数理解析研究所講究録
893巻 1995年 24-35

Circle packing のリーマン写像への収束

東工大・理 松崎克彦
(Katsuhiko Matsuzaki)

0. 序

本稿は，Rodin - Sullivan [5] の解説である。この論文では，Thurstonにより予想された次の命題の証明がされている：「平面上の単連結領域 R 内に半径 ε の regular hexagonal circle packing を与えたとき，単位円 D 内の Andreev packing (用語は後述) で，circle packingから定まる単体的複体どうしが同相となるものが存在し，その単体写像を f_ε とする。このとき，正規化条件のもと f_ε は $\varepsilon \to 0$ のとき等角写像 $f: R \to D$ に広義一様収束する。」つまり，circle packing の対応から得られる有限単体的複体間の写像がリーマン写像を近似するのである。

原論文の証明は簡潔でわかりやすいので，本稿では証明のたすじのみを与えるにとどめる。しかし，この論文は circle packing に関する研究の原典のひとつであり，その後結果の改良や拡張が既にいくつかなされているので，関連する箇所

でそれらの文献を挙げるようにした。

1. 定理の主張

以下、次の記号を用いる。

R: $\mathbb{C}$ 内の有界単連結領域

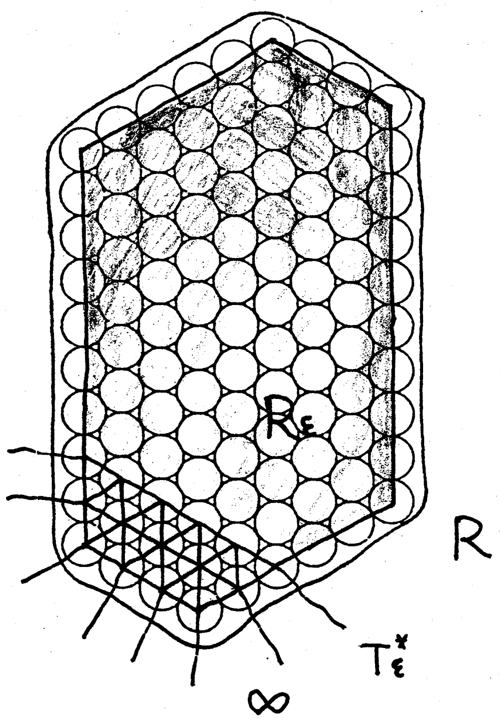
H_ε: 半径 ε の regular hexagonal circle packing

$I_\varepsilon := \{ c \mid c$ は H_ε の円で R の inner circle $\}$

$B_\varepsilon := \{ c \mid c$ は H_ε の円で R の border circle $\}$

ただし、c が R の inner circle とは、c とそれに接する6個の円すべてが R に含まれる円のことであり、c が R の border circle とは、inner circle ではないが R に含まれる円のことである。

$C_\varepsilon := I_\varepsilon \cup B_\varepsilon \ (\subset R)$

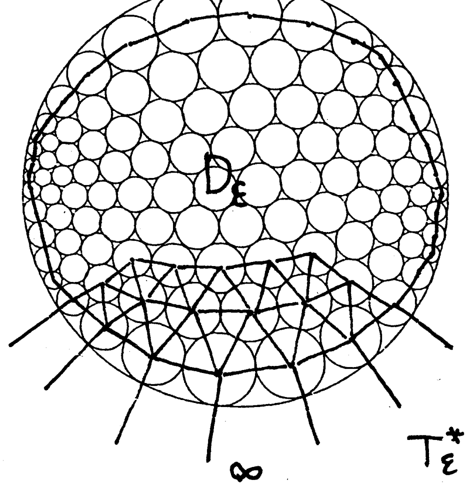


T_ε: C_ε の隣接する円の中心を結ぶ線分全体が定める(R の部分集合の)三角形分割

R_ε: 三角形分割 T_ε をもつ R 内の単体的複体

T_ε^*: ∞ を頂点とする三角形を図のように T_ε につけ加えてできた $\hat{\mathbb{C}}$ の三角形分割

Koebe-Andreev-Thurston の定理より，$\hat{\mathbb{C}}$ の circle packing で，対応する三角形分割 $T_\varepsilon^{*\prime}$ が T_ε^* と同相となるもの（$\hat{\mathbb{C}}$ の T_ε^* が定める Andreev packing と呼ぶ）が Möbius 変換による同値を除いて一意的に存在する。ここでは，次のような正規化条件を置いて Andreev packing を一意的に定める：



(i) ∞ を中心とする円を単位円とする。

(ii) R 内に異なる2点 z_0, z_1 を固定しておき，C_ε の円のうち中心がそれに最も近いものをそれぞれ c_0, c_1 と決め（等距離のときは適当にひとつを選ぶ規則があるとする），Andreev packing で c_0, c_1 に対応する円を c_0', c_1' としたとき，c_0' の中心は原点，c_1' の中心は正の実軸上にある。

このような Andreev packing から単位円を除いたものを C_ε' とし（D の T_ε が定める Andreev packing），C_ε' の隣接する円の中心を結んでできる三角形分割を T_ε'，それにより定義される D 内の単体的複体を D_ε とする。また，同相 $T_\varepsilon \to T_\varepsilon'$ を与える（PL）単体写像を $f_\varepsilon : R_\varepsilon \to D_\varepsilon$ とする。以上の記号のもと，Rodin-Sullivan の結果は次のとおりである。

定理　$f: R \longrightarrow D$ を正規化条件 $f(z_0)=0$, $f(z_1)>0$ をみたす等角写像(リーマン写像)とすると、$\varepsilon \to 0$ のとき、f_ε は f に広義一様収束する。

2. 幾何学的な補題

定理の証明に用いる補題を述べる。はじめの二つの補題の証明は省略する(原論文 [5] をみよ)。

補題1 (Ring Lemma)　単位円に外接する n 個の円からなるサイクルをなす各円の半径は $r(n)$ 以上である。ただし、$r(n)$ は n のみによる定数である。

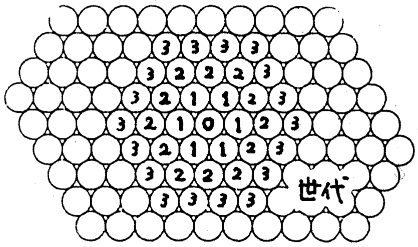
注: $r(n)$ の具体的な評価については Hansen [2] をみよ。

補題2 (Length-Area Lemma)　単位円板 D の circle packing があるとし、C をその中のひとつの円、S_j $(j=1,\cdots,k)$ を n_j 個の円からなるチェインで、各チェインは C と原点および C と ∂D のある点を分離し、チェインどうしは互いに交わらないものとする。このとき、C の半径 $\mathrm{rad}(C)$ は

$$\mathrm{rad}(C) \leq \left(n_1^{-1}+n_2^{-1}+\cdots+n_k^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

をみたす。

<u>補題3</u> (Hexagonal Packing Lemma) 0に収束する正数列 $\{s_n\}$ で次をみたすものが存在する: P_n を平面上の circle packing で regular hexagonal circle packing の第n世代以下全体 HCP_n と同相であるとすると、P_n の第1世代以下の7個の円のうちの任意の c, c' は、



$$1 - s_n < \frac{\mathrm{rad}(c)}{\mathrm{rad}(c')} < 1 + s_n$$

をみたす。

注: 上の s_n を hexagonal packing constant と呼ぶ。He [3] は、$s_n \leq \frac{c}{n}$ (cはある定数) を証明している。

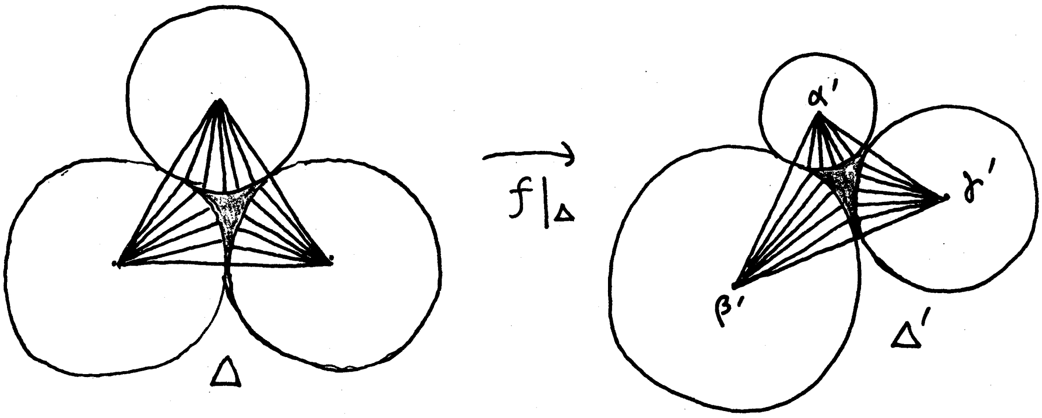
証明) 上のような s_n が存在しないと仮定すると、circle packing の列 $\{P_n\}$ (ただし、P_n は HCP_n と同相) で、各nについて第1世代以下の円の中で $\frac{\mathrm{rad}(c_n)}{\mathrm{rad}(c_n')} \geq 1+\varepsilon$ をみたす c_n, c_n' がとれるものが存在する。いま、P_n の第0世代は単位円であると仮定してよい。このとき補題1より、P_n の第1世代の円の半径は上下から一様に評価できるので、P_n の部分列 $P_{n'}$ で、第1世代以下がある circle packing Q_1 ($\cong HCP_1$) に収束するものが選べる。さらに再び補題1より、$P_{n'}$ の第2世代の円の半径も上下から一様に評価できるので、

$P_{n'}$ の部分列 $P_{n''}$ で，第2世代以下がある Q_2 ($\cong HCP_2$) に収束するものがとれる。以下これをくりかえすと，P_n の部分列で，（無限世代をもつ）regular hexagonal packing HCP_∞ と同相な circle packing Q_∞ に収束するものが存在することがわかる。仮定より，P_n の第1世代以下については，$\frac{rad(C_n)}{rad(C_n')} \geqq 1+\varepsilon$ をみたす C_n, C_n' が存在したので，極限の Q_∞ についても，第1世代以下のある円 C, C' で $\frac{rad(C)}{rad(C')} \geqq 1+\varepsilon$ をみたすものがとれる。しかし，次の regular hexagonal packing の一意性より，$Q_\infty = HCP_\infty$ でなければならないので矛盾が生じる。

<u>補題4</u>（regular hexagonal packing の一意性）平面上の circle packing H' で HCP_∞ と同相なものは，HCP_∞ である。

証明）H を regular hexagonal packing とし，H, H' がつくる単体的複体をそれぞれ R, R' とする。同相 $H \to H'$ により単体写像 $f: R \to R'$ が定まるが，R の各三角形 Δ 上で $f: \Delta \to \Delta'$ を次のようにして改めて定義する：Δ 内にある円弧3角形 $\blacktriangle$ から Δ' 内のそれへの等角写像をつくり，$\Delta - \blacktriangle$ の各成分である扇形上では，等角写像の境界対

点を半径方向には線型に拡張して同相写像 $f|_\Delta$ をつくる。



$f|_\Delta$ は擬等角写像であり、その最大歪曲率 K_Δ は Δ' の3つの角 α', β', γ' のみによって決まることが計算できる。また、この角は Δ' の頂点を中心とする3つの円の半径比のみによって定まるが、各円を基準にして補題1を適用することにより、半径比は上下から一様に押えられていることがわかる。よって α', β', γ' も上下から一様に押えられるので、K_Δ は Δ によらずある数 K より小さい。従って、$f : R \to R'$ は全体で K-擬等角写像となっている。特に、いま $R = \mathbb{C}$ であるから、$\mathbb{C}$ の擬等角写像による像 R' も $\mathbb{C}$ であることがわかる。つまり、H' も $\mathbb{C}$ 全体の circle packing である。

H (H') の第n世代以下全体を H_n (H_n') とし、H_n (H_n') の円に関する反転から生成される(向きを保たないものも許す) Möbius 変換の離散部分群を G_n (G_n') とする。f は

H の円を対応する H' の円に写すので，H_n の円の外側にある領域を H_n' の円の外側にある領域に写す。これを G_n の作用と両立し，同型 $G_n \to G_n'$ を誘導するように不連続領域 $\Omega(G_n)$ から $\Omega(G_n')$ への K-擬等角写像に拡張したものを f_n とする。G_n は幾何学的有限なので，この f_n は $\hat{\mathbb{C}}$ 全体の K-擬等角写像に拡張される（Marden の同型定理，[11 P.115] 参照）。正規化条件をみたす K-擬等角写像の列 $\{f_n\}$ は正規族をなすので，ある擬等角写像 f_∞ に一様収束する部分列がとれる。このとき，f_n の構成法より，f_∞ は無限生成離散群 $G_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ から $G_\infty' = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n'$ への同型を誘導し，さらに H の円の外側の3稜形 $\triangle$ 上では等角であるから，$\Omega(G_\infty)$ 上で等角となる。一方，He [3，P.407]（[8] も参照）によれば，極限集合 $\Lambda(G_\infty)$ の2次元測度が0であることがわかり，結局 f_∞ は $\hat{\mathbb{C}}$ 全体で等角となり，しかも ∞ を固定するので Euclid 変換である。H の円は f_∞ により H' に写されるので，H' も regular hexagonal packing であることが示された。 ▨

注：原論文では，$\Lambda(G_\infty)$ の2次元測度が0であることを用いず，正かもしれないが，その上では擬等角変形できないこと（Sullivan の剛性定理，[11，P.177] 参照）を用いて証

明している。この論法については、この後の筆者によるもうひとつの解説のほうをみよ。

3．定理の証明

まず、R 内の任意のコンパクト集合 V に対して、十分小さな ε では $V\subset R_\varepsilon'$ となるのは R_ε の構成法より明らかである（特に $\bigcup R_\varepsilon=R$ がわかる）。同様のことが D_ε についてもいえる。つまり、D 内の任意のコンパクト集合 V' に対して、十分小さな ε では $V'\subset D_\varepsilon$ となっている。これを示すためには、C_ε' の border circle（単位円に接している C_ε' の円）の半径が $\varepsilon\to 0$ のとき一様に 0 に収束することをみればよい。c_ε' を C_ε' の任意の border circle とし、対応する C_ε の border circle を c_ε とする。S_j $(j=1,2,\cdots,k_\varepsilon)$ を C_ε の円で c_ε の第 j 世代となるものからなるチェインとし、S_j をなす円の個数を n_j とすれば $n_j\leq 6j$ である。ここで $\varepsilon\to 0$ のとき $k_\varepsilon\to\infty$ である。これを C_ε' のほうに移して補題2を用いれば、

$$\mathrm{rad}(c_\varepsilon')\leq\left(n_1^{-1}+n_2^{-1}+\cdots+n_{k_\varepsilon}^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\leq\left\{\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k_\varepsilon}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

であるので、$\varepsilon\to 0$ のとき $\mathrm{rad}(c_\varepsilon')\to 0$ となる。

次に、$f_\varepsilon : R_\varepsilon\to D_\varepsilon$ が（ε によらず）一様に K-擬等角写像であることを示す。補題4の証明と同様に、R_ε のひと

つの正三角形 Δ 上で線型写像 f_ε の最大歪曲率をみるが、これは像 Δ' の3つの角で決まり、これらの角は、3つの頂点を中心とする C_ε' の円の半径比によって決まる。補題1より、この比は ε および Δ によらず一様に上下から押えられる。よって、ある K が存在して、$f_\varepsilon : R_\varepsilon \to D_\varepsilon$ は全体で K-擬等角写像になっている。

K-擬等角写像の列 $\{f_\varepsilon\}$ は正規族をなすが、f をその任意の極限函数とすると、正規化条件と ${}^\forall V \subset R_\varepsilon$ (ε: 十分大) より、f は R 上の K-擬等角写像となる。$f(R) = D$ であることは、$\{f_\varepsilon^{-1}\}$ から f^{-1} に広義一様収束する部分列がとれることと、${}^\forall V' \subset D_\varepsilon$ (ε: 十分大) よりわかる。この $f: R \to D$ は実は1にいくらでも近い K に対して K-擬等角写像になっている。すなわち、1-擬等角 $\longleftrightarrow$ 等角写像である。それは、補題3を用いて次のようにして示される: R 内にコンパクト集合 V をとるごとに、$\varepsilon \to 0$ とすれば、中心が V 内にある C_ε の円は一様に大きな世代をまわりに持つ。よって対応する C_ε' の円では、隣接する円の半径比が補題1より一様に1に近くなる。従って、V に含まれる R_ε の正三角形 Δ 上では f_ε の最大歪曲率が1に近づく。

以上で、$\{f_\varepsilon\}$ の任意の極限函数 f は R から D への等角写像であることがわかった。しかもこの f は、$\{f_\varepsilon\}$ の

正規化条件より、$f(z_0)=0$, $f(z_1)>0$ をみたしていることがわかる。よって、このような等角写像 f は一意に定まる。つまり、$\{f_\varepsilon\}$ の部分列のとり方によらず、極限函数が等しいので、f_ε は $\varepsilon \to 0$ のとき、$f(z_0)=0$, $f(z_1)>0$ をみたす一対一写像 $f: R \to D$ に広義一様収束することが示された。

4. その後の発展等

(ア) $\|f_\varepsilon - f\|_V$ の評価、微分の収束 $(f_\varepsilon)_z \to f'$, $(f_\varepsilon)_{\bar z} \to 0$、半径比 $\frac{rad(c')}{rad(c)}$ の f' への収束等については [6], [7] をみよ。

(イ) regular hexagonal packing よりさらに一般の circle packing での近似については、半径比有界な packing については [10]、接する円の数有界な packing については [4] で研究されている（後者の仮定は前者より弱い）。

(ウ) 逆写像 $f^{-1}: D \to R$ を近似する問題については [1] がある。

(エ) 補題4では regular hexagonal packing の一意性を示したが、より一般に、接する円の数有界な packing についても一意性が [8] で注意されている。なお、この仮定も除けることは [9] で示されている。

参考文献

[1] Carter, I. and B. Rodin, *An inverse problem for circle packing and conformal mapping*. Trans. Amer. Math. Soc. **334** (1992), 861-875.

[2] Hansen, L.J., *On the Rodin and Sullivan ring lemma.* Complex Variables **10** (1988), 23-30.

[3] He, Z.-X., *An estimate for hexagonal circle packings*. J. Differential Geom. **33** (1991), 395-412.

[4] He, Z.-X. and B. Rodin, *Convergence of circle packings of finite valence to Riemann mappings*. Comm. in Analysis and Geometry **1** (1993), 31-41.

[5] Rodin, B. and D. Sullivan, *The convergence of circle packings to the Riemann mapping*. J. Differential Geom. **26** (1987), 349-360.

[6] Rodin, B., *Schwarz's lemma for circle packings*. Invent. Math. **89** (1987), 271-289.

[7] Rodin, B., *Schwarz's lemma for circle packings. II*. J. Differential Geom. **30** (1989), 539-554.

[8] Rodin, B., *On a problem of A. Beardon and K. Stephenson.* Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), 271-275.

[9] Schramm, O., *Rigidity of infinite (circle) packings*. J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 127-149.

[10] Stephenson, K., *Circle packings in the approximation of conformal mappings*. Bull. Amer. Math. Soc. **23** (1990), 407-415.

[11] 谷口・松崎, 双曲的多様体とクライン群, 日本評論社, 1993.