

Circle Packing に関する Thurston のアルゴリズムの収束について.

Yves Colin de Verdière :

Empilements de cercles :

Convergence d'une méthode de point fixe

Forum. Math. 1. (1989) 395 - 402

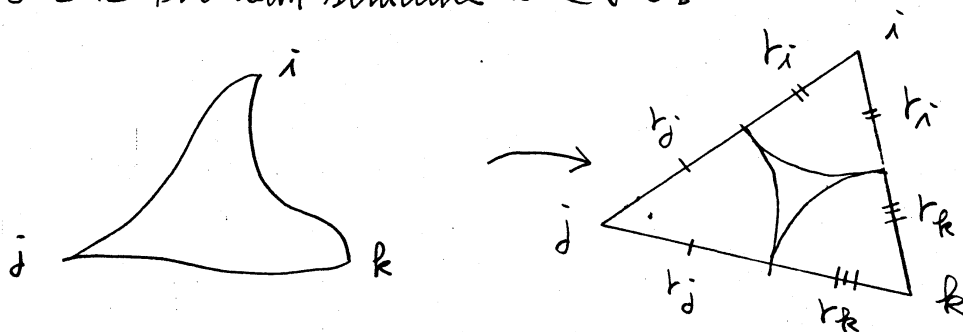
の紹介

大阪市立大学 理、数学 小森洋平 (Yohei Komori)

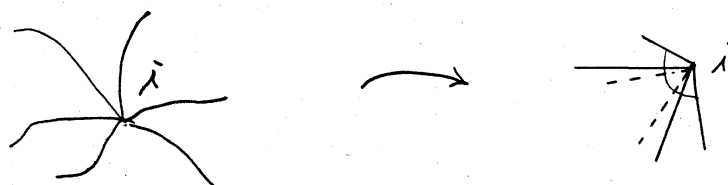
§ 序.

Thurston (とその他の人々) により、閉曲面上の組み合わせた的なデータ (三角形分割) から、(ある意味で)一意的に定曲率を距離 (Circle Packing) が定まることが知られている。この Colin de Verdière さんの論文では、特にトーラス上の与えられた三角形分割から出発して、その上の flat metric をみつけ出して Thurston のアルゴリズムの収束性について解説している。つまり、 $X$  をトーラスとし、 $\mathcal{T}$  を  $X$  上の有限な三角形分割とし、 $\mathcal{T}$  の頂点の全体を  $\{1, \dots, N\}$  とする。そこで任意の  $N$  の正の実数の組  $(k_i) = (k_1, k_2, \dots, k_N) \in (\mathbb{R}^{>0})^N$  を与えると、

頂点を  $i, j, k$  にもつ  $\mathcal{T}$  の三角形  $(i, j, k)$  の三辺を長さを、それぞれ  $r_i + r_j, r_j + r_k, r_k + r_i$  とする ことにより、 $\mathcal{T}$  の各三角形ごとに Euclidean structure が定まる。



そして、同時に頂点  $i, j, k$  の内角たちも一意に定まるが、この操作を  $\mathcal{T}$  の三角形全部で一斉に行うと、各頂点の周りに集まってくる内角の総和は  $2\pi$  になるとは限らない。



つまり  $\forall (r_i) \in (\mathbb{R}^{>0})^N$  に対し、高々頂点で cone singularity をもつ singular Riemann metric が  $X$  上に定まるが、Thurston (とその他の人々) の結果は、スカラー倍を除いて一意に  $(r_i) \in (\mathbb{R}^{>0})^N$  が存在し、三角形分割  $\mathcal{T}$  に対し、上の構成で  $(r_i)$  が  $X$  上の metric を定義すると、各頂点の周りで頂度  $2\pi$  になる、つまり flat metric になっているということである。そこで Thurston の PIR アルゴリズムとは、この  $\mathcal{T}$  に対する flat metric  $(r_i) \in (\mathbb{R}^{>0})^N$  をみつけてくる手順のことである。

スカラ一倍を消すため、

$$\Delta := \{ (r_i) \in (\mathbb{R}^{>0})^N \mid \sum_{i=1}^N r_i = 1 \}$$

なる、 $N-1$ 次元 cell を与えると、この  $\Delta$  は、( $\mathcal{T}$  を固定した時の)  $X$  上の、 $\mathcal{T}$  の頂点で高々 cone singularity のみをもつ metric 全体である。Thurston のアルゴリズムは具体的に  $\mathcal{T}$  は変換

$$G : \Delta \rightarrow \Delta$$

の iteration  $G^k := \underbrace{G \circ G \circ \dots \circ G}_{k \text{ 回}}$  で得られる。つまり、任意の

$(r_i) \in \Delta$  に対し、 $G^k(r_i)$  が  $k \rightarrow \infty$  で、unique flat metric (つまり circle packing) に収束していくことを示す。証明のアイデアとしては、 $\Delta$  に ルム を定義し、 $G$  の iteration  $G^k$  が そのルム に関して、縮小写像になっていることを、 $G$  の微分を計算することによってみる。その時、本質的なのは  $G$  の微分の行列の性質であり、それは離散論の transfer matrix になっている。このことは §0 でまとめておく。そして §1 で、与えられた三角形分割  $\mathcal{T}$  に対する circle packing の存在と一意性を示し、§2 で上に述べたアルゴリズムの収束性をみる。この論文は短かいが、初等的な方法で深い結果を示しているのが感心した。しかし、index 等のまちがいの多さに素人の私は、たいへん読むのに苦労したことと、(一応読み終えた今となっては) 一言、言っておきたい。

## §0. 道具

以下の2つの節において、一番大切(かつこれしか使わない)なアイデアは次の Lemma である(証明はとてもやさしい)。

key lemma.

$A: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  なる  $N \times N$  行列  $A = (a_{ij})$  に対し、ある正の定数  $\alpha > 0$  が存在し、

$$a_{ij} \geq \alpha > 0 \quad (\forall i, j = 1, \dots, N)$$

$$\text{かつ} \quad \sum_{j=1}^N a_{ij} = 1 \quad (\forall i = 1, \dots, N)$$

とする。この時、 $(x_i) \in \mathbb{R}^N$  に対し、 $(x_i') := A(x_i)$  とおくと、  
 $\forall i = 1, \dots, N$  で

$$(1-\alpha) \inf_j x_j + \alpha \sup_j x_j \leq x_i' \leq (1-\alpha) \sup_j x_j + \alpha \inf_j x_j$$

が成り立つ。特に  $(y_i) \in \mathbb{R}^N$  が  $A$  の固定点 (i.e.  $(y_i) = A(y_i)$ ) 存在すれば

$$(y_1, \dots, y_N) = (c, \dots, c) \quad (\exists c \in \mathbb{R})$$

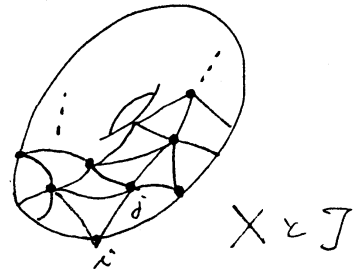
//

(注) 上で表れた行列  $A = (a_{ij})$  は確率論で出てくる遷移行列 (transfer matrix) そのものである。

§1. ト-ラス上の circle packing の存在と一意性.

以下、 $X$  を ト-ラス、 $\mathcal{T}$  を  $X$  上の 三角形分割.

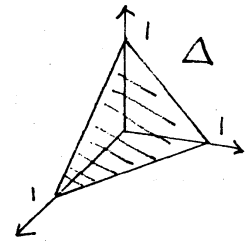
$\{1, \dots, N\}$  を  $\mathcal{T}$  の頂点の全体とし、頂点  $i$  と  $j$  が隣接している時、 $i \sim j$  とかくこととする.



正の実数全体を  $\mathbb{R}^{>0}$  とかき.

$$\Delta := \{ \rho = (r_i) \in (\mathbb{R}^{>0})^N \mid \sum r_i = 1 \}$$

とかくと、 $\Delta$  は  $N-1$ 次元 cell になる.



任意の  $\rho = (r_1, \dots, r_N) \in \Delta$  に対し.

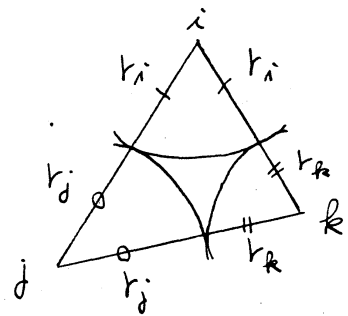
$\mathcal{T}$  の三角形  $(i, j, k)$  の三辺を  $r_i + r_j$ ,  $r_j + r_k$ ,  $r_k + r_i$  とおき.

Euclidean triangle の構造を与えることで.

高々各頂点に対し、cone singularity を持つ

Singular Riemann metric  $g_\rho$  が  $X$  上に

定まる。その時、三角形  $(i, j, k)$  の各頂点



の内角が一意的に定まるが、頂点  $i$  の周りで

metric  $g_\rho$  が smooth であるための必要十分条件は、頂点  $i$  の周りで

の内角の和が頂度  $2\pi$  になることである。そこで metric  $g_\rho$

の頂点  $i$  での曲率  $K_i$  を

$$k_i := 2\pi - (\text{頂点 } i \text{ の周りの内角の和})$$

と置く。この時、次の Gauss-Bonnet の定理がある。

### Gauss-Bonnet の定理

$$\sum_{i=1}^N k_i = \chi(X) = 0 \quad (\chi(X) \text{ は } X \text{ のオイラー数})$$

そこで

$$Z := \{ k = (k_i) \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=1}^N k_i = 0 \}$$

なる  $N-1$  次元 affine space を考えると、次の写像  $\varphi$  が定まる。

$$\varphi : \underbrace{(\mathbb{R}^{>0})^N}_{\rho = (\rho_i)} \longrightarrow \underbrace{Z}_{(k_i)} \quad (\text{metric } g_\rho \text{ の頂点 } i \text{ での曲率})$$

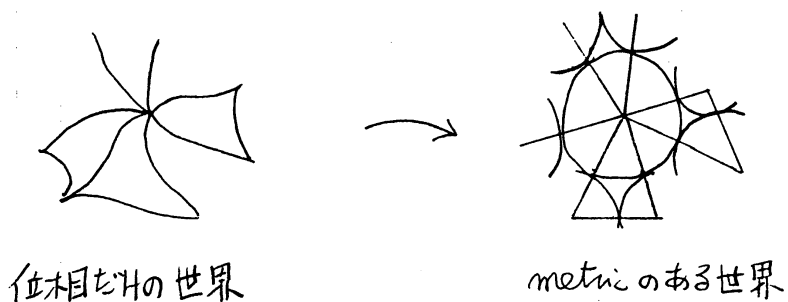
つまり  $\varphi$  は metric  $g_\rho$  の“特異性”を取り出す写像であるが、Thurston の結果は次である。

### Theorem 1.

$$\varphi|_{\Delta} : \Delta \longrightarrow \varphi(\Delta) \subset Z$$

は diffeomorphism.  $\exists$   $S$   $\varphi(\Delta)$  は bounded convex polyhedron で  $0 \in \varphi(\Delta)$ . //

つまり、 $0 \in \varphi(\Delta)$  から  $\varphi$  は単射より、任意の三角形分割  $\mathcal{T}$  に対し、スケーリングを除いて一意的に  $X$  上の flat metric  $g_\rho$  (これを circle packing と呼ぶ) が存在し、 $\mathcal{T}$  の各三角形は Euclidean triangulation の構造が定まる。



証明は次の Lemma 1, Lemma 2 の順に行う。

### Lemma 1.

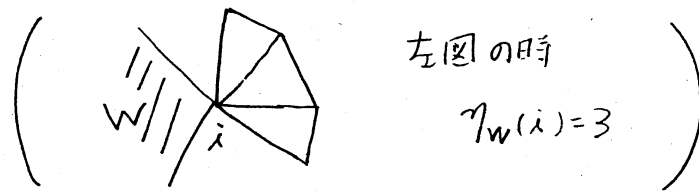
$\varphi|_{\Delta} : \Delta \rightarrow Z$  は locally diffeo. つまり微分  $\varphi'|_{\Delta}$  は全単射. ( おと  $\varphi$  は open map お  $\varphi(\Delta) \subset Z$  は open ). //

### Lemma 2.

三角形分割  $\mathcal{T}$  の、proper connected complete subcomplex  $W$  に対し (ここで subcomplex  $W$  が "complete" とは、 $\mathcal{T}$  の辺で両端の頂点が2つとも  $W$  に入るならばこの辺自身も  $W$  に含まれ、また  $\mathcal{T}$  の三角形で3辺とも  $W$  に入るならば、この三角形自身も  $W$  に含まれることをいう)、その頂点全体を  $W_0$ , 辺全体を  $W_1$ , 面全体を  $W_2$  とする。さらに  $\mathbb{R}^N$  上の線型不等式  $E_W$  を次のように定義する。

$$E_W: \sum_{i \in W_0} k_i > 2\pi \chi(W) - \pi \left( \sum_{i \in W_0} \eta_W(i) \right)$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{ここで } \chi(W) := \#W_0 - \#W_1 + \#W_2 \quad (W \text{ のオイラー数}) \\ \eta_W(i) := i \text{ を頂点とした } \mathcal{T} \text{ の三角形で、} W \text{ に辺が含まれる} \\ \text{ものの数} \end{array} \right)$$



$P := \{ (k_i) \in \mathbb{Z} \mid (k_i) \text{ は 右の } w \text{ で 不等式 } E_w \text{ をみたす} \}$   
 とおくと、次の a), b), c) が成立する。

a)  $\varphi(\Delta) \subset P$

b)  $\varphi: \Delta \rightarrow P$  は proper (おと  $\varphi: \Delta \cong P$ )

c)  $0 \in P$  //

Lemma 2 の証明は、相馬さんの解説の方がより一般的でわかりやすい  
 と思うのでここでは省略し、以下 Lemma 1 の証明をみる。

(Lemma 1 の証明)

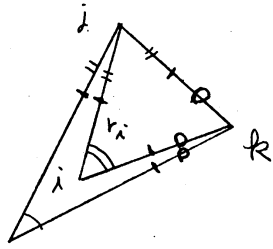
まず  $\frac{\partial k_i}{\partial r_i} > 0$

$\frac{\partial k_i}{\partial r_j} < 0$  ( $i \neq j$  から  $i \sim j$ )

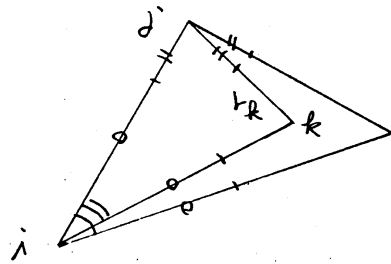
$\frac{\partial k_i}{\partial r_j} = 0$  ( $i \neq j$  から  $i \not\sim j$ )

理由は次の図々、 $k_i$  の定義式からわかる(と思う)。





( $r_i$  が大きくなると頂点  $i$  の  
内角は小さくなる。)



( $r_k$  が大きくなると頂点  $i$  の  
内角は大きくなる)

また  $\varphi(\lambda t) = \varphi(t)$  ( $\forall \lambda \in \mathbb{R}^{>0}$ ) かつ

$$\sum_{j=1}^N r_j \frac{\partial k_i}{\partial r_j} = 0 \quad (i=1, \dots, N)$$

よって  $\ker(\varphi'(r_0))$  の元を  $(x_j)$  とすると、

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial k_i}{\partial r_j} x_j = 0 \quad (i=1, \dots, N)$$

よって  $y_j := \frac{x_j}{r_j}$  とおくと、 $\sum_{j=1}^N \frac{\partial k_i}{\partial r_j} r_j \cdot y_j = 0$ . ( $i=1, \dots, N$ )

よって  $N \times N$  行列  $(b_{ij})$  を

$$\begin{aligned} b_{ii} &= 0 \\ b_{ij} &= - \frac{r_j \frac{\partial k_i}{\partial r_j}}{r_i \frac{\partial k_i}{\partial r_i}} \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N b_{ij} &= 1 \quad (\forall i) \\ b_{ij} &> 0 \quad (i \sim j) \\ y_i &= \sum_{j=1}^N b_{ij} y_j \quad (\forall i) \end{aligned}$$

ここで、三角形分割  $\mathcal{T}$  は有限かつ、その直径  $\text{diam } \mathcal{T}$  が与えられ、  
 $k \geq \text{diam } \mathcal{T}$  の時、 $(b_{ij})^k$  は  $\mathcal{S}_0$  の key lemma の条件を満たす。  
 および 特に  $(y_i) \in \mathbb{R}^N$  は  $(y_1, \dots, y_N) = (c, \dots, c)$  ( $\exists c \in \mathbb{R}^N$ )  
 とかける。つまり  $\ker(\varphi'(r_0))$  は  $\sum_{j=1}^N r_j \frac{\partial}{\partial r_j}$  方向の 1次元のみ。  
 および  $\Delta \subset (\mathbb{R}^{>0})^N$  の接空間の方向と直交しており、また  $\Delta$  と  $Z$  の  
 次元が共に  $N-1$  であることから  $\varphi'(r_0)$  ( $\forall r_0 \in \Delta$ ) は全単射である  
 ことがわかった。 //

## §2. Thurston の algorithm とその収束.

§1 では、トーラス上の与えられた三角形分解了に対し、flat metric がスカラー一倍を除いて、一意に決まることをみたが、この節では、任意の singular metric  $\rho \in \Delta$  から出発して、 $\Delta$  から  $\Delta$  への変換  $G$  (Thurston の algorithm) の合成により、 $G^n(\rho) \in \Delta$  が  $n \rightarrow \infty$  で、三角形分解了に付随する flat metric (i.e. packing)  $\rho_0 \in \Delta$  に収束することを見る。

以下、スカラー一倍の作用を translation に直すため、変数変換

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^{>0})^N & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{R}^N \\ \downarrow & & \downarrow \\ (r_i) & \mapsto & (x_i) := (\log r_i) \end{array}$$

とある。また  $\mathbb{R}^N$  を translation の作用で割った空間を  $\mathbb{R}^N/D$  とする。(ここで  $D := \{(t, t, \dots, t) \in \mathbb{R}^N \mid t \in \mathbb{R}\}$ )

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^{>0})^N & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{R}^N \ni (t_i) \\ \uparrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ \Delta & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{R}^N/D \ni [t_i] \end{array}$$

おと、目的の Thurston の algorithm  $G: \Delta \rightarrow \Delta$  のかわりに、translation  $D$  の作用と可換な写像  $\tilde{F}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  をまず定義し、それに基づいて、写像  $F: \mathbb{R}^N/D \rightarrow \mathbb{R}^N/D$  を定める。

### Lemma 3.

$U \geq 3$  を固定する。この時、任意の元  $(r_1, \dots, r_U) \in (\mathbb{R}^{>0})^U$  に対し、ある  $r_0 > 0$  が unique に存在して、3辺の長さが  $(r_0 + r_i, r_i + r_{i+1}, r_{i+1} + r_0)$  なる  $U$  角の三角形  $(0, i, i+1)$  の頂点  $0$  での内角の和が丁度  $2\pi$  にできる。

(注) 中心  $i$ , 半径  $r_i$  の円  $C_i$  ( $0 \leq i \leq U$ ) をかくと、 $C_0, C_i, C_{i+1}$  は外接しあうが、 $|i-j| \geq 2$  の時は  $C_i$  と  $C_j$  は交わるかもしれない。

(右図の 2 と 4)

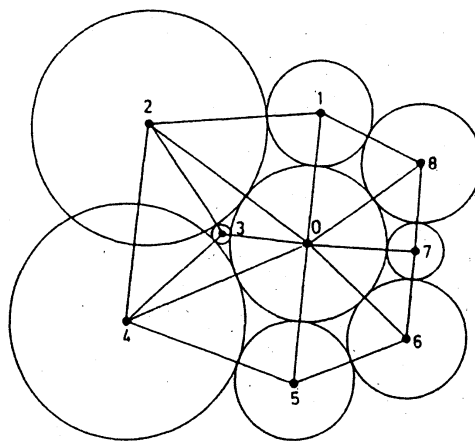


Fig. 4: Choix de  $r_0$ ; les cercles  $C_2$  et  $C_4$  recourent!

(証明)

$$\begin{array}{ccc}
 K: \mathbb{R}^{>0} & \rightarrow & \mathbb{R} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 r & \mapsto & K(r) := 2\pi - \sum_{i=1}^U \alpha_i
 \end{array}$$

(ここで  $\alpha_i$  は 3辺の長さが  $(r+r_i, r_i+r_{i+1}, r_{i+1}+r)$  の三角形  $(0, i, i+1)$  の頂点  $0$  での内角)

とおくと、 $K(0) = (2-U)\pi < 0$  (☹  $U \geq 3$ )

$$K(+\infty) = 2\pi > 0$$

かつ  $k$  は連続で単調より、中間値の定理より、条件を満たす  $t_0 > 0$  が unique に存在する。 //

そこで写像  $\tilde{F}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  を次のように定義する。

$$\begin{array}{ccc} \tilde{F}: \mathbb{R}^N & \rightarrow & \mathbb{R}^N \\ \downarrow & & \downarrow \\ (t_i) & \mapsto & (F_i(t_1, \dots, t_N)) := (\log k_i^*) \end{array}$$

ここで  $t_i^*$  は、三角形分割  $\mathcal{T}$  において、頂点  $i$  と隣接する頂点  $j$  ( $j \sim i$ ) たちに対し、 $t_j := e^{t_j}$  として、この  $(t_j)$  に対し、Lemma 3 で一意に定まる  $t_0$  を  $t_i^*$  とする。別の言い方をすると、頂点  $i$  での曲率  $k_i$  が 0 になるような metric  $\rho$

$$\rho = (r_1, \dots, r_{i-1}, t_i^*, r_{i+1}, \dots, r_N)$$

の  $i$  成分のこと。この時、次のことは明らか。

### Claim

$\forall t \in \mathbb{R}$  に対し

$$\tilde{F}(t_i + t) = \tilde{F}(t_i) + t$$

つまり  $\tilde{F}$  は、translation  $D$  の作用と可換より、次の写像  $F$  は well-defined. これを Thurston の algorithm という。

$$\begin{array}{ccc} F: \mathbb{R}^N / D & \rightarrow & \mathbb{R}^N / D \\ \downarrow & & \downarrow \\ [t_i] & \mapsto & [\tilde{F}(t_i)] \end{array}$$

次の主張も、写像  $F$  の定義より明らか。

### Claim

$T$ -テラス上の三角形分割  $J$  に対し、スカラー一倍を除き一意に定まる flat metric (つまり packing) を  $[a_i] \in \mathbb{R}^N/D$  とおくと、 $[a_i]$  は写像  $F: \mathbb{R}^N/D \rightarrow \mathbb{R}^N/D$  の unique fixed point. //

この節の主結果は次の、 $F$  の収束性である。

### Theorem 2.

$\forall [x_i] \in \mathbb{R}^N/D$  に対し、

$$F^n([x_i]) \rightarrow [a_i] \quad (n \rightarrow \infty)$$

ここで、 $[a_i]$  は  $J$  の packing.  $F^n$  は  $F$  の  $n$  回合成写像

$$F^n := \underbrace{F \circ F \circ \dots \circ F}_{n \text{ 回}} \text{ とある.} //$$

証明のアイデアは次の通り。

- ① 収束を量的にみるため、 $\mathbb{R}^N/D$  に ノルム  $\|\cdot\|$  を定義する。
- ② 収束を局所的にみる。つまり、 $\mathbb{R}^N/D$  上の任意のコンパクト部分集合上で、 $F^k$  ( $\forall k \geq \text{diam} J$ ) の微分のノルムが 1未満の定数で一様におさえられることを示す。

まず  $\mathbb{R}^N/D$  上のノルムを次のように定める。

$$\|[t_i]\| := \frac{1}{2} (\sup_i t_i - \inf_i t_i)$$

この時、§0の key lemma 4)次がわかる。

Lemma

$A: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  を  $N \times N$  行列  $A = (a_{ij})$  とし、

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} = 1 \quad (\forall i)$$

$$a_{ij} \geq \alpha > 0 \quad (\exists \alpha > 0, \forall i, j)$$

をみたすとす。この時、 $D := \{(t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N \mid t_i \in \mathbb{R}\}$  に対し、

$$A(D) \subset D$$

4)  $\hat{A}: \mathbb{R}^N/D \rightarrow \mathbb{R}^N/D$

が定まるがこの写像  $\hat{A}$  のノルム  $\|\hat{A}\|$  は次をみたす。

$$\|\hat{A}\| \leq 1 - 2\alpha < 1 \quad //$$

以下、Theorem 2の証明に入る。

まず §1の Lemma 1と同様に、 $t_1, \dots, t_N$  の函数  $K_i(t_1, \dots, t_N)$

1)  $\frac{\partial K_i}{\partial t_i} > 0$

$$\frac{\partial K_i}{\partial t_j} < 0 \quad (t \in L, j \neq i \text{ かつ } j \sim i)$$

$$\frac{\partial K_i}{\partial t_j} = 0 \quad (t \in L, j \neq i \text{ かつ } j \not\sim i)$$

一方  $K_i(t_1, \dots, t_{i-1}, F_i(t_1, \dots, t_N), t_{i+1}, \dots, t_N) \equiv 0$  4)

$$\frac{\partial F_i}{\partial t_j} = - \frac{\frac{\partial K_i}{\partial t_j}}{\frac{\partial K_i}{\partial t_i}} \quad (t \in L, i \neq j)$$

おと写像  $F: \mathbb{R}^N/D \rightarrow \mathbb{R}^N/D$  の微分  $(\frac{\partial F_i}{\partial t_j})$  は

$$\frac{\partial F_i}{\partial t_j} > 0 \quad (i \neq j \text{ かつ } i \sim j)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial t_j} = 0 \quad (\text{その他})$$

さらに  $K_i(t_1+c, \dots, t_N+c) = K_i(t_1, \dots, t_N) \quad (\forall c \in \mathbb{R})$  より

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial K_i}{\partial t_j} = 0$$

$$\therefore \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial t_j} = 1$$

おと §1 の Lemma 1 と同様に、 $\forall k \geq \text{diam. } \mathcal{J}$  に対し  $F^k$  の微分

$$\left( \frac{\partial F_i}{\partial t_j} \right)^k$$

は、 $\mathbb{R}^N/D$  の任意のコンパクト部分集合上で §0 の key lemma の条件を満たす。おと 三角形分割  $\mathcal{J}$  に対する packing  $\{[a_i]\} \in \mathbb{R}^N/D$  とおす。

$\forall k \geq \text{diam. } \mathcal{J}$ ,  $\forall [t_i] \in \mathbb{R}^N/D$  に対し、 $\|\cdot\|$  の定数  $\mathbb{R}^N/D$  上の距離を  $d(\cdot, \cdot)$  とおす時、前のページの Lemma より、

$$d([a_i], F^k([t_i])) < d([a_i], [t_i])$$

おと  $\exists c > 0$ ,  $0 < k < 1$

$$d([a_i], F^n([t_i])) \leq c \cdot k^n \quad (\forall n \geq \text{diam. } \mathcal{J})$$

以上で、Thurston の algorithm  $F: \mathbb{R}^N/D \rightarrow \mathbb{R}^N/D$  の収束が言えて、

Theorem 2 の証明ができた。 //

(以上)