

Circle Packing の変形空間のパラメーター

東工大・理 松崎克彦

(Katsuhiko Matsuzaki)

0. 序

本稿は、R. Brooks, "On the deformation theory of classical Schottky group" Duke Math. J. 52 (1985) の中で示された、リーマン球面上の円の配置の変形空間のパラメーターをすま間を埋める円の数から構成される連分数を用いて与える方法を解説するものである。証明法は、原論文のものを多少変更して、より簡潔で見通ししやすいものにしたつもりである(本稿の補題1がポイント)。

1. 円の配置の変形空間

$\mathcal{C} = \{C_j\}$ とリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の互いに内部が交らない有限個の円周の集合で、その外部の成分は"3稜形"または"4稜形"から成るものとする(\mathcal{C} が最後の条件をみたしていても、いくつかの円周をつけ加えることにより、それらがみ

たさようにできる)。 \mathcal{C} の変形空間 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{C})$ とは、

\mathcal{C} と同じ組み合わせで τ - σ をもつ円周の配置全体の集合 (ただし向きを保つ Möbius 変換で移りあうものは同一視する) に、自然な位相 (円周の集合としての収束による位相) をかけた空間の \mathbb{C} とである。 $\mathcal{C} = \{C_j\}$ に関する反転から生成される $\widetilde{\text{Möb}}(\widehat{\mathcal{C}}) = \{ \text{向きを逆にするものも含む Möbius 変換全体} \}$ の離散部分群 Γ とすると、 \mathcal{F} は Γ の擬等角変形空間 $\text{QH}(\Gamma)$ と同一視できる。ここで、 $\text{QH}(\Gamma) = \{ [f] \text{ (} f \text{ の同値類)} \mid f \text{ は } \Gamma \text{ と両立する } \widehat{\mathcal{C}} \text{ の擬等角自己同相} \}$ であり、 f_1 と f_2 が同値とは、両者の誘導する Γ からの同型が向きを保つ Möbius 変換による互換を除いて等しいことである。以下、 \mathcal{F} の元を $[f]$ で表わし、これは円周の配置 $f(\mathcal{C})$ に対応する点であると考える。

有限生成クライン群の擬等角変形空間の場合と同じで、 Γ の不連続領域 $\Omega(\Gamma)$ の各成分は単連結であるので、 $\text{QH}(\Gamma)$ は $\Omega(\Gamma)$ を Γ の作用で割った orbifold $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ の Teichmüller 空間と同相になる ([定理 5.18]* 参照)。今の場合、 $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ の各成分には、次のどちらかが表われる。

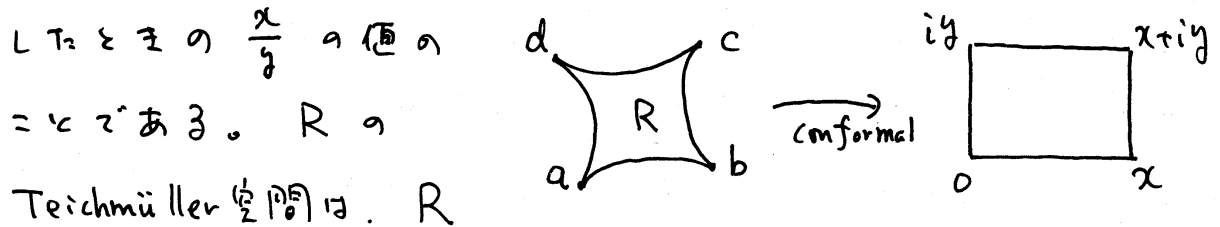
\triangle : 3-punctured sphere / anti-conformal involution

\square : 4- " / "

また、 \mathcal{C} の外部 (Γ の基本領域) が集合として $\Omega(\Gamma)/\Gamma$

* 以下、定理の番号は谷口-松崎「双曲的多次元多様体とクライン群」のもの

に一致してゐる。ここで \triangle は非自明な擬等角変形を許すための \mathbb{C} の Teichmüller 空間は 1 点からなり、 \square は実 1 次元の多角形をもち、 $\{R_1, R_2, \dots, R_g\} \in \mathcal{C}$ の外側の 4 角形の集合または $\Omega(\mathbb{T})/\Gamma$ の成分 \square の集合とすれば、 $\mathcal{F} \cong \prod_{i=1}^g \text{Teich}(R_i)$ が成り立つ。4 角形 R とその頂点 a, b, c, d の組 (これを \mathbb{C} で R と略記する) に対して、モジュール $M(R)$ とは、 R を頂点の対応を保ち図のような長方形に等角写像したときの $\frac{x}{y}$ の値のことである。 R の Teichmüller 空間は、 R

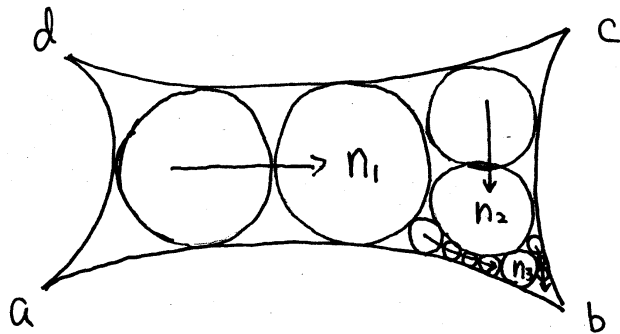


のモジュール \mathbb{C} の \mathbb{R}^2 上の座標系を定める。よって、対応 $\mathcal{F} \ni [f] \mapsto (M(f(R_1)), M(f(R_2)), \dots, M(f(R_g))) \in \mathbb{R}_+^g$ により \mathcal{F} の \mathbb{R}^g 上の \mathbb{R} - \mathbb{R} が与えられる。 $\mathcal{F} \cong \mathbb{R}_+^g$ がわかる。

2. 連分教 \mathbb{R} 上の \mathbb{R}

上では、 \mathcal{F} の \mathbb{R} 上の \mathbb{R} として 4 角形のモジュールを採用したが、以下では circle packing の問題に関して意味のある連分教を各 4 角形から構成し、それが \mathcal{F} の新しい \mathbb{R} 上の \mathbb{R} となることを示す。

4 角形 $R = (R; a, b, c, d)$ には a, b, c, d の辺 da から辺 bc に向かう、2 辺に接する円を埋め込む。可能な \mathbb{R} は 3 通り

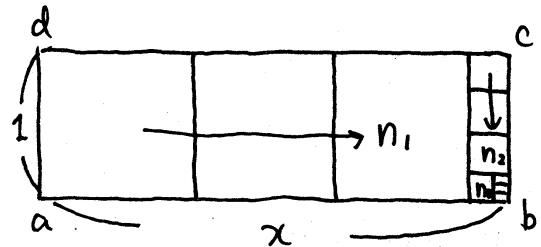


(図の場合
 $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 5 \dots$)

線 cd を埋め、左側の円の個数を n_1 とする。次に残った空き間に辺 ab に向かい、同じように円を置く。円の個数を n_2 とする。さらに残った空き間に辺 bc に向かい、 \dots という操作をくりかえして数列 n_1, n_2, n_3, \dots をつくる。つまり、4辺に接するようには円が埋まらずに終われば有限数列がでる。そうでなければ無限数列となる。

定義 4 角形 R に対して、上記のようにしてできる数列 $\{n_i\}$ からつくられる連分数 $n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{\dots}}}$ の値を $r(R)$ と定める。

類似したものをし、長方形 R に正方形を埋めてゆくと、
 でのように連分数をつくと、



$x = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3}}$ であることがわかった。これは長方形のモジュール $M(R)$ に一致する。これより、円弧4角形 R に円を埋めてゆく場合でも、 $r(R)$ は R のモジュール

$M(R)$ と関連が深い量であるとう想像される。ただし、 $M(R)$ は R の等角不変量である (すなわち、 R から別の 4 稜形 R' への頂点の対応を伴った等角写像があれば $M(R) = M(R')$) のに對し、 $r(R)$ は R の等角不変量ではない。しかし、それでも $r(R)$ は次に示すように“等角擬不変性”を言及する性質を有している。この結果は、厚論文には明示されてはいない主張であるが、本稿ではこれに着目して以下の議論を簡明にする。

補題 1 次の性質をみたす絶対定数 $K (> 1)$ が存在する：
任意の (円弧) 4 稜形 R に対し？

$$\frac{1}{K} r(R) \leq M(R) \leq K r(R)$$

が成り立つ。

証明) n を任意の自然数として、 $r(R) = \frac{1}{n}$ をみたす 4 稜形に対して K の存在を示す。 $r(R) = n$ のときは、たゞその役割を替えるだけでよい。その他の場合は、自然数またはその逆数でよいと評価すればよい。

R を圓弧 4 つの円は、Möbius 変換を施して次の図のまじり位置にあるとして一般性を失わない。 n を固定し、

$r(R) = \frac{1}{n}$ をみたす 4 稜形が圓の角が θ の n 個の $R_{n,\theta}$

と置く。 $\alpha = \frac{\theta}{2(n+1)}$ と置く。

小円の半径を t とする。

$$t = \frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \quad \text{である。}$$

わかる。 θ は $0 < \theta < 2\pi \frac{n+1}{n+2}$

の範囲を取る。 n と α は

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{n+2} \quad \text{である。}$$

一般に、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ とする。

$$\frac{2 \log 2}{\pi} \alpha \leq \log \left(1 + \frac{2 \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \right) \leq \frac{4}{2 - \sqrt{3}} \alpha$$

が成り立ち、 $R_{n, \theta}$ は上下 n 個の円環の角度 θ 分の角度 $\frac{n}{n+1} \theta$ 分の部分領域では $v = t$ になり、 $M(R_{n, \theta})$ は、

$$\frac{1}{\theta} \log(1+2t) \leq M(R_{n, \theta}) \leq \frac{n+1}{n\theta} \log(1+2t)$$

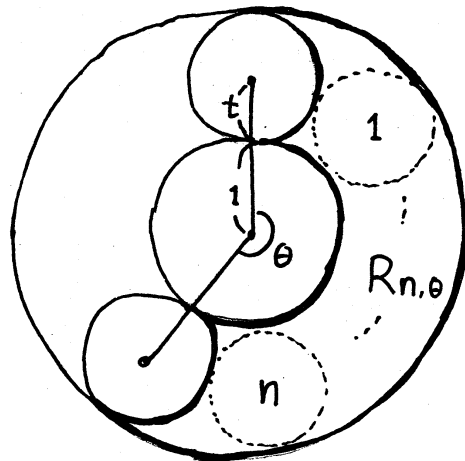
と評価できる。 $n > 2$ の式より、

$$\frac{\log 2}{\pi} \frac{1}{n+1} \leq M(R_{n, \theta}) \leq \frac{2}{2 - \sqrt{3}} \frac{1}{n}$$

を得る。 θ, n による定数 K が存在して、

$$\frac{1}{K} \frac{1}{n} \leq M(R_{n, \theta}) \leq K \frac{1}{n}$$

とできる。



定義 写像 $b: \mathcal{J} \cong \mathbb{R}_+^g \rightarrow \mathbb{R}_+^g$ を

$$[f] = (M(f(R_1)), \dots, M(f(R_g))) \mapsto (r(f(R_1)), \dots, r(f(R_g)))$$

により定め、 \mathcal{J} の Brooks 座標変換と呼ぶことにする。

3. Brooks 座標変換の単射性

以下の目標は、 $b: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ が上への同相写像であることと示すことである。また、 b の連続性は直観的に納得できる。心配な人は厚論文を見よ。ここでは b の単射性の証明をマウさんとやる。

補題 2 $b: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ は単射連続写像である。

証明) \mathcal{F} の点を表わす円周の集合 \mathcal{C} と \mathcal{C}' をとり、それぞれ外部にある 4 稜形の集合を $\{R_1, \dots, R_g\}, \{R'_1, \dots, R'_g\}$ とする。 $r(R_i) = r(R'_i)$ ($i=1, \dots, g$) ならば、 \mathcal{C} と \mathcal{C}' が \mathcal{F} の点として等しいことを示せばよい。

連分数を構成するときの手順を、各 R_i を埋める第 1 番目の円 \mathcal{C}_1 個と \mathcal{C} を合わせたものを \mathcal{C}_1 、第 2 番目までの円 \mathcal{C}_2 個と \mathcal{C} を合わせたものを \mathcal{C}_2 、同様に第 n 番までの円 \mathcal{C}_n 個と \mathcal{C} を合わせたものを \mathcal{C}_n とする。また、

$\mathcal{C}_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$ とする。 \mathcal{C}_n の外側に残る 4 稜形を R_{in} ($\subset R_i$), \dots , R_{gn} ($\subset R_g$) のように書く。 \mathcal{C}' についても同じく定義する。 $r(R_i) = r(R'_i)$ より $r(R_{in}) = r(R'_{in})$

であるから、補題 1 を用いてすべての i, n に対して

$$\frac{1}{K^2} \leq \frac{r(R_{in})}{r(R'_{in})} \leq K^2$$

が成立する。従って、 z 成分および頂点の対応を保つ K^2 -擬等角写像 $f_n: \bigcup_{i=1}^3 R_{in} \rightarrow \bigcup_{i=1}^3 R'_{in}$ がとれる。

$\mathcal{E}_n (\mathcal{E}'_n)$ の中に属する反転から生成される $\widetilde{\text{Möb}}(\widehat{\mathbb{C}})$ の離散部分群を $\Gamma_n (\Gamma'_n)$ とする。 f_n を3稜形上では等角写像になるように Γ_n の基本領域から Γ'_n の基本領域への写像に拡張し、さらに Γ_n と両立するように $\Omega(\Gamma_n) \rightarrow \Omega(\Gamma'_n)$ と拡張する。最後に、 Γ_n は幾何学的有限であるから、 Γ_n と両立する K^2 -擬等角写像 $f_n: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ に拡張される ([定理 3.21] 参照)。正規化条件をみたす K^2 -擬等角写像の列 $\{f_n\}$ は正規族となるので、極限函数 f (K^2 -擬等角) が存在する。これは、無限生成離散群のあつた同型 $\Gamma_\infty \rightarrow \Gamma'_\infty$ と誘導される。

こゝで、 Γ_∞ は極限集合 $\Lambda(\Gamma_\infty)$ 上では擬等角変形ではない (すなわち Γ_∞ と両立する擬等角写像 f の歪曲係数は $\Lambda(\Gamma_\infty)$ 上 a.e. に 0 である) ことを示すために、次の Sullivan による結果に注意する ([定理 5.11] 参照)。

命題 $\widetilde{\text{Möb}}(\widehat{\mathbb{C}})$ の離散部分群 Γ に対し、 $P_P^\infty \in \Gamma$ の Dirichlet 基本領域 ($\subset \mathbb{H}^3$) と $\widehat{\mathbb{C}} = \partial\mathbb{H}^3$ の交わりとし、

$$\mathcal{D}(\Gamma) = \bigcup_{P \in \Gamma} r(P_P^\infty), \quad \mathcal{R}(\Gamma) = \widehat{\mathbb{C}} - \mathcal{D}(\Gamma)$$

と定めると、 Γ に関する Beltrami 微分は $\mathcal{R}(\Gamma)$ 上 a.e.

に 0 である。

命題より、 f の歪曲係数が $\Lambda(\Gamma_\infty)$ 上 a.e. に 0 であることとを言うためには、 $m(\Lambda(\Gamma_\infty) \cap \mathcal{D}(\Gamma_\infty)) = 0$ (m は 2次元 Lebesgue 測度) を示せばよいが、さうは $\mathcal{D}(\Gamma_\infty)$ の定義より、これは $m(\Lambda(\Gamma_\infty) \cap P_{\Gamma_\infty}^\infty) = 0$ と同値である。今の場合、 $P_{\Gamma_\infty}^\infty$ とは \mathcal{E}_∞ の外側全体であり、また $\Lambda(\Gamma_\infty)$ は \mathcal{E}_∞ の内側および接点上に含まれることがわかる。よって、 $\Lambda(\Gamma_\infty) \cap P_{\Gamma_\infty}^\infty \subset \{\mathcal{E}_\infty \text{ の接点} \}$ (可算集合) より $m(\Lambda(\Gamma_\infty) \cap P_{\Gamma_\infty}^\infty) = 0$ が従う。

Γ_∞ は $\Lambda(\Gamma_\infty)$ 上擬等角変形でマテリアルなことがわかって、 Γ_∞ の有限生成性とまた同様に $\mathcal{QH}(\Gamma_\infty) \cong \text{Teich}(\Omega(\Gamma_\infty)/\Gamma_\infty)$ が成立するが、 $\Omega(\Gamma_\infty)/\Gamma_\infty$ の各成分は orbifold Δ であるので剛性をもつ。つまり $\text{Teich}(\Omega(\Gamma_\infty)/\Gamma_\infty)$ は 1点からなる。よって、 f により誘導された同型 $\Gamma_\infty \rightarrow \Gamma_{\infty'}$ は Möbius 変換による変換で f によるものであることがわかる。特に、 \mathcal{E}_∞ と $\mathcal{E}_{\infty'}$ は Möbius 変換で移りあうので e と e' も互いにある。以上で e と e' が f の点として等しいことが証明された。 □

4. 主定理と応用

Brooksの結果は、上記の補題1および2より直ちに導かれる。原論文では、 $b: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+^g$ の全射性の証明に Koebe - Andreev - Thurston の定理を用いているが、補題1に気がつければそれも不用である。

定理 $b: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+^g$ は上への同相写像である。

証明) b は $\mathcal{F} \cong \mathbb{R}_+^g$ からの単射連続写像であるから、領域不変性より同相写像である。また、補題1よりコンパクト集合の b による逆像はコンパクトなので、全射性も従う。□

連分数パラメータを用いた \mathcal{F} の新しい座標を Brooks 座標と呼ぶことにする。 \mathcal{F} の点 e がこの座標の有理点であるとは、 e の外側の4稜形は有限個の円を埋めて circle packing が完成することを意味する。 \mathcal{F} 上の点は \mathcal{F} で稠密に存在することがわかった。同様にして、コンパクトリーマン面のモジュライ空間の中で circle packing を許容する複素構造が稠密に存在することも示される。詳しくは次の藤井道孝氏による解説を参照せよ。