数理解析研究所講究録
第 893 巻 1995 年 80-93

Circle packing points in the Teichmüller space

Michihiko Fujii

藤井 道彦（横浜市大文理）

§ 0. 序

この小論は、Philip L. Bowers - Kenneth Stephenson 著 " The set of circle packing points in the Teichmüller space of a surface of finite conformal type is dense" (Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **111** (1992), 487-513) の紹介をしたものである。原論文の主定理は、

"有限個の puncture をもつ 双曲的曲面の Teichmüller 空間において、circle packing point 全体は dense な部分集合をなす"

である。双曲的閉曲面の場合について同様の定理を Brooks [6] [7] が証明している。Brooks の証明は、四角形隙間の Brooks parameter を用いて Klein 群の変形空間をパラメトライズして行なわれている。そのパラメトリゼイションは、Ahlfors - Bers [1] の Measurable Riemann Mapping Theorem とか、Sullivan [8] の Klein 群の変形理論を用いて得られる。そのため、この Brooks による証明はかなり格調の高いものとなっている。ここで紹介している Bowers - Stephenson の論文では、まず、双曲的閉曲面の場合の別証明が述べられている。そこでは、Brooks parameter は随所で使用されているものの、Sullivan の変形理論は用いられずに、elementary な二次元双曲幾何の議論だけで証明が与えられている。素朴ではあるが、Klein 群の極限集合についての議論を避けている点で、Brooks のものより明快なものとなっている。さらに、その証明方法が puncture 付きの場合にも拡張できて、上記の結果を得ているのである。Puncture 付きの場合には、二次元双曲幾何の準備において、議論を少し formulate し直す必要があり、証明は若干複雑になる。しかし、証明方法の本質的なところは、閉曲面の場合の証明に現れているので、この小論では、puncture 付きの場合ではなくて、閉曲面の場合に限って証明を紹介することにした。

また、Bowers - Stephenson は、"Circle packings in surfaces of finite type: an in situ approach with applications to moduli (Topology **32**(1993),157-183)" で、上記の結果をさらに一般化して、有限個の puncture と有限個の half-annulus end をもつような双曲的曲面の場合にも、circle packing point 全体が reduced Teichmüller 空間で dense であることを証明している。この証明は、技術的にかなり複雑ではあるが、ここで紹介する閉曲面の場合の証明と本筋は同じである。

§ 1. 主定理

g と n を $2g-2+n>0$ を満たす 0 以上の整数とする。種数 g の向き付けられた閉曲面から n 個の異なる点を除いてできる曲面を $\Sigma_{g,n}$ とする。S、S' を面積有限の 2 つの Riemann 面とする。$\Sigma_{g,n}$ から S、 S' への向きを保つ同相写像 $f:\Sigma_{g,n}\to S$、$f':\Sigma_{g,n}\to S'$ に対して、ある等角写像 $\phi: S\to S'$ が存在して、$(f')^{-1}\circ\phi\circ f$ が $id_{\Sigma_{g,n}}$ とホモトープであるとき、f と f' は同値であるといい、その同値類を $[f]=[f:\Sigma_{g,n}\to S]$ と表すことにする。それらの同値類全体を $\mathcal{T}_{g,n}$ とする。$\mathcal{T}_{g,n}$ の上に距離 ρ を

$$\rho([f_1],[f_2]) := \frac{1}{2}\log\inf\{\kappa(\phi)|\phi \text{は } f_2\circ f_1^{-1} \text{のホモトピー類に入る擬等角写像}\}$$
ただし、κは擬等角写像の global dilatation

で定める。この ρ を Teichmüller metric といい、$\mathcal{T}_{g,n}$ にこの距離で位相を入れた空間を Teichmüller 空間という。よく知られているように、$\mathcal{T}_{g,n}$ は $\mathbf{R}^{6g-6+2n}$ と同相である。

C を $\mathbf{H}^2$ 内の円とするとき、$\overline{C}$ で C により囲まれた円板を表すことにする。

Definition 1.1. Riemann 面 S 上の circle packing とは、S 上の円からなる集合 $\mathcal{C}$ で、ここでは、次の条件を満たすもののこととする：

- $\mathcal{C}$に属する任意の 2 つの円 C_1、C_2は、$\mathrm{Int}\overline{C_1}\cap\mathrm{Int}\overline{C_2}=\phi$を満たす
- $\overline{C_1}\cap\overline{C_2}\neq\phi$のときには、その交わりは点 (一点とは限らない) からなる
（このとき、C_1、C_2は接するという）
- $C\in\mathcal{C}$に接する $\mathcal{C}$の円の数は有限個である □

Circle packing $\mathcal{C}$ に属する円で囲まれた円板による disk packing を $\overline{\mathcal{C}}$ と書くことにする、すなわち、$\overline{\mathcal{C}}=\{\overline{C}|C\in\mathcal{C}\}$ とする。

3 つの円 C_1、C_2、C_3 が図 1 のようにお互いに接しているとき、$\mathbf{H}^2\setminus\cup_{i=1}^{3}\overline{C_i}$ の有界な成分を 三角形隙間 という。

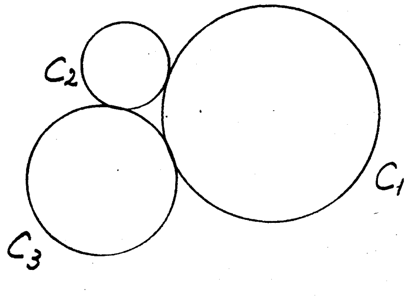

図 1

Definition 1.2. $\mathcal{T}_{g,n}$ の点$[f] = [f : \Sigma_{g,n} \to S]$ について、Riemann 面 S 上にある circle packing $\mathcal{C}$ が存在して、$S \setminus \cup\overline{\mathcal{C}}$ のすべての成分が三角形隙間となるときに、$[f] = [f : \Sigma_{g,n} \to S]$ は $\mathcal{T}_{g,n}$ の circle packing point であるという。$C_{g,n}$ で circle packing point 全体となるような $\mathcal{T}_{g,n}$ の部分集合を表すことにする。□

[4] の主定理は次の Theorem 1.3 である。

Theorem 1.3. $C_{g,n}$ は $\mathcal{T}_{g,n}$ の dense な部分集合である。□

以下の章で、Theorem 1.3 を $n = 0$ の場合に示す。そこで、§ 2 、3 、4 では、[4] で述べられている Lemma たちを、$n = 0$ の場合の証明に必要な形に簡略化して述べることにする。

§ 2. $\mathbf{H}^2$ 内の三角形と四角形に関する Lemma

$(a, b, c) \in (0, \infty)^3$ に対して、3 辺の長さが $a+b$ 、$b+c$ 、$c+a$ となる $\mathbf{H}^2$ 内の測地的三角形を $T(a, b, c)$ と表す。図 2 のように、お互いに接する 3 つの円（半径を a 、b 、c とする）の中心を結んで $T(a, b, c)$ が作れる。

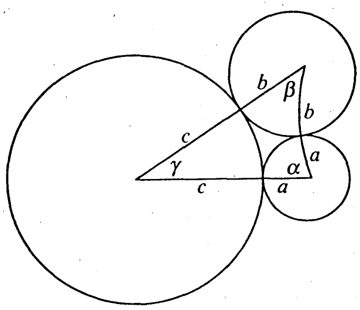

図 2

次の 2 つの Lemma は [2] で示されている。

Lemma 2.1. (a, b, c) 、$(a', b', c') \in (0, \infty)^3$ とする。このとき、

- $a \leq a', b \leq b', c \leq c' \Longrightarrow \mathrm{Area}T(a, b, c) \leq \mathrm{Area}T(a', b', c')$
- $a \leq a', b \leq b', c \leq c'$かつ $(a, b, c) \neq (a', b', c') \Longrightarrow \mathrm{Area}T(a, b, c) < \mathrm{Area}T(a', b', c')$□

Lemma 2.2. b 、c を定数とすると、内角 α、β、γ は、a に関して連続な関数である。さらに、$\alpha(a)$ 、$\beta(a)$ 、$\gamma(a)$ は狭義単調減少関数であり、$\lim_{a\to\infty} \alpha(a) = 0$ 、$\lim_{a\to 0} \alpha(a) = \pi$ が成り立つ。□

次の Lemma は、Theorem 1.3 の証明のときに key となる。

Lemma 2.3. $0 < t < \infty$ に対して、辺の長さが tx 、ty、tz であるような $\mathbf{H}^2$ 内の測地的三角形を tT と表すことにする。このとき、tT の内角は t に関して連続な狭義単調減少関数である。□

Lemma 2.3 の証明（ここでは、[4] とは異なる証明を与えよう）。

長さ tx 、ty、tz をもつ辺に向い合う角を$\xi(t)$ 、$\eta(t)$ 、$\zeta(t)$ とする。双曲幾何の余弦定理より、

$$\cos\xi(t) = \frac{\cosh ty \cosh tz - \cosh tx}{\sinh ty \sinh tz}$$

が成り立つ。これを t に関して微分して、

$$\frac{d\xi}{dt}(1) = -\frac{1}{\sin\xi(1)} \frac{\sinh x}{\sinh y \sinh z}(y\cos\zeta(1) + z\cos\eta(1) - x)$$

を得る。x 、y、z を 3 辺の長さにもつ Euclid 平面 $\mathbf{E}^2$ 内の三角形 (長さ x 、y、z をもつ辺に向い合う角を X、Y、Z とする) について、

$$y\cos Z + z\cos Y - x = 0$$

が成り立つ。ところで、Toponogov の比較定理より、$X > \xi(1)$ 、$Y > \eta(1)$ 、$Z > \zeta(1)$ が成り立つので、

$$y\cos\zeta(1) + z\cos\eta(1) - x > 0$$

がいえる。よって、

$$\frac{d\xi}{dt}(1) < 0$$

を得る。$t = 1$ 以外のところでも同様に、ξ の微分が負であることがわかる。□

次の Lemma は Lemma 2.1 よりすぐわかる。

Lemma 2.4. $0 < \lambda < \Lambda < \infty$ 、$\epsilon > 0$ とする。このとき、λ、Λ、ϵ のみに依存する定数 $\delta = \delta(\lambda, \Lambda, \epsilon) > 0$ が存在して、任意の $(a, b, c) \in [\lambda, \Lambda]^3$ に対して、

$$\mathrm{Area}T(a+\epsilon, b, c) - \mathrm{Area}T(a, b, c) > \delta$$

が成り立つ。□

次は、擬等角写像についてのよく知られた性質である。

Lemma 2.5. $(a,b,c) \in (0,\infty)^3$ とし、$\{(a_i,b_i,c_i)\}_{i=1}^{\infty}$ を $i \to \infty$ のとき $a_i \to a$ 、$b_i \to b$ 、$c_i \to c$ となる点列とする。$f_i : \partial T(a,b,c) \to \partial T(a_i,b_i,c_i)$ を、$T(a,b,c)$ の辺を $T(a_i,b_i,c_i)$ の対応する辺の上に linear にうつす piecewise linear な写像とする。このとき、f_i は

F_i : $T(a,b,c) \to T(a_i,b_i,c_i)$; 擬等角写像
st. $\kappa(F_i)$ を quasi-conformal dilatation とするとき、$\lim_{i\to\infty}\kappa(F_i) = 1$

に拡張される。同様の結果が、$\mathbf{H}^2$ 内の測地的四角形からなる点列 (ただし、辺の長さの収束以外にも内角の収束の条件をもつようなものとする) についても成り立つ。□

§ 3. 四角形隙間とその Brooks parameter

$\mathbf{H}^2$ 内の 4 つの円 C_1、C_2、C_3、C_4 が図 3 のようにお互いに順々に接しているとする。$\mathbf{H}^2 \setminus \cup_{i=1}^{4}\overline{C_i}$ の有界な連結成分 I を 四角形隙間 という。4 つの円 C_1、C_2、C_3、C_4 の中心を結んでできる測地的四角形を Q と書くことにする。C_2 の中心から C_4 の中心までの距離をλ とする。3 つの円を固定したままで C_4 だけ動かすことを考える (図 4)。C_2 と C_4 が接するとき (このとき 四角形隙間 I は 2 つの三角形隙間になってしまう) の λ の値を λ_0 とし、C_4 と $\partial\mathbf{H}^2$ が接するとき (このとき C_4 は horocycle となる) の λ の値は ∞ とする。こうして、$\lambda_0 \le \lambda \le \infty$ をパラメーターとする四角形隙間たちの一次元の族を得る。四角形隙間と測地的四角形は 1 対 1 に対応しているので、測地的四角形の一次元族も得る。C_1、C_2、C_3、λ によって定まる四角形隙間を I_λ と書き、測地的四角形の方を Q_λ と書くことにし、測地的四角形の一次元族を $\mathcal{Q} = \{Q_\lambda | \lambda_0 \le \lambda \le \infty\}$ とする。

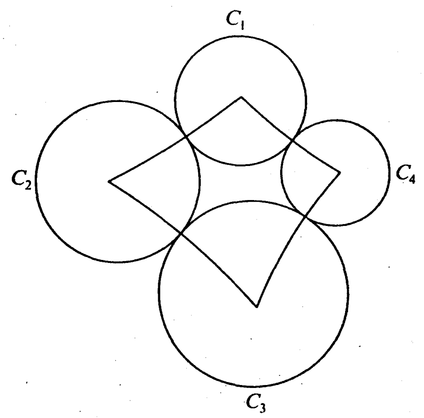

図 3

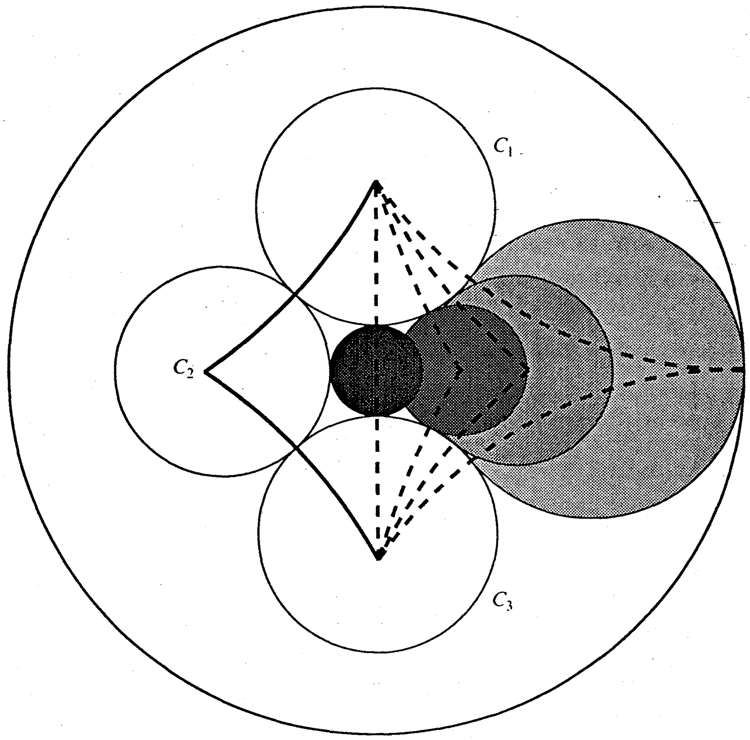

図 4

図3 のような四角形隙間 I について、C_1、C_2、C_3 に接する円が I 内にとれるとき、この円を horizontal circle と呼ぶ。C_1、C_2、C_4 に接する円が I 内にとれるとき、この円を vertical circle と呼ぶ。I 内には、horizontal circle か vertical circle のいずれか1つ存在する (horizontal かつ vertical ということもある)。そこで、次のような操作を考える。I 内に horizontal circle か vertical circle のいずれかを1つうめる。もし、I 内に4つの三角形隙間ができる（つまり、新しい円が horizontal かつ vertical のとき) ならば、もうこれ以上何もしないことにする。新しい円をうめて I 内に2つの三角形隙間と1つの四角形隙間ができるときには、この新しくできた四角形隙間について新たに horizontal circle か vertical circle のいずれかが存在するので、それをうめる。この操作を四角形隙間に対し繰り返すことを考える。有限回繰り返したところで4つの三角形隙間を得て、この操作が終了することもあるが、一般には、無限回繰り返しても4つの三角形隙間が得られなくて、有限回では終了することができない。有限回で終るとき、I (または Q) は Brooks packing をもつという。上の操作に関して、次のように点列 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ を定める (これは I に依存する点列である) :

$n_1 :=$ vertical circle が必要になるまでに horizontal circle のつづく数
$n_2 :=$ 次の horizontal circle が必要となるまでに vertical circle のつづく数
$\vdots$

この $\{n_i\}$ を用いて連分数 $\beta(I)$ を

$$\beta(I) := n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{n_4 + \ddots}}}$$

と定めると、

$$\text{四角形隙間}\, I \text{が Brooks packing をもつ} \Longleftrightarrow \beta(I) \in \mathbf{Q}$$

がいえる。λ によりパラメトライズされた I_λ に対しては$\beta(\lambda) := \beta(I_\lambda)$ とおく。Brooks [6] により、

$$\beta\text{は}\lambda\text{に関して連続かつ狭義単調増加}$$

が示されている。つまり、β は $\mathcal{Q}$ のパラメーターである。この β を $\mathcal{Q}$ のBrooks parameter という。

この Brooks parameter β を用いて $\mathcal{Q}$ を formulate し直してみよう。r_i を C_i の半径 $(i = 1, 2, 3)$ とし、α を Q_λ の C_2 の中心での内角とする。任意に $(r_1, r_2, r_3, \alpha, \beta) \in \mathbf{R}^5$ を与える。まず、r_1、r_2、r_3、α により、C_1、C_2、C_3 の配置が一意的に定まる。次に、β が $\mathcal{Q}$ をパラメトライズするということより、C_1、C_2、C_3 とβ から、四つ目の円 C_4 の配置、つまり、I 及び Q が一意的に定まる。この四角形 Q を $Q(\beta)$ あるいは $Q(r_1, r_2, r_3, \alpha, \beta)$ と書くことにする。$r_4(\beta)$ で、4つ目の円 C_4 の半径を表すことにする。$\beta_\infty := \beta(\infty) < \infty$ とすると、$\beta(\lambda_0) = 0$ だから、$\mathcal{Q}$ は

$$\mathcal{Q} = \{Q(\beta) | 0 \leq \beta \leq \beta_\infty\}$$

と表される。

このようにβ でパラメトライズされた測地的四角形の一次元族 $\mathcal{Q}$ について、次の Lemma が得られる。

Lemma 3.1. $0 < \beta_0 < \beta_\infty$ とする。このとき、任意の正の実数 $\epsilon > 0$ に対して、$0 < \beta < \beta_\infty$ が存在して、次が成り立つ：

•$|\beta - \beta_0| < \epsilon$
•$0 < r_4(\beta) - r_4(\beta_0) < \epsilon$
•$Q(\beta)$ の内角と $Q(\beta_0)$ の対応する角の差が ϵ 未満
•$\beta \in \mathbf{Q}$ $(i.e., Q(\beta)$ は Brooks packing をもつ) □

この章の最後に、図3 のような測地的四角形 Q について、Lemma 2.3 からすぐにわかる Lemma を述べておく。そのために、記号を導入しておく。$0 < t < 1$ に対して、C_1、C_2、C_3、C_4 の半径を t 倍して得られる円をそれぞれ tC_1、tC_2、tC_3、tC_4 とする。C_1、C_2、C_3、C_4 と同様に、tC_1、tC_2、tC_3、tC_4 がお互いに接するように順々にならべられて四角形隙間をもつときに、tC_1、tC_2、tC_3、tC_4 の中心を結んでできる測地的四角形を tQ と書くことにする。t が1に近ければ、tC_1、tC_2、tC_3、tC_4 はこのように配置できる。

Lemma 3.2. ある $0 < t_0 < 1$ が存在して、任意の $t_0 < t < 1$ に対して、次が成り立つ ：

•tQ の内角は Q の対応する角よりも大きい
•tQ は、つぶれていない四角形隙間をもつ
•$t \to 1$ のとき、tQ の内角は Q の対応する角に収束する □

§ 4. Labelled simplicial complex と circle packing に付随する labelled cell complex

ここでは、simplicial complex といえば、二次元(2単体は三角形のみ)のものしか考えないことにする。Simplicial complex K の label R とは、K の頂点に正の実数を対応させる関数である、すなわち、$R: K^{(0)} \to (0, \infty)$。Label 付きの simplicial complex を $K(R)$ と書き、labelled simplicial complex という。Labelled simplicial complex $K(R)$ の2単体 σ が3頂点 v_1、v_2、v_3 をもつとするとき、3辺の長さが $R(v_1) + R(v_2)$ 、$R(v_2) + R(v_3)$ 、$R(v_3) + R(v_1)$ であるような $\mathbf{H}^2$ 内の測地的三角形 $T(R(v_1), R(v_2), R(v_3))$ を $T(\sigma(R))$ と書くことにする。K の各2単体 σ を $T(\sigma(R))$ で実現して、K の組合せ的構造にしたがって $T(\sigma(R))$ をはりあわせてできる双曲的曲面を $|K(R)|$ と書く。$|K(R)|$ は、$K^{(0)}$ で 2π とは限らない cone angle をもつ。$v \in K^{(0)}$ における $|K(R)|$ の cone angle を$\theta_v(R)$ と書くことにする。

Definition 4.1. Labelled simplicial complex $K(R)$ が subpacking であるとは、各 $v \in K^{(0)}$ において $\theta_v(R) \geq 2\pi$ が成り立つときにいう。また、$K(R)$ が packing であるとは、各 $v \in K^{(0)}$ において $\theta_v(R) = 2\pi$ が成り立つときにいう。□

Simplicial complex K に対して、$\mathcal{R} := \{R : \text{label of } K | K(R) : \text{subpacking}\}$ とお

く。このとき、次が成り立つ([2]、[3])。

Lemma 4.2. $\mathcal{R} \neq \phi$ のとき、ある $\tilde{R}$ ($\in \mathcal{R}$) が存在して、$K(\tilde{R})$ が packing となる。Packing $K(\tilde{R})$ を maximal packing という。□

Lemma 4.2 の証明。

$\mathcal{R} \neq \phi$ だから、$\tilde{R}$ を

$$\tilde{R} : K^{(0)} \ni v \to \sup_{R \in \mathcal{R}}\{R(v)\} \in (0, \infty]$$

と定義できる。余弦定理より、各 $v \in K^{(0)}$ に対し $\tilde{R}(v) < \infty$ である。

まず、$K(\tilde{R})$ がsubpacking であることをみる。$\mathcal{R}$ の任意の2つの元 R_1、R_2 に対し、$R := \max\{R_1, R_2\}$ とする。K の頂点 v を任意にとり固定しておく。いま、$R_1(v) \geq R_2(v)$ と仮定する (このとき、$R(v) = R_1(v)$ である) 。v と隣り合う頂点 v' について、$R(v') \geq R_1(v')$ だから、Lemma 2.2 より、$\theta_v(R) \geq \theta_v(R_1)$ である。$K(R_1)$ は subpacking だから、$\theta_v(R_1) \geq 2\pi$ であるので、$K(R)$ も subpacking である。よって、$K(\tilde{R})$ も subpacking である。

$\theta_v(\tilde{R}) > 2\pi$ と仮定すると、v において少しだけ label を増やしても v における cone angle は、やはり 2π よりも大である。しかも、Lemma 2.2 より、v と隣り合う頂点について cone angle は大きくなる。つまり、v において少しだけ label を大きくして subpacking を得る。これは、$\tilde{R}$ の極大性に反する。よって、$\theta_v(\tilde{R}) \leq 2\pi$ である。$K(\tilde{R})$ が subpacking であることとあわせると、$K(\tilde{R})$ が packing であることがわかる。□

Riemann 面 S 上の有限個の円 (m 個としよう) による circle packing $\mathcal{C}$ が与えられているとする。このとき、次のように $\mathcal{C}$ に付随する cell complex $L(\mathcal{C})$ (2単体は三角形とは限らない) を定義する。

- $L(\mathcal{C})$ の頂点は$\mathcal{C}$の円
- 2つの$\mathcal{C}$の円 C_1の C_2が接する時、C_1と C_2が辺で結ばれる

いま、$S \backslash \cup \overline{\mathcal{C}}$ の成分のうちの1つだけが 四角形隙間 I で、他がすべて 三角形隙間であるとする。I に対応する測地的四角形を Q とする。I が $\mathcal{C}$ に属する 4つの円 C_1、C_2、C_3、C_4 により囲まれているとする。C_i の半径を r_i $(i = 1, \ldots, m)$ とし、$\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_m)$ とする。α を C_2 における Q の内角、β を Q の Brooks parameter とする。このように、S、$\mathcal{C}$ は、$(\mathbf{r}, \alpha, \beta) \in \mathbf{R}^{m+2}$ を与える。逆に、$(\mathbf{r}, \alpha, \beta)$ を与えると、labelled simplicial complex のときと同様に、L の2単体を測地的三角形と 測地的四角形 $Q(r_1, r_2, r_3, \alpha, \beta)$ で実現し、はりあわせて S を得る。$(\mathbf{r}', \alpha', \beta') \in \mathbf{R}^{m+2}$ が $(\mathbf{r}, \alpha, \beta)$ に十分近ければ、$Q(r'_1, r'_2, r'_3, \alpha', \beta')$ はつぶれていない四角形隙間である。そこで、$(\mathbf{r}', \alpha', \beta')$ に対応するように、L の2単体を測地的三角形と $Q(r'_1, r'_2, r'_3, \alpha', \beta')$ で実現して、L の組合せ的構造にしたがってそれらをはりあわせると、$L^{(0)}$ で 2π とは限らぬ cone angle をもつ双曲的曲面を得る。そこで、$(\mathbf{r}', \alpha', \beta')$

を L の label と呼び、$L(\mathbf{r}', \alpha', \beta')$ を circle packing $\mathcal{C}$に付随する labelled cell complex と呼ぶ。$|L(\mathbf{r}', \alpha', \beta')|$ で label $(\mathbf{r}', \alpha', \beta')$ により与えられる双曲的曲面を表すことにする。

§ 5. Theorem 1.3 の証明

$n = 0$ のとき、つまり、閉 Riemann 面の Teichmüller 空間 $\mathcal{T}_{g,0}$ の場合に circle packing points 全体 $C_{g,0}$ が $\mathcal{T}_{g,0}$ 内で dense であることを示す。

任意に $\mathcal{T}_{g,0}$ の点$[f] = [f : \Sigma_{g,0} \to S]$ をとっておいて固定しておく。

まず、Riemann 面 S 上に有限個 (m 個としよう) の円からなる circle packing $\mathcal{C}$ で、$S \setminus \cup\overline{\mathcal{C}}$ の各成分が三角形隙間と四角形隙間であるようなものをとる。

いま、四角形隙間が一つだけであったと仮定する。この四角形隙間 I をなす 4 つの円を C_1、C_2、C_3、C_4 とし、$\mathcal{C}$ に属する残りの円を C_5、...、C_m とする。C_i の半径を r_i^0 とし $(1 < i < m)$ 、$\mathbf{r}^0 = (r_1^0, \ldots, r_m^0)$ とする。4 つの円 C_1、C_2、C_3、C_4 の中心をむすんでできる測地的四角形を Q とすると、Q は $Q(r_1^0, r_2^0, r_3^0, \alpha^0, \beta^0)$ と表わされる。ただし、α^0 は C_2 の中心における Q の内角、β^0 は四角形隙間 I の Brooks parameter である。$\mathcal{C}$ に付随する cell complex を L とする。$(\mathbf{r}^0, \alpha^0, \beta^0)$ は L のひとつの label であり、$|L(\mathbf{r}^0, \alpha^0, \beta^0)|$ という双曲的曲面は S そのものである。

以下、cell complex L の label を変えて S とは異なる双曲的曲面をつくっていくことを考える。

Lemma 3.2 を Q に適用すると、ある実数 t_0 $(0 < t_0 < 1)$ が存在して、任意の $t_0 < t < 1$ に対して、C_1、C_2、C_3、C_4 の半径を t 倍してできる 4 つの円 (これらの配置は C_1、C_2、C_3、C_4 と同様に四角形隙間をなすようにお互いに接するようにしておく) の中心をむすんでできる測地的四角形 tQ の内角は Q の対応する角よりも真に大きい。こうしてできる tQ の C_2 の中心における内角を$\alpha^0(t)$ 、Brooks parameter を $\beta^0(t)$ とおいて、tQ を $tQ(tr_1^0, tr_2^0, tr_3^0, \alpha^0(t), \beta^0(t))$ と表わすことにする。さて、ここで、最初の labelled cell complex $L(\mathbf{r}^0, \alpha^0, \beta^0)$ の $\mathbf{r}^0$ についての label だけをいっせいに t 倍して、$L(t\mathbf{r}^0, \alpha^0(t), \beta^0(t))$ という labelled cell complex を作る。Lemma 2.3 より、$L(t\mathbf{r}^0, \alpha^0(t), \beta^0(t))$ の各三角形の内角は $L(\mathbf{r}^0, \alpha^0, \beta^0)$ の対応する角よりも真に大きい。よって、tQ の内角が Q の対応する角よりも大きいこととあわせると、$|L(t\mathbf{r}^0, \alpha^0(t), \beta^0(t))|$ は L の頂点で 2π より大きな cone angle をもつ双曲的曲面になっている。

次に、$L(t\mathbf{r}^0, \alpha^0(t), \beta^0(t))$ のひとつの label tr_4^0 (つまり 4 番目の円の半径) だけを大きくすることを考える。Lemma 3.1 より、任意の正の実数 ξ に対して、次を満たす正の実数 $\beta^0(t)(\xi)$ が存在する：

$\bullet 0 < \beta^0(t)(\xi) < \beta_\infty$
$\bullet |\beta^0(t)(\xi) - \beta^0(t)| < \xi$
$\bullet Q(tr_1^0, tr_2^0, tr_3^0, \alpha^0(t), \beta^0(t)(\xi))$ の内角と $Q(tr_1^0, tr_2^0, tr_3^0, \alpha^0(t), \beta^0(t))$ の対応する角の差が ξ より小さい
$\bullet \beta^0(t)(\xi) \in \mathbf{Q}$

ここで、ξ を十分小さくとっておいて、$Q(tr_1^0, tr_2^0, tr_3^0, \alpha^0(t), \beta^0(t)(\xi))$ の内角が Q の対応する内角よりも真に大きくできる。4つ目の円の半径を tr_4^0 から大きくしているわけだから、その半径はある値 $(tr_4^0 <)\ r_4(t)$ にたどり着く。さらに、Lemma 3.1 及び Lemma 2.2 より、ξ を十分小さくとっておいて、

$\bullet r_4(t) < r_4^0$
$\bullet$ 4つ目の円の中心での cone angle が 2πより真に大きくなる

ようにもできる。そのような ξ をひとつ決めておいて、$\beta(t) = \beta^0(t)(\xi)$ とおく。また、$\alpha(t) = \alpha^0(t)$ とする。$i \neq 4$ に対し、$r_i(t) = tr_i^0$ とし、$\mathbf{r}(t) = (r_1(t), \ldots, r_m(t))$ とする。このとき、$|L(\mathbf{r}(t), \alpha(t), \beta(t))|$ は L の各頂点で 2π よりも大きな cone angle をもつ双曲的曲面である。また、$\beta(t) \in \mathbf{Q}$ だから、$Q(r_1(t), r_2(t), r_3(t), \alpha(t), \beta(t))$ は Brooks packing をもつ。そこで、Brooks packing の円でできる complex を L に加えることにより、L の細分 K_t を考える。K_t は simplicial complex である。Brooks packing をなす円が q 個あるとし、その q 個の円の半径を $r_{m+1}(t)$ 、...、$r_{m+q}(t)$ 、そして、$\bar{\mathbf{r}}(t) = (r_1(t), \ldots, r_{m+q}(t))$ とすると、label $\bar{\mathbf{r}}(t)$ をもつ labelled simplicial complex $K_t(\bar{\mathbf{r}}(t))$ を得る。$|K_t(\bar{\mathbf{r}}(t))|$ は K_t の頂点で cone angle が 2π 以上となる双曲的曲面である。つまり、$K_t(\bar{\mathbf{r}}(t))$ は subpacking となっている。ここで、Lemma 4.2 より、K_t の maximal packing $K_t(\tilde{\mathbf{r}}(t))$ が存在することがわかる。$K_t(\tilde{\mathbf{r}}(t))$ の頂点での cone angle はすべて 2π であるので、$|K_t(\tilde{\mathbf{r}}(t))| = |L(\tilde{\mathbf{r}}(t), \alpha(t), \beta(t))|$ はなめらかな双曲的曲面である。K_t の 2 単体はすべて三角形なので、双曲的曲面 $|K_t(\tilde{\mathbf{r}}(t))|$ は、補集合が三角形隙間のみとなる circle packing $\mathcal{C}(t)$ をもつ。このとき、L の label に関して次が成立つ。

Lemma 5.1. 各 $i\ (1 \leq i \leq m)$ に対して、$t \to 1$ のとき、$\tilde{r_i}(t) \to r_i^0$ □

Lemma 5.1 の証明。

種数 g のなめらかな双曲的閉曲面の面積は $2\pi(2g-2)$ （この値を A とおく）だから、

$$\mathrm{Area}|L(\mathbf{r}^0, \alpha^0, \beta^0)| = A = \mathrm{Area}|K_t(\tilde{\mathbf{r}}(t))| \quad (t_0 < \forall t < 1)\text{。}$$

また、各 $t_0 < t < 1$ に対して、

$$A(t) := \mathrm{Area}|L(\mathbf{r}(t), \alpha(t), \beta(t))| = \mathrm{Area}|K_t(\bar{\mathbf{r}}(t))|$$

とおく。$t \to 1$ のとき、$(\mathbf{r}(t), \alpha(t), \beta(t)) \to (\mathbf{r}^0, \alpha^0, \beta^0)$ だから、$|L(\mathbf{r}(t), \alpha(t), \beta(t))|$ をなす双曲的三角形と双曲的四角形の面積はそれぞれ $|L(\mathbf{r}^0, \alpha^0, \beta^0)|$ の対応する双曲的三角形と双曲的四角形の面積に近づく。よって、

$$t \to 1 \text{ のとき、} A(t) \to A \tag{1}$$

である。ところで、$\overline{r_i}(t) \leq \tilde{r}_i(t)$ $(1 \leq i \leq m+q)$ だから、

$$A(t) \leq A \quad (t_0 < \forall t < 1) \tag{2}$$

である。

$\epsilon > 0$ とし、$\lambda := \min\{t_0 r_1^0, \ldots, t_0 r_m^0\}$ 、$\Lambda := \max\{r_1^0, \ldots, r_m^0\}$ とする。このとき、$0 < \lambda < \Lambda < \infty$ だから、Lemma 2.4 より、λ、Λ、ϵ のみに依存するある定数$\delta = \delta(\lambda, \Lambda, \epsilon)$ が存在して、任意の $(a, b, c) \in [\lambda, \Lambda]^3$ に対して、$\mathrm{Area}T(a+\epsilon, b, c) - \mathrm{Area}T(a, b, c) > \delta$ が成立つ。(1)、(2) より、ある十分小さな正数 $\eta > 0$ が存在して、$1 - t < \eta$ を満たすすべての t に対して、$(1-t)r_i^0 < \epsilon$ $(1 \leq i \leq m)$ かつ $0 < A - A(t) < \delta$ が成立つ。そこで、以後、$1 - t < \eta$ を満たす t (但し $t_0 < t < 1$) を固定しておく。$r_i(t) \leq \tilde{r}_i(t)$ $(1 \leq i \leq m)$ だから、$r_i^0 - \tilde{r}_i(t) \leq r_i^0 - r_i(t)$ $(1 \leq i \leq m)$ 。また、$r_4(t) > tr_4^0$、$r_i(t) = tr_i^0$ $(i \neq 4)$ だから、$r_i^0 - r_i(t) \leq r_i^0 - tr_i^0$ $(1 \leq i \leq m)$ 。よって、

$$r_i^0 - \tilde{r}_i(t) \leq r_i^0 - tr_i^0 = (1-t)r_i^0 < \epsilon \tag{3}$$

を得る。

今、$\tilde{r}_l(t) - r_l^0 \geq \epsilon$ がある $l \in \{1, \ldots, m\}$ に対して成立っていると仮定する。

Simplicial complex K_t の l 番目の頂点を頂点としてもつ K_t の 2 単体をσ とする。σ の他の 2 頂点が K_t の j 番目と k 番目の頂点であるとする。σ に対応する $|K_t(\tilde{\mathbf{r}}(t))|$ の測地的三角形は $T_1 := T(\tilde{r}_l(t), \tilde{r}_j(t), \tilde{r}_k(t))$ と等長的であり、σ に対応する $|K_t(\overline{\mathbf{r}}(t))|$ $= |L(\mathbf{r}(t), \alpha(t), \beta(t))|$ 内の測地的三角形は $T_2 := T(r_l(t), r_j(t), r_k(t))$ と等長的である。$|K_t(\tilde{\mathbf{r}}(t))|$ の測地的三角形の面積は $|K_t(\overline{\mathbf{r}}(t))|$ の対応する測地的三角形の面積以上だから、

$$A - A(t) \geq \mathrm{Area}T_1 - \mathrm{Area}T_2 \tag{4}$$

である。$r_i^0 > r_i(t)$ $(0 \leq i \leq m)$ であり、いま、$\tilde{r}_l(t) - r_l^0 \geq \epsilon$ と仮定しているので、$\tilde{r}_l(t)$ $\geq r_l^0 + \epsilon > r_l(t) + \epsilon$ を得る。また、$\tilde{r}_j(t) \geq r_j(t)$ 、$\tilde{r}_k(t) \geq r_k(t)$ も成立つから、Lemma 2.1 より、

$$\mathrm{Area}T_1 > \mathrm{Area}T(r_l(t)+\epsilon, r_j(t), r_k(t)) > \mathrm{Area}T_2 \tag{5}$$

である。(4)、(5) より、

$$A - A(t) > \mathrm{Area}T(r_l(t)+\epsilon, r_j(t), r_k(t)) - \mathrm{Area}T_2 \tag{6}$$

である。ところで、$\lambda \leq t_0 r_i^0 \leq r_i(t) < r_i^0 \leq \Lambda$ $(1 \leq i \leq m)$ だから、δ の取り方をみると、(6) の右辺はδ より大きい。一方、η と t の取り方より、(6) の左辺は δ より小さい。これは矛盾である。よって、$\widetilde{r_l}(t) - r_l^0 \geq \epsilon$ を満たすような l は存在しない。ゆえに、各 i $(1 \leq i \leq m)$ に対して、

$$\widetilde{r_i}(t) - r_i^0 < \epsilon \tag{7}$$

が成立つ。

(3) 、(7) より、$|\widetilde{r_i}(t) - r_i^0| < \epsilon$ を得る。□

Lemma 5.1 は、$t \to 1$ のとき、$|L(\tilde{\mathbf{r}}(t), \alpha(t), \beta(t))|$ の辺の長さ $\widetilde{r_i}(t)$ が、$|L(\mathbf{r}^0, \alpha^0, \beta^0)|$ の対応する辺の長さ r_i^0 に収束することをいっている。このことから、双曲幾何の余弦定理より、$t \to 1$ のとき、$|L(\tilde{\mathbf{r}}(t), \alpha(t), \beta(t))|$ の三角形の内角が $|L(\mathbf{r}^0, \alpha^0, \beta^0)|$ の対応する三角形の内角に収束することもわかる。このことからさらに、$t \to 1$ のとき、四角形 $Q(\widetilde{r_1}(t), \widetilde{r_2}(t), \widetilde{r_3}(t), \alpha(t), \beta(t))$ の内角が $Q(r_1^0, r_2^0, r_3^0, \alpha^0, \beta^0)$ の内角に収束することもわかる。そこで、Lemma 2.5 より、$|L(\mathbf{r}^0, \alpha^0, \beta^0)|$ の測地的三角形を $|L(\tilde{\mathbf{r}}(t), \alpha(t), \beta(t))|$ の対応する測地的三角形にうつす擬等角写像たちと、$Q(r_1^0, r_2^0, r_3^0, \alpha^0, \beta^0)$ を $Q(\widetilde{r_1}(t), \widetilde{r_2}(t), \widetilde{r_3}(t), \alpha(t), \beta(t))$ にうつす擬等角写像が存在する。それらを貼りあわせて、擬等角写像

$$\phi_t : |L(\mathbf{r}^0, \alpha^0, \beta^0)| = S \to |L(\tilde{\mathbf{r}}(t), \alpha(t), \beta(t))| = |K_t(\tilde{\mathbf{r}}(t))|$$

を定める。Lemma 2.5 より、$t \to 1$ のとき、ϕ_t の dilatation $\kappa(\phi_t)$ は 1 に収束する。ところで、$f_t := \phi_t \circ f$ とすると、$[f_t] = [f_t : \Sigma_{g,0} \to |K_t(\tilde{\mathbf{r}}(t))|]$ である。また、$|K_t(\tilde{\mathbf{r}}(t))|$ は circle packing $\mathcal{C}(t)$ をもつので、$[f_t]$ は circle packing point である。$[f]$ と $[f_t]$ の Teichmüller 距離 $\rho([f], [f_t])$ は、

$$\rho([f], [f_t]) \leq \frac{1}{2} \log \kappa(\phi_t)$$

を満たす。よって、$t \to 1$ のとき、$\rho([f], [f_t]) \to 0$ 、つまり、$[f_t]$ は $[f]$ に収束する。

$S \setminus \cup \mathcal{C}$ の四角形隙間が 2 個以上あるときも、1 個のときと同様に示せることは容易にわかる。□

参考文献

1. L. Ahlfors and L. Bers : *Riemann's mapping theorem for variable metrics*, Ann. of Math. **72** (1960), 385-404.

2. A.F. Beardon and K. Stephenson : *The Schwarz-Pick lemma for circle packings*, Illinois J. Math. **141** (1991), 577-607.

3. A.F. Beardon and K. Stephenson : *The uniformization theorem for circle packings*, Indiana Univ. Math. J. **39** (1990), 1383-1425.

4. P.L. Bowers and K. Stephenson : *The set of circle packing points in the Teichmüller space of a surface of finite conformal type is dense*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **111** (1992), 487-513.

5. P.L. Bowers and K. Stephenson : *Circle packings in surfaces of finite type: an in situ approach with applications to moduli*, Topology **32** (1993), 157-183.

6. R. Brooks : *On the deformation theory of classical Schottky groups*, Duke Math. J. **52** (1985), 1009-1024.

7. R. Brooks : *Circle packings and co-compact extensions of Kleinian groups*, Invent. Math. **86** (1986), 461-469.

8. D. Sullivan : *On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions*, Ann. of Math. Stud. **97** (1981), 465-496.