

## 超分布の調和解析について

東大数理解析学 梁田厚彦 (Atsubiko Eida)

## §0 序

超局所解析とは余接バンドル(シンプレクティック多様体)上において局所的に問題を考えることを言うが, Boutet de Monvel 氏はこれを対応する管状領域上の Toeplitz 作用素と解釈した. これにより超局所解析の初等的理論のための道具を提供することがさらに可能になった. 具体例として球面  $S^n$  (コンパクト) およびユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  (非コンパクト) を代表として考察する.

## §1 Grauert 管状領域

定義 1.1  $X$ :  $m$  次元複素解析多様体,  $M$ :  $X$  の実  $n$  次元実解析部分多様体とする.  $M$  が  $\mathbb{R}$ -多様体であるとは, 任意の  $m \in M$  に対して  $X$  における  $m$  の近傍  $U$  とその複素座標系が存在して  $M \cap U = \{ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 = \dots = \operatorname{Im} z_n = 0 \}$  となることをいう.

命題 1.2 [Bruhat-Whitney] 任意の実解析多様体  $M$  はある複素解析多様体  $X$  に  $\mathbb{R}$ -多様体として埋め込まれる。この埋め込みは正則同型を除いて一意である。

上の命題において  $x \in X$  をとり、 $\rho(x)$  を  $x$  から  $M$  までの (適当なリ-マン計量の意味での) 距離とする。  $X_\varepsilon = \{x \in X; \rho(x) < \varepsilon\}$  とする。  $\varepsilon$  を十分小さくすると、 $X_\varepsilon$  は強擬凸領域になる。

定義 1.3 このとき  $(X_\varepsilon, \rho)$  を  $M$  の Grauert 管状領域と呼ぼう。

自明な例として、 $M = \mathbb{R}^n$ 、 $X = \mathbb{C}^n$  のとき、 $X_\varepsilon = \{x + iy \in \mathbb{C}^n; |y| < \varepsilon\}$  は任意の  $\varepsilon > 0$  で Grauert 管状領域である。

命題 1.4 [Kostant-Sternberg]  $X$  を  $2m$  次元シンプレクティック多様体、 $M$  を  $X$  の  $m$  次元部分多様体とする。  $\alpha$  を  $d\alpha$  が基本 2 次形式となる  $X$  上の 1 形式で、 $M$  上の全ての点で消えるとする。このとき  $X$  の十分小さい

$M$  の近傍  $\tilde{X}'$  に対し,  $M$  のその余接バンドル  $T^*M$  における近傍  $X'$  上シンプレクティック変換  $\Phi: \tilde{X}' \rightarrow X'$  が一意に存在し,  $\Phi^* \alpha' = \alpha$ ,  $\Phi^* \omega = \omega$  とできる. ただし,  $\alpha'$  は  $T^*M$  の基本1形式,  $\omega, \omega'$  は  $M$  の  $\tilde{X}, T^*M$  への埋め込みである.

この命題で  $\alpha = \text{Im } \bar{\partial} \rho$  とし  $\rho$  としにより, 実解析多様体  $M$  の Grauert 管状領域  $(X_\epsilon, \rho)$  の境界  $X_\epsilon$  を  $M$  の余接球バンドル  $S^*M$  と同一視することができるのである.

## §2 球面 $S^n$ 上での超局所解析

この節では G. Lebeau [8] の結果を大いに援用する.

$$S^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} ; x^2 = 1 \}$$

$$\Gamma = \{ z \in \mathbb{C}^{n+1} ; z^2 = 0 \} = \{ z = u + i v ; u^2 = v^2, uv = 0 \}$$

$$\rho(z) = |z|^2 = u^2 + v^2$$

$DS^n = \{ z \in \Gamma ; \rho(z) < 2 \}$  とおくと,  $\partial DS^n$  は  $S^n$  の余接球バンドル  $S^*S^n$  と同一視される.  $S^n$  および  $S^*S^n$  には  $\mathbb{R}^{n+1}$  および  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$  から導入される自然な測度を入れる.  $O(n+1)$  は  $S^n$  と

$S^*S^n$  に推移的に作用する。また  $U(1)$  は  $S^*S^n$  に  $(e^{i\theta}, z) \mapsto e^{i\theta}z$  で作用する。これらの群の作用で測度は不変である。  $L^2(S^n)$  における  $O(n+1)$  のユニタリ表現の既約分解を  $L^2(S^n) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} V_k$  とする。  $V_k$  の元は  $k$  次斉次調和多項式である。部分空間  $V_k$  の正規直交基底を  $\{S_{k,j}(x)\}_{j=1, \dots, \nu_k}$  とする。このとき異なる組  $(k, j)$  に対して  $S_{k,j}(z)$  は  $L^2(S^*S^n)$  において互いに直交する。(Schurの補題)  $\{S_{k,j}(z)\}$  で生成される  $B(S^*S^n)$  の部分空間を  $H(S^*S^n)$  (一種のHardy空間) と書くと、  $H(S^*S^n) = \mathcal{O}(DS^n)$  である。  $B(S^*S^n)$  から  $H(S^*S^n)$  への射影が Szegő射影である。(  $B$  は hyperfunction の層を表わす。) 球面  $S^n$  上の Poisson核は

$$P(z, x) = \frac{1 - z^2}{\omega_n \int (\bar{z} - x)^2 \int^{\frac{n+1}{2}} = \sum_{j,k} S_{k,j}(z) \overline{S_{k,j}(x)}$$

で表わされる。また、  $k$  次の核を球面  $S^n$  上の Hörmander核とよぶことができる。

$$H(z, x) = \sum_{j,k} c_k^{-1} S_{k,j}(z) \overline{S_{k,j}(x)}$$

$$c_k = 2^k \omega_{n-2} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2} + k) \Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(n-1+k)}$$

このようにした理由は後に出てくる  $\mathbb{R}^n$  上の Hörmander 核とのアナロジーから,

$$S_{n,j}(x) \cdot c_n = \int_{|\omega|=1} S_{n,j}(z) d\omega, \quad z = x + i\omega$$

を要請したためである.

これらの核に対応して Poisson 作用素  $P$ , 逆作用素  $P'$ , Hörmander 作用素  $H$ , 逆作用素  $H'$  が定義される. ただし, これらの核をどう作用させるかは, [8] を参照のこと.

$$P: \mathcal{B}(S^n) \longrightarrow \mathcal{B}(S^*S^n)$$

$$P': \mathcal{B}(S^*S^n) \longrightarrow \mathcal{B}(S^n)$$

$$H: \mathcal{B}(S^n) \longrightarrow \mathcal{B}(S^*S^n)$$

$$H': \mathcal{B}(S^*S^n) \longrightarrow \mathcal{B}(S^n)$$

さらに次のことがわかる.

### 命題 2.1

$$P: \mathcal{B}(S^n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(DS^n)$$

$$H: \mathcal{B}(S^n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(DS^n)$$

### 命題 2.2

$$P: W^s(S^n) \xrightarrow{\sim} W^{s+\frac{n-1}{4}}(S^*S^n) \cap \mathcal{O}(DS^n)$$

$$H: W^s(S^n) \xrightarrow{\sim} W^{s-\frac{n-1}{4}}(S^*S^n) \cap \mathcal{O}(DS^n)$$

ここで  $W^s$  は  $s$  次のソボレフ空間を表わし, その定義は  $s^n$ ,  $s^*s^n$  上の場合球面調和展開による重みを自然な仕方で行ったものである.

証明は  $P$  の場合は [8] で与いられているが,  $H$  の場合も同様にやればよい.

以後  $K = P$  (または  $H$ ),  $K' = P'$  (または  $H'$ ) とする.

命題 2.3  $u \in B(S^n)$  とする.

$(x_0, \xi_0) \notin \text{SS}(u) \iff Ku$  は  $z_0 = x_0 - i\xi_0 \in s^*s^n$  の近傍で解析的である.

これも [8] の援用である.

次に, 実解析多様体  $M$  上の Gevrey 族の超可微分関数の層を  $\mathcal{E}_M^*$ , 超分布の層を  $\mathcal{D}_M^*$  で表わす. (ただし  $* = \phi$ , ( $s$ ) または  $s < s$ ,  $s > 1$ )  $\mathcal{E}_M^*$ ,  $\mathcal{D}_M^*$  が soft であること,  $B$  が flabby であることは既知とする. また, microfunction の層を  $\mathcal{L}_M$  として  $\mathcal{E}_M^*$ ,  $\mathcal{D}_M^*$  に対応する  $\mathcal{L}$  の部分層を  $\mathcal{L}_M^{\text{in}}$ ,  $\mathcal{L}_M^{\text{d},*} (= \text{Im}(\text{sp}: \pi^{-1}\mathcal{E}_M^* \rightarrow \mathcal{L}_M))$ ,  $\mathcal{L}_M^* (= \text{Im}(\text{sp}: \pi^{-1}\mathcal{D}_M^* \rightarrow \mathcal{L}_M))$  としよう ( $\pi: S^*M \rightarrow M$ ).

このとき

命題 2.4  $\mathcal{L}_{S^n}^{d,*}$ ,  $\mathcal{L}_{S^n}^*$  は soft,  $\mathcal{L}_{S^n}$  は flabby  
である.

証明  $\mathcal{L}_{S^n}^*$  のときは次の可換図式を使えば  
 $\mathcal{D}^{*1}$  の softness に帰着できる.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{D}^{*1}(S^*S^n) & & \\
 & \nearrow P & \downarrow & \searrow & \\
 \mathcal{D}^{*1}(S^n) & \xrightarrow{\sim P} & \mathcal{D}^{*1}(S^*S^n) \cap \mathcal{O}(DS^n) & \xrightarrow{P'} & \mathcal{D}^{*1}(S^*S^n) \\
 & \nwarrow P' & \downarrow & \swarrow & \\
 & & \mathcal{L}^*(S^*S^n) & & \\
 & & & & \rightarrow 0
 \end{array}$$

他の場合も同様である.

§3 ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  上での超局所解析

$D\mathbb{R}^n = \{z \in \mathbb{C}^n; |Im z| < 1\}$  とおくと,  
 $D\mathbb{R}^n$  は  $S^*\mathbb{R}^n$  と同一視される.

$\mathbb{R}^n$  上の Poisson 核を

$$P(z, x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi| + i(z-x)\xi} d\xi,$$

$\mathbb{R}^n$  上の Hörmander 核を

$$H(z, x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} I(\xi)^{-1} e^{i(z-x)\xi} d\xi$$

で定義する。ただし,

$$I(\zeta) = \int_{|\omega|=1} e^{-\omega\zeta} d\omega = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{|\zeta|} |\zeta|^{-\frac{n-1}{2}} (1 + o(|\zeta|^{-1}))$$

( $|\zeta| \rightarrow \infty$ )

である。これらの核に対応して Poisson 作用素  $P$ , 逆作用素  $P'$ , Hörmander 作用素  $H$ , 逆作用素  $H'$  が定義される。

$$Pu = \int_{\mathbb{R}^n} P(z, x) u(x) dx,$$

$$P'u = \int_{|\omega|=1} u(z) d\omega \underset{x}{*} \int_{\mathbb{R}^n} e^{|\zeta|} I(\zeta)^{-1} e^{i\zeta x} d\zeta,$$

( $z = x + i\omega$ )

$$Hu = \int_{\mathbb{R}^n} H(z, x) u(x) dx,$$

$$H'u = \int_{|\omega|=1} u(z) d\omega \quad (z = x + i\omega).$$

$I(\zeta)$  の評価をばうと次の命題が導ける。

### 命題 3.1

$$P: W^s(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} W^{s+\frac{n-1}{4}}(S^*\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{O}(\mathbb{D}\mathbb{R}^n)$$

$$H: W^s(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} W^{s-\frac{n-1}{4}}(S^*\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{O}(\mathbb{D}\mathbb{R}^n)$$

以後  $K = P$  (または  $H$ ),  $K' = P'$  (または  $H'$ ) とする。

次に, S. Pilipović 氏による関数空間を導入する.

$$\mathcal{S}_{L^r}^{s,h}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \forall \alpha, \beta \frac{\|\langle x \rangle^{\alpha} \phi^{(\beta)}(x)\|_{L^r}}{h^{|\alpha+\beta|} \alpha!^s \beta!^s} < \infty \right\}$$

$$\langle x \rangle = (1+x^2)^{1/2}, \quad r \in [1, \infty]$$

$$\mathcal{S}^{(s)}(\mathbb{R}^n) = \varprojlim_{h \rightarrow 0} \mathcal{S}_{L^r}^{s,h}(\mathbb{R}^n) \quad \text{FN空間} \quad (s > 1)$$

$$\mathcal{S}^{\leq 1}(\mathbb{R}^n) = \varinjlim_{h \rightarrow \infty} \mathcal{S}_{L^r}^{s,h}(\mathbb{R}^n) \quad \text{LN空間} \quad (s \geq 1)$$

S. Pilipović 氏はこれらの強双対空間  $\mathcal{S}^{(s)' }(\mathbb{R}^n)$  (LN空間),  $\mathcal{S}^{\leq 1}'(\mathbb{R}^n)$  (FN空間) を tempered ultradistributions と呼んだ.  $\mathcal{S}^{\leq 1}'(\mathbb{R}^n)$  は Fourier hyperfunction にあたるので, これらを Fourier ultradistribution とも呼んでみた. いずれも Fourier 変換で安定であり, 構造定理, 打ち込みなどが研究されている.

命題 3.2 [S. Pilipović]  $u \in \mathcal{S}^{*'}(\mathbb{R}^n)$  ( $*$  =  $(s)$  または  $\leq 1$ ) とする.

$$(x_0, \zeta_0) \notin \text{SS}(u) \iff Ku \text{ は } z_0 = x_0 - i\zeta_0 \in \mathcal{S}^* \mathbb{R}^n \text{ の近傍で解析的である.}$$

また, 次も言える.

命題 3.3

$$K : \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\cong} \mathcal{S}^*(S^*\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D}\mathbb{R}^n)$$

$$K : \mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\cong} \mathcal{S}'^*(S^*\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D}\mathbb{R}^n)$$

さて、我々の目標は次にあった。

命題 3.4

$\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}^{d,*}$ ,  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}^*$  は soft,  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$  は flabby である。

証明

$\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}^*$  について示す。c-soft を示せば十分である。そこで  $u \in \mathcal{L}^*(K)$  ( $K$  コンパクト ( $S^*\mathbb{R}^n$ ) に対応する  $v \in \mathcal{D}'^*(\pi(K))$ ) に対して  $\mathcal{D}'^*$  の softness によりその延長  $w \in \mathcal{D}'^*(\mathbb{R}^n)$  がある。  $w$  の特異台はコンパクトに与えられるから、次の補題により、うまく  $w_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$  をとって  $w - w_0 \in \mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^n)$  とできる。そこで  $w - w_0$  を新しく  $w \in \mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^n)$  とし、射影:  $\mathcal{S}'^*(S^*\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D}\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}^*(S^*\mathbb{R}^n)$  を  $\pi$  としたとき  $\pi \circ P_w \in \mathcal{L}^*(S^*\mathbb{R}^n)$  が  $u$  の延長になる。ただしここでは [6] のように  $\mathcal{L}(S^*\mathbb{R}^n)$  を  $\mathcal{O}(\mathcal{D}\mathbb{R}^n) / \mathcal{O}(\mathcal{D}\mathbb{R}^n \cup S^*\mathbb{R}^n)$  と見ていることに注意する。  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}^{d,*}$ ,  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$  の証明も同様である。

補題 3.6 [Whitney の近似定理]

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  とする.  $\eta \in C^0(\mathbb{R}^n)$ ,  $\eta(x) > 0 (\forall x \in \mathbb{R}^n)$  とする. このとき  $g \in C(\mathbb{R}^n)$  が存在して

$$|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha g(x)| < \eta(x), \quad 0 \leq |\alpha| \leq \frac{1}{\eta(x)}$$

が成り立つ.

注1)  $\mathbb{R}^n$  の plabbiness については相原氏がすで  
に示している. 我々の立場は  $\mathcal{D}^*$ ,  $\mathcal{E}^*$ , ... などの層の  
性質から  $\mathcal{E}^*$ ,  $\mathcal{E}_1^*$  などの層の性質を初等的に示す  
ことにある.  $\mathcal{E}^*$ ,  $\mathcal{E}_1^*$  が soft より強い *supple* という  
性質を持つことは知っているのだが ([4] 参照),  
 $\mathcal{D}^*$ ,  $\mathcal{E}^*$  が *supple* であることが示せないので (おそらく  
不成立), 上記の方法を使うわけにはいかない.

注2) 実は命題 3.1 が小生の不明のため長らく先  
ずかっていたのであるが, I(3) の簡単な評価 ([5] に  
よる) から容易に出るのである. 命題 2.2 に対応し  
ているのだが, 命題 2.2 は複素位相の Fourier  
積分作用素の議論を必要とする. このコントラストは  
おもしろい.

## References

- [1] L. Boutet de Monvel, Convergence dans le domaine complexe des séries de fonctions propres, C. R. Acad. Sc. t. 287, série A, (1978) 855-856
- [2] \_\_\_\_\_ and V. Guillemin, The spectral theory of Toeplitz operators, Princeton U. Press, Annals of Math. series no. 99 (1981)
- [3] F. Bruhat and H. Whitney, Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques - réels, Comment. Math. Helv. 33 (1959), 132-160
- [4] A. Eida and S. Pilipović, On the microlocal decomposition, to appear
- [5] L. Hörmander, The analysis of linear partial differential operators I, Springer (1983)
- [6] H. Komatsu, Microlocal analysis in Gevrey classes and in complex domains, in: Microlocal Analysis and Applications, Lect. Notes in Math., 1495, Springer, 1991, 161-236

- [7] D. Kovačević and S. Pilipović, Structural properties of the space of tempered ultradistributions, Proc. Conf. "Complex Analysis and Application '91 with Symposium on Generalized Functions", Varna, 1991
- [8] G. Lebeau, Fonctions harmoniques et spectre singulier, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 13 (1980) 269-291
- [9] M. Sato, T. Kawai and M. Kashiwara, Hyperfunctions and pseudo-differential equations, Lect. Notes in Math., 287, Springer, 1973
- [10] H. Whitney, Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, Trans. Am. Math. Soc. 36, 63-89