数理解析研究所講究録
第 894 巻 1995 年 67-75

ある滑らかに対角化できない Levi 形式をもつ擬凸領域における $\bar{\partial}$-Neumann 問題

工学院大学　　長谷川研二 (Kenji HASEGAWA)

§0. 概説

正の整数 n に対して Ω を $\mathbf{C}^{n+1}$ の滑らかな境界をもつ領域とする.$1 \leq p, q \leq n$ となる整数 p, q に対して $C^{\infty}_{p,q}(\overline{\Omega})$ を $\overline{\Omega}$ 上の C^{∞} 函数を係数とする (p,q)-形式の空間とすると $\bar{\partial}: C^{\infty}_{p,q}(\overline{\Omega}) \to C^{\infty}_{p,q+1}(\overline{\Omega})$ となる作用素 $\bar{\partial}$ が定義される. また $\overline{\Omega}$ 上に Hermite 計量を導入すると $C^{\infty}_{p,q}(\overline{\Omega})$ に内積 $(\ ,\ )$ が与えられ,suppφ が $b\Omega$ と接触しない $\varphi \in C^{\infty}_{p,q}(\overline{\Omega})$ と $\psi \in C^{\infty}_{p,q+1}(\overline{\Omega})$ に対して $(\bar{\partial}\varphi, \psi) = (\varphi, \bar{\partial}^{*}\psi)$ となる $\bar{\partial}$ の共役作用素 $\bar{\partial}^{*}: C^{\infty}_{p,q+1}(\overline{\Omega}) \to C^{\infty}_{p,q}(\overline{\Omega})$ が得られる. $\mathcal{D}^{p,q}(\overline{\Omega})$ を $\varphi \in C^{\infty}_{p,q}(\overline{\Omega})$ が任意の $\psi \in C^{\infty}_{p,q+1}(\overline{\Omega})$ に対して $(\bar{\partial}\varphi, \psi) = (\varphi, \bar{\partial}^{*}\psi)$ となるある境界値条件をみたす φ の集合とする.U を $\overline{\Omega}$ の開集合として $\mathcal{D}^{p,q}(U) = \{\varphi \in \mathcal{D}^{p,q}(\overline{\Omega}) \mid \mathrm{supp}\varphi \subset \overline{\Omega} \cap U\}$,$\|\ \|$ を $\overline{\Omega}$ 上の L^2norm,$\|\ \|_{\epsilon}$ を指数が ϵ の $\overline{\Omega}$ 上の Sobolev norm とする. 定数 $\varepsilon > 0, C > 0$ に対して

$$\|\varphi\|_{\varepsilon} \leq C\left(\|\bar{\partial}\varphi\| + \|\bar{\partial}^{*}\varphi\| + \|\varphi\|\right) \quad \text{for } \forall\varphi \in \mathcal{D}^{p,q}(U), \tag{0.1}$$

を考えたい.(0.1) の応用としては $\bar{\partial}u = f$ で f が U 上で指数 s の Sobolev 空間にあれば u は U 上で指数 $s + \varepsilon$ の Sobolev 空間にはいることが導ける.$U \subset \Omega$ の場合は $\bar{\partial}\bar{\partial}^{*} + \bar{\partial}^{*}\bar{\partial}$ の楕円性より $\varepsilon = 1$ で (0.1) が成立することが容易に示せるが,$U \cap b\Omega \neq \emptyset$ の場合は非強圧的な楕円型境界値問題となり問題は急激に難しくなる.$\overset{\circ}{z}$ を $b\Omega$ の点として (0.1) が成立する $\overset{\circ}{z}$ の近傍 U が存在するための Ω の $\overset{\circ}{z}$ の近くにおける幾何学的条件を考察する. もし $\varepsilon = 1/2$ とすれば Folland と Kohn[4] が $\overset{\circ}{z}$ における Levi 形式が $n - q$ 個以上の正の固有値か $q + 1$ 個以上の負の固有値をもてば (0.1) が成立することを示したが,$0 < \varepsilon < 1/2$ とすれば Levi 形式の固有値の符号で判定することが不可能となり Ω の境界と q 次元の複素解析集合の接触度との関係を考える必要がある. ここで Ω が擬凸であると仮定する. Catlin[1] は ε の上界を $\overset{\circ}{z}$ における $b\Omega$ と q 次元の解析集合の接触度の上限の逆数で与えており,[2] において [1] と少し異なる形で定義した接触度が上界をもつことがある $0 < \varepsilon$ で (0.1) が成立する必要十分条件であることを証明した. 最適な ε の値を求めることについては特定の場合についてのみ行われている.Kohn[10],[11] は $q = n - 1$ であれば ε が $n - 1$ 次元の部分複素多様体と $b\Omega$ の接触度の逆数で (0.1) が成り立つことを Rothschild と Stein[12] の結果を適用することによって主

張した．また [10] で Levi 形式が滑らかな正則 vector 場の基底で対角化できるならば同様な方法によって最良なεを求めることができることを指摘した.Fornaæss と Sibony[5] は $n=1$ でΩが凸であればεが [1] で与えられる上界で成立することを示した．最近では Derridj[3] が滑らかに Levi 形式が対角化できない例を含むあるクラスを設定して [12] の結果を適用することによって最良なεを求める方法を与えた．本稿では次の様な $\mathbf{C}^{n+1}$の擬凸領域の $q=1,\cdots,n$ に対する最良なεを求めることについて報告したい．$\tilde{r}\left(w_0,\cdots,w_n\right)$ を原点の近傍で定義された $\mathbf{C}^{n+1}$上の C^∞函数で

$$\tilde{r}(0)=0, \quad \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \operatorname{Im} w_0}(0) \neq 0, \tag{0.2}$$

を満たし，領域 $\tilde{\Omega}=\left\{w \in \mathbf{C}^{n+1}; \tilde{r}(w)<0\right\}$に対してその Levi 形式が原点で正定値であると仮定する.lを $n/2 \leq l \leq n$ を満たす整数として,$\{m_i\}_{i=1}^n$を $i=1,\cdots,n-l$に対して $m_i \leq m_{i+l}$となる正の整数の列とする.$j=l+1,\cdots,n$ に対して函数 $f_j\left(z_j, z_{j-l}\right)$ を

$$f_j\left(z_j, z_{j-l}\right)=z_j^{m_j}+\sum_{k=0}^{m_j-1} g_{jk}\left(z_{j-l}\right) z_j^k,$$

の形をして g_{jk}を原点の近傍で定義された正則函数で

$$p \leq m_{j-l}\left(m_j-k\right)/m_j$$

に対して$\dfrac{\partial^p g_{jk}}{\partial z_{j-l}^p}(0)=0$ を満たすとする．最後に $\{m_i\}_{i=1}^n$を$\tilde{m}_i \leq \tilde{m}_{i+1}$となる様に $\{\tilde{m}_i\}_{i=1}^n$に並びかえる．主結果は次のとおりである (cf.[7]).

定理　Ωを滑らかな境界をもつ有界な $\mathbf{C}^{n+1}$の領域で境界は原点を含むとする．

$$\Omega \cap U=\left\{z \in U; \tilde{r}\left(z_0, z_1^{m_1}, \cdots, z_l^{m_l}, f_{l+1}\left(z_{l+1}, z_1\right), \cdots, f_n\left(z_n, z_{n-l}\right)\right)<0\right\}$$

となる原点の近傍 Uが存在するとすれば,(0.1) が$\varepsilon=1/2\tilde{m}_{n+1-q}$で成立して$\varepsilon>1/2\tilde{m}_{n+1-q}$であれば成立しない．

もし$\tilde{\Omega}$の Levi 形式が対角形でなければΩの固有値は C^∞函数でないので滑らかに対角化できない.1990 年 7 月に筆者は $f_j(z_j, z_{j-l}) \equiv 0$ の場合に定理が成り立つことについて講演したが (cf.[6]),1991 年に Derridj はこの場合を含むあるクラスに関する結果を [3] において発表した．本稿で述べられているクラスに含まれて [3] のクラスに属さない例は次の通りである:

$$\Omega=\left\{\left(z_0, z_1, z_2\right); \operatorname{Im} z_0+\left|z_1\right|^6+\left|z_1^2 z_2^2+z_2^4\right|^2<0\right\}.$$

[3] では滑らかな正則 vector 場の基底を固定した状態でそれと双対な微分形式の基底における各成分の Sobolev norm を上から評価する形となっているがこの例では $|z_2|^4/|z_1|^3$が十分大きいと滑らかでない基底の変換をする必要があり [3] が適用できない.

§1. 証明の概略

定理の陳述の中で$\varepsilon > 1/2\widetilde{m}_{n+1-q}$で (0.1) が成立しないことは [1] を用いて次の様に示される.$\{1,\cdots,n\}$ を $\{i(1),\cdots,i(n)\}$ に $m_{i(j)} = \widetilde{m}_j$となる様に並び変える.$z_{i(1)} = \cdots = z_{i(n-q)} = 0$ で

$$z_0 = \frac{1}{\frac{\partial \tilde{r}}{\partial w_0}(0)} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial w_j}(0) f_j(z),$$

で定義される q次元部分複素多様体を V^qとする. この時, 次の不等式

$$|r(z)| \leq C \sum_{j=n+1-q}^{n} |z_{i(j)}|^{2\widetilde{m}_j} \leq C|z|^{2\widetilde{m}_{n+1-q}},$$

が成り立つので [1] の Theorem 1 を適用すると (0.1) の不成立がいえる.

$\varepsilon = 1/2\widetilde{m}_{n+1-q}$で (0.1) が成立することを証明するために (0.1) を $b\Omega$上の接 Cauchy-Riemann 複体の不等式に帰着させる. そのために $b\Omega$の局所座標を導入する. まず

$$r(z_0,\cdots,z_n) = \tilde{r}\left(z_0, z_1^{m_1},\cdots,z_l^{m_l}, f_{l+1}(z_{l+1},z_1),\cdots,f_n(z_n,z_{n-l})\right),$$

とおき,Malgrange の予備定理を使うと (0.2) より

$$r(z) = f(z)\left(\phi(\operatorname{Re} z_0, z_1,\cdots,z_n) - \operatorname{Im} z_0\right),$$

で$\phi(0) = 0, f(z) > 0$ となる C^∞実数値函数ϕ, fがある. よって $x_j = \operatorname{Re} z_j, y_j = \operatorname{Im} z_j, t = \operatorname{Re} z_0$とおけば $(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n,t)$ は $b\Omega$の局所座標となる. また $(\xi_1,\cdots,\xi_n,\eta_1,\cdots,\eta_n,\tau)$ を $b\Omega$の余接空間の座標とする.$b\Omega$の開集合 Uに対して $\mathcal{B}^{p,q}(U)$ を台が Uに含まれる $b\Omega$上の滑らかな (p,q)-形式の空間として,$\bar\partial_b$を $\mathcal{B}^{p,q}$から $\mathcal{B}^{p,q+1}$への双対境界作用素,$\bar\partial_b^*$を$\overline{\Omega}$から導かれた Hermite 計量に関する$\bar\partial_b$の共役作用素とする.$\tau \geq 2$ の時$\zeta(\tau) = 1$ で$\tau \leq 1$ の時$\zeta(\tau) = 0$ となる滑らかな実数値函数$\zeta(\tau)$ を用い表象を$\tau^\varepsilon\zeta(\tau)$ とする擬微分作用素をΔ_εとすれば,Sweeney[13] の結果より (0.1) は $b\Omega$において

$$\|\Delta_\varepsilon\varphi\| \leq C\left(\|\bar\partial_b\varphi\| + \|\bar\partial_b^*\varphi\| + \|\varphi\|\right) \quad \text{for } \forall\varphi \in \mathcal{B}^{p,q}(U), \tag{1.1}$$

となる原点の近傍 Uが存在することと同値であることが分る. 以下この不等式を考えていくことにする. [13] によると (0.1) の正否は Hermite 計量の選び方に依存しないことがいえているので,$b\Omega$ に接する正則 vector 場

$$L_j = \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial\phi/\partial z_j}{i+\partial\phi/\partial t}\frac{\partial}{\partial t} \quad \text{for } j = 1, \cdots, n,$$

を正規直交基底となるように計量をとり,(1,0)-形式$\omega_1, \cdots, \omega_n$をそれに対する双対基底とする. 多重指数 $I = (i_1, \cdots, i_p), J = (j_1, \cdots, j_n)$ に対して$\omega_I = \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p}, \overline{\omega}_J = \overline{\omega}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \overline{\omega}_{j_q}$として, それらを用いて (p, q)-形式φ を

$$\varphi = {\sum_{I,J}}' \varphi_{I,J}\omega_I \wedge \overline{\omega}_J,$$

と表す. ここで$\sum'$は成分が単調増大に並んでいる多重指数だけの和をとるという意味である. この時$\bar\partial_b\varphi, \bar\partial_b^*\varphi$ は次の様に表される:

$$\bar\partial_b\varphi = (-1)^p {\sum_{I,J}}' \sum_{j=1}^{n} \overline{L}_j\varphi_{I,J}\omega_I \wedge \overline{\omega}_j \wedge \overline{\omega}_J + \sum f_{H,L}^{I,J}\varphi_{I,J}\omega_H \wedge \overline{\omega}_L \tag{1.2}$$

$$\bar\partial_b^*\varphi = (-1)^{p+1} {\sum_{I,K}}' \sum_{j=1}^{n} L_j\varphi_{I,jK}\omega_I \wedge \overline{\omega}_K + \sum g_{H,K}^{I,J}\varphi_{I,J}\omega_H \wedge \overline{\omega}_K \tag{1.3}$$

ここで Iと Hは p 重指数,Jは q重指数,L は $q+1$ 重指数,Kは $q-1$ 重指数をとるとして,$f_{H,L}^{I,J}$と $g_{H,K}^{I,J}$は C^∞函数とする.

十分に小さい $a > 0$ に対して原点の近傍として $B_a = \{(z,t) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{R}; |z| < a, |t| < a\}$ をとる. 正の実数ρ, τに対し$\overset{\circ}{z} \in B_a$の近傍を定義する.$1 \le j \le l$となる整数 jと$\overset{\circ}{z}_j \in \mathbf{C}$ に対して

$$M_{\overset{\circ}{z}_j}^{(j)}(\rho,\tau) = \begin{cases} 2|\, \overset{\circ}{z}_j\,|^{m_j-1}\left(\dfrac{\tau}{\rho}\right)^{1/2} & \text{if } |\,\overset{\circ}{z}_j\,|^{m_j} \ge 2\left(\dfrac{\rho}{\tau}\right)^{1/2} \\ \left(\dfrac{\tau}{\rho}\right)^{1/2m_j} & \text{if } |\,\overset{\circ}{z}_j\,|^{m_j} < 2\left(\dfrac{\rho}{\tau}\right)^{1/2}, \end{cases}$$

とする. 次に $l+1 \le j \le n$ となる整数 jと $(\overset{\circ}{z}_j, \overset{\circ}{z}_{j-l}) \in \mathbf{C}^2$に対して

$$M_{(\overset{\circ}{z}_j,\overset{\circ}{z}_{j-l})}^{(j)}(\rho,\tau) = \begin{cases} 2|\,\overset{\circ}{z}_j\,|^{m_j-1}\left(\dfrac{\tau}{\rho}\right)^{1/2} \text{ if } |\,\overset{\circ}{z}_j\,|^{m_j} \ge \max\left(\left(\dfrac{\rho}{\tau}\right)^{1/2}, |\,\overset{\circ}{z}_{j-l}\,|^{m_{j-l}}\right) \\ \max\limits_{1\le k\le m_j}\left|\dfrac{\partial^k f_j}{\partial z_j^k}(\overset{\circ}{z}_j, \overset{\circ}{z}_{j-l})\left(\dfrac{\tau}{\rho}\right)^{1/2}\right|^{1/k} \quad \text{otherwise.} \end{cases}$$

とする.$|\overset{\circ}{z}|\le a$ となる$\overset{\circ}{z}=(\overset{\circ}{z}_1,\cdots,\overset{\circ}{z}_n)\in\mathbf{C}^n$に対して $1\le j\le l$と $|\overset{\circ}{z}_j|^{m_j}\ge 2(\rho/\tau)^{1/2}$を満たす

整数 jの集合を$\Lambda_{\overset{\circ}{z}}(\rho,\tau)$,$l+1\le j\le n$ と

$$|\overset{\circ}{z}_j|^{m_j}\ge\max\left(2\left(\frac{\rho}{\tau}\right)^{1/2},|\overset{\circ}{z}_{j-l}|^{m_{j-l}}\right)$$

を満たす jの集合を$\Gamma_{\overset{\circ}{z}}(\rho,\tau)$ とする.$j=1,\cdots,l$に対して $M^{(j)}_{\overset{\circ}{z}_j}(\rho,\tau)$ を使い $\mathbf{C}$ の開集合$\widetilde{\Omega}^{(j)}_{\overset{\circ}{z}_j}(\rho,\tau)$ を

$$\widetilde{\Omega}^{(j)}_{\overset{\circ}{z}_j}(\rho,\tau)=\left\{z_j\in\mathbf{C};|z_j-\overset{\circ}{z}_j|<\frac{1}{M^{(j)}_{\overset{\circ}{z}_j}(\rho,\tau)}\right\},$$

そして $j=l+1\cdots n$ に対して $M^{(j)}_{(\overset{\circ}{z}_j,\overset{\circ}{z}_{j-l})}(\rho,\tau)$ を使い $\mathbf{C}^2$の開集合$\widehat{\Omega}^{(j)}_{(\overset{\circ}{z}_j,\overset{\circ}{z}_{j-l})}(\rho,\tau)$ を $j\in\Gamma_{\overset{\circ}{z}}(\rho,\tau)$ であれば

$$\widehat{\Omega}^{(j)}_{(\overset{\circ}{z}_j,\overset{\circ}{z}_{j-l})}(\rho,\tau)=\left\{(z_j,z_{j-l})\in\mathbf{C}\times\widetilde{\Omega}^{(j-l)}_{\overset{\circ}{z}_{j-l}};\right.$$
$$\left.|f_j(z_j,z_{j-l})-f_j(\overset{\circ}{z}_j,\overset{\circ}{z}_{j-l})|<\frac{|\overset{\circ}{z}_j|^{m_j-1}}{AM^{(j)}_{(\overset{\circ}{z}_j,\overset{\circ}{z}_{j-l})}(\rho,\tau)}\right\},$$

そうでなければ

$$\widehat{\Omega}^{(j)}_{(\overset{\circ}{z}_j,\overset{\circ}{z}_{j-l})}(\rho,\tau)=\left\{(z_j,z_{j-l})\in\mathbf{C}\times\widetilde{\Omega}^{(j-l)}_{\overset{\circ}{z}_{j-l}};\right.$$
$$\left.|z_j-\overset{\circ}{z}_j|<\frac{1}{AM^{(j)}_{(\overset{\circ}{z}_j,\overset{\circ}{z}_{j-l})}(\rho,\tau)}\right\}$$

とする. ここで A は後で十分に大きくとるとする. 最後に $|\overset{\circ}{z}|\le a$ を満たす$\overset{\circ}{z}\in\mathbf{C}^n$に対して近傍

$\widetilde{\Omega}_{\overset{\circ}{z}}(\rho,\tau)$ を

$$\widetilde{\Omega}_{\overset{\circ}{z}}(\rho,\tau)=\widetilde{\Omega}^{(n-l+1)}_{\overset{\circ}{z}_{n-l+1}}\times\cdots\times\widetilde{\Omega}^{l}_{\overset{\circ}{z}_l}\times\widehat{\Omega}^{(l+1)}_{(\overset{\circ}{z}_{l+1},\overset{\circ}{z}_1)}\times\cdots\times\widehat{\Omega}^{(n)}_{(\overset{\circ}{z}_n,\overset{\circ}{z}_{n-l})},$$

とする.$j\in\Gamma_{\overset{\circ}{z}}(\rho,\tau)$ のとき$\widehat{\Omega}^{(j)}_{(\overset{\circ}{z}_j,\overset{\circ}{z}_{j-l})}(\rho,\tau)$ において常に$\frac{\partial f_j}{\partial z_j}(z_j,z_{j-l})\neq 0$ であることが示せるので$\widetilde{\Omega}_{\overset{\circ}{z}}(\rho,\tau)$ 上の正則ベクトル場$\widetilde{L}_j$を $j+l\in\Gamma_{\overset{\circ}{z}}(\rho,\tau)$ であれば

$$\widetilde{L}_j=L_j-\frac{\frac{\partial f_{j+l}}{\partial z_j}(z_{j+l},z_j)}{\frac{\partial f_{j+l}}{\partial z_{j+l}}(z_{j+l},z_j)}L_{j+l}$$

とし, そうでなければ$\widetilde{L}_j=L_j$とする.

命題 **1.** aを十分に小さく A とρを十分に大きくとる. この時ある定数 $C>0$ が存在して$|\overset{\circ}{z}|\le a$ を満たす$\overset{\circ}{z}\in\mathbf{C}^n$と$\tau\ge C\rho$を満たす$\tau$に対して台が$\widetilde{\Omega}_{\overset{\circ}{z}}(\rho,\tau)$ に含まれる任意の滑らかな函数φとφ'

が以下の不等式を満たす:

$$\rho^{\frac{1}{2}}\|M^{(j)}_{\overset{\circ}{z}_j}(\rho,\tau)\varphi\| \le C\|z_j^{m_j-1}\tau^{\frac{1}{2}}\varphi\| \text{ for } j\in\Lambda_{\overset{\circ}{z}}(\rho,\tau), \tag{1.4}$$

$$\rho^{2-m_j}\|M^{(j)}_{\overset{\circ}{z}_j}(\rho,\tau)\varphi\| \le C\left(\|\widetilde{L}_j\varphi\|+\|\widetilde{L}_j^*\varphi\|+\|z_j^{m_j-1}\tau^{\frac{1}{2}}\varphi\|\right) \tag{1.5}$$

$$\text{for } j\in\{1,\cdots,l\}\backslash\Lambda_{\overset{\circ}{z}}(\rho,\tau),$$

$$\rho^{2-m_j}\|M^{(j)}_{(\overset{\circ}{z}_j,\overset{\circ}{z}_{j-l})}(\rho,\tau)\varphi\| \le C\left(\|\widetilde{L}_j\varphi\|+\|\widetilde{L}_j^*\varphi\|+\left\|\frac{\partial f_j}{\partial z_j}\tau^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|\right) \tag{1.6}$$

$$\text{for } j\in\{l+1,\cdots,n\}\backslash\Gamma_{\overset{\circ}{z}}(\rho,\tau),$$

$$\rho^{\frac{1}{2}}\left\|M^{(j)}_{(\overset{\circ}{z}_j,\overset{\circ}{z}_{j-l})}(\rho,\tau)\Big(\varphi'+\frac{\frac{\partial f_j}{\partial z_{j-l}}}{\frac{\partial f_j}{\partial z_j}}\varphi\Big)\right\| \le C\left\|\tau^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{\partial f_j}{\partial z_{j-l}}\varphi+\frac{\partial f_j}{\partial z_j}\varphi'\Big)\right\| \tag{1.7}$$

$$\text{for } j\in\Gamma_{\overset{\circ}{z}}(\rho,\tau).$$

(1.4) と (1.7) は右辺の norm の中でφ とφ'に掛けている函数の評価を行えば直に示せる.(1.5) と (1.6) については函数が 0 になることがあるので同じ方法は適用できないので, 右辺に $\|\widetilde{L}_j\varphi\|$ と $\|\widetilde{L}_j^*\varphi\|$ を付ける必要がある. このようにすれば [8] に倣い函数とベクトル場の交換子を用いることによってこれらの不等式が証明できる.

次に超局所的な議論を行うために t の双対座標τを導入する.$C>0$ を十分に大きくとり$\rho>0$ に対して $D_\rho=\{(z,\tau);|z|\le a,\tau\ge C\rho\}$,$\widetilde{D}_\rho=D_\rho\times\{t;|t|\le a\}$ とおく. また D_ρの各点 $(\overset{\circ}{z},\overset{\circ}{\tau})$ の近傍$\Omega_{(\overset{\circ}{z},\overset{\circ}{\tau})}(\rho)$ を

$$\Omega_{(\overset{\circ}{z},\overset{\circ}{\tau})}(\rho)=\left\{(z,\tau)\in\mathbf{C}^n\times\mathbf{R};z\in\widetilde{\Omega}_{\overset{\circ}{z}}(\rho,\overset{\circ}{\tau}),|t|<a,|\tau-\overset{\circ}{\tau}|<\overset{\circ}{\tau}^{1-\delta}\right\}$$

と定義する. ここでδを $0<\delta<1/2\widetilde{m}_n$となるようにとる. この時,$D_\rho$の点列$\{(z^{(\alpha)},\tau^{(\alpha)})\}_{\alpha=1}^{\infty}$を

$$\bigcup_{\alpha=1}^{\infty}\Omega_{(z^{(\alpha)},\tau^{(\alpha)})}(\rho)\supset\widetilde{D}_\rho,$$

となり, 更に共有点を含む$\Omega_{(z^{(\alpha)},\tau^{(\alpha)})}(\rho)$ の個数の最大値は a,A,ρに依存しないように選ぶことができる. 記号を簡単にするために$\alpha=1,2,\cdots,$ に対して $M^{(j)}_\alpha=M^{(j)}_{z_j^{(\alpha)}}$, $M^{(j)}_\alpha=M^{(j)}_{(z_j^{(\alpha)},z_{j-l}^{(\alpha)})}$, $\Lambda_\alpha(\rho)=\Lambda_{z^{(\alpha)}}(\rho,\tau^{(\alpha)})$, $\Gamma_\alpha(\rho)=\Gamma_{z^{(\alpha)}}(\rho,\tau^{(\alpha)})$, $\Omega_\alpha(\rho)=\Omega_{(z^{(\alpha)},\tau^{(\alpha)})}(\rho)$ と書き, これらを使い擬微分作用素Ψ_αの表象$\psi_\alpha(z,t,\tau)$ を

$$\psi_\alpha(z,t,\tau)$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{l} \chi\left(\frac{|z_j - z_j^{(\alpha)}|}{M_\alpha^{(j)}}\right)\right)\left(\prod_{j\in\{l+1,\cdots,n\}\setminus\Gamma_\alpha(\rho,\tau)} \chi\left(\frac{|z_j - z_j^{(\alpha)}|}{M_\alpha^{(j)}}\right)\right)$$

$$\times \left(\prod_{j\in\Gamma_\alpha(\rho,\tau)} \chi\left(\frac{|f_j(z_j, z_{j-l}) - f_j(z_j^{(\alpha)}, z_{j-l}^{(\alpha)})|}{|z_j^{(\alpha)}|^{m_j-1} M_\alpha^{(j)}}\right)\right) \chi\left(\frac{t}{a}\right) \chi\left(\frac{|\tau - \tau^{(\alpha)}|}{(\tau^{(\alpha)})^{1-\delta}}\right),$$

と定義する. ここでχを$\mathbf{R}_s$上の滑らかな実数値函数で

$$\chi(s) = 0 \text{ if } |s| \geq 1 \text{ and } \chi(s) = 1 \text{ if } |s| \leq \frac{1}{2}$$

を満たすとする. 最後に函数 $d_{\alpha,j}(z_j, z_{j-l})$ とベクトル場 $L_{\alpha,j}$を

$$d_{\alpha,j}(z_j, z_{j-l}) = \begin{cases} \frac{\partial f_j}{\partial z_{j-l}} \Big/ \frac{\partial f_j}{\partial z_j} & \text{if } j \in \Gamma_\alpha(\rho) \\ 0 & \text{if } j \notin \Gamma_\alpha(\rho), \end{cases},$$

$$L_{\alpha,j} = L_j - d_{\alpha,j+l} L_{j+l} \quad \text{for } j = 1, \cdots, n,$$

とする.(1.2) と (1.3) より

$$\sum_\alpha \left(\|\Psi_\alpha \bar\partial_b \varphi\|^2 + \|\Psi_\alpha \bar\partial_b^* \varphi\|^2\right) = {\sum_J}' \sum_{\alpha,j} \|\Psi_\alpha \overline{L}_j \varphi_J\|^2, \tag{1.8}$$

$$+{\sum_K}' \sum_{\alpha,j,k} \left(\mathrm{Re}(\Psi_\alpha L_j \varphi_{jK}, \Psi_\alpha L_k \varphi_{kK}) - \mathrm{Re}(\Psi_\alpha \overline{L}_k \varphi_{jK}, \Psi_\alpha \overline{L}_j \varphi_{kK})\right).$$

が得られ,[8],[9] によると (1.8) の左辺は (1.1) の右辺の定数倍より小さいことがいえる.$(c_{jk}(z,t))$ を正則ベクトル場 $L_1, \cdots, L_n$に関する Levi 形式, つまり

$$c_{jk}(z,t) = \partial\bar\partial r(L_j, \overline{L}_k)\Big|_{(z,t)}$$

とする.(1.8) の右辺を評価するために次の 2 つの命題を用意する:

命題 2. もしρと A が十分に大きければ, 定数 $C > 0$ を適当に選ぶと台が B_aに含まれる任意の n 個の列 $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ に対して

$$\sum_\alpha \left|\sum_{j,k}\left((c_{jk} D_t \Psi_\alpha \varphi_j, \Psi_\alpha \varphi_k) - (\Psi_\alpha L_j \varphi_j, \Psi_\alpha L_k \varphi_k) + (\Psi_\alpha \overline{L}_k \varphi_j, \Psi_\alpha \overline{L}_j \varphi_k)\right)\right| \tag{1.9}$$

$$\leq C\Big(\sum_\alpha\Big(\|\Psi_\alpha \sum_j L_j \varphi_j\|^2 + \sum_j \|M_\alpha^{(j)} \Psi_\alpha(\varphi_j + d_{\alpha,j}\varphi_{j-l})\|^2\Big) + \sum_j \|\varphi_j\|^2\Big).$$

が成り立つ.

命題 3. $\rho > 0$ に依存しない定数$\varepsilon > 0, C > 0$ が存在して, 台が B_aに含まれる任意の n 個の列 $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ に対して

$$\rho^\varepsilon \sum_{\alpha,j} \|M_\alpha^{(j)} \Psi_\alpha(\varphi_j + d_{\alpha,j}\varphi_{j-l})\|^2 \tag{1.10}$$

$$\leq C\Big(\sum_{\alpha,j,k}(\mathrm{Re}(c_{jk}D_t\Psi_\alpha\varphi_j,\Psi_\alpha\varphi_k)+\|\Psi_\alpha\overline{L}_j\varphi_k\|^2)+\sum_j\|\varphi_j\|^2\Big)$$

が成り立つ.

命題 2 は $[L_j,\overline{L}_k]=c_{jk}D_t$であることを利用することにより示し, 命題 3 は (1.4)-(1.7) から導くことができる.$(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)=(\varphi_{1K},\cdots,\varphi_{nK})$ とおくと (1.9) と (1.10) を組み合わせることによって

$$\begin{aligned}
&\rho^\varepsilon\sum_{\alpha,j}\|M_\alpha^{(j)}\Psi_\alpha(\varphi_{jK}+d_{\alpha,j}\varphi_{j-lK})\|^2\\
\leq\ & C\left(\sum_{\alpha,j,k}\Big(\mathrm{Re}(\Psi_\alpha L_j\varphi_{jK},\Psi_\alpha L_k\varphi_{kK})-\mathrm{Re}(\Psi_\alpha\overline{L}_k\varphi_{jK},\Psi_\alpha\overline{L}_j\varphi_{kK})\right.\\
+\ & \left.\|\Psi_\alpha\overline{L}_j\varphi_{kK}\|^2\Big)+\sum_\alpha\|\Psi_\alpha\sum_j L_j\varphi_{jK}\|^2+\sum_j\|\varphi_{jK}\|^2\right)
\end{aligned}$$

が得られる. したがって

$$\begin{aligned}
&\rho^\varepsilon\sum_{\alpha,j}{\sum_K}'\|M_\alpha^{(j)}\Psi_\alpha(\varphi_{jK}+d_{\alpha,j}\varphi_{j-lK})\|^2\\
&\leq C\left(\sum_\alpha\Big(\|\Psi_\alpha\bar\partial_b\varphi\|^2+\|\Psi_\alpha\bar\partial_b^*\varphi\|^2\Big)+\|\varphi\|^2\right)
\end{aligned}$$

がいえ, 更に $M_\alpha^{(j)}$の下から評価することによって (1.1) を証明することができる.

参考文献

[1] D. Catlin, Necessary conditions for subellipticity of the $\bar\partial$-Neumann problem, *Ann. of Math.* **117** (1983), 147–171.

[2] ____, Subelliptic estimates for the $\bar\partial$-Neumann problem on pseudoconvex domains, *Ann. of Math.* **126** (1987), 131–191.

[3] M. Derridj, Estimations par composantes pour le problem $\overline{\partial}$-Neumann pour quelques classes de domaines pseudoconvexes de $\mathbf{C}^n$, *Math. Z.* **208** (1991), 89-99.

[4] G. B. Folland, J. J. Kohn, *The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex, Princeton Univ. Press, Princeton N. J.* (1972).

[5] J. E. Fornæss, N. Sibony, Construction of P. S. H. functions on weakly pseudoconvex domains, *Duke Math. J.* **58** (1989), 633–655.

[6] K. Hasegawa, ある弱擬凸領域における$\bar{\partial}$-ノイマン問題に対する劣楕円的評価について, 数理解析研究所講究録 **750** (1991), 111–122.

[7] ____ , Subelliptic estimates for the $\bar{\partial}$-Neumann problem on certain weakly pseudo-convex domains, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **39** (1992), 385–418.

[8] L. Hörmander, Subelliptic operators, *Seminor on sing. of sol. of diff. eq.,Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.* (1979) ,127–208.

[9] ____ , The Weyl calculus of pseudo-differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.* **32** (1979), 359–443.

[10] J. J. Kohn, Boundary behaviour of $\bar{\partial}$ on weakly pseudo-convex manifolds of dimension two, *J. Differential Geom.* **6** (1972), 523–542.

[11] ____ , Subellipticity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem on pseudo-convex domains: sufficient conditions, *Acta Math.* **142** (1979), 79–122.

[12] L. P. Rothschild, E. M. Stein, Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups, *Acta Math.* **137** (1977), 248-315.

[13] W. J. Sweeney, A condition for subellipticity in Spencer's Neumann problem, *J. Differential Equations* **21** (1976), 316–362.