が成り立つ。ただし、ここに$C_4 > 0$は普遍定数である。

この主張から$c_0' \cap c_j'$は$\frac{1}{n}$の order で$c_0 \cap c_j$に近いことが分かり、これから$s_n = O(\frac{1}{n})$が容易に従う。この主張を示すには Lemma2.2 と次の補題を組み合わせればよい。

LEMMA(SULLIVAN). $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$を正規化された$C_2$-擬等角写像とすると$C_2$のみに依存する正定数$C_5$が存在して次が成り立つ：正定数$\delta > 0$に対して$f$の *Beltrami* 係数$\mu = f_{\bar{z}}/f_z$が球面測度$\delta$以下の可測集合$E$の外部で*0*になるならば、任意の$z \in \widehat{\mathbb{C}}$について$d(z, f(z)) \le C_5\sqrt{\delta}$が成り立つ。ただし、ここに$d(z,w)$は球面距離とする。

この補題は本質的には長さと面積の方法（length-area method）を用いて証明される。評価が$\sqrt{\delta}$の order になってしまうのは、球面を 2 重に被覆するトーラスを考えてそこに写像を持ち上げて考えるからで、その場合、分岐点があるために 1/2 乗の因子がついてしまうのである。

以上が主定理の証明の概略であったが、この結果の系として次のものが得られる。これは Rodin による "Schwarz's lemma for circle packings II" J.Diff.Geom.30(1989)pp.639-554 の結果（志賀氏の稿を参照のこと）を用いれば直ちに従う。

系. 平面内の単連結領域Rのリーマン写像の *circle packing* 近似解f_εについて、その微分はリーマン写像fの微分に広義一様収束する。

特にRが *Jordan* 領域の場合、f_εはfに一様収束する。ここで、$f_\varepsilon : R_\varepsilon \to D_\varepsilon$が$f : R \to D$に一様収束するというのは、次が成り立つことを言う：

$$\forall\eta > 0, \exists\delta > 0, \exists\varepsilon_0 > 0, \forall\varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \quad z \in R_\varepsilon, w \in R, |z-w| < \delta \Rightarrow |f_\varepsilon(z) - f(w)| < \eta$$