数理解析研究所講究録
第 895 巻 1995 年 81-97

可解 LIE 群上の K- 球函数の正定値性

京都大 理　菊地 克彦 (KATSUHIKO KIKUCHI)

Introduction

等質空間上の解析において、球函数は重要な役割を果たす。特に等質空間 X が局所 compact 群 G とその compact 部分群 K によって $X = G/K$ と表されるとき、X 上の K- 球函数は G の既約 unitary 表現とも関連し、また X の幾何学的構造も強く反映した興味深い対象である。

さて、G を unimodular な局所 compact 群、K を G の compact 部分群とする。このとき、等質空間 G/K 上の (有界)K- 球函数は、次の式で与えられる函数である：

$$\int_K f(xky)dk = f(x)f(y), \quad f(1_G) = 1.$$

これを Banach 代数を使って説明すると、G 上の K 不変な可積分函数全体の作る Banach 代数 $L^1(K\backslash G/K)$ から $\mathbb{C}$ への連続準同型と考えることができる。特に (G, K) が Gelfand 対、つまり $L^1(K\backslash G/K)$ が可換代数のときには、正定値な球函数 f に対し、G の K- 球表現 π が存在し、$f(x) = \langle \pi(x)v, v\rangle$ ($\langle\cdot,\cdot\rangle$ は π の表現空間の内積、v は K 不変 vector) なる 1 対 1 対応が得られる。しかし、有界な K- 球函数が必ずしも正定値とは限らない。例えば (G, K) が Riemann 対称対のとき、compact 型ならば常に正定値だが、非 compact 型では正定値でない K- 球函数が存在する。([N]) そこで、すべての K- 球函数が正定値となるような例として、可解 Lie 群の compact 拡大とその compact 群の対で、Gelfand 対となるものを取り上げ、そのときの球函数の正定値性を示

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

す。既に、巾零 Lie 群の場合には正定値性は示されている。([BJR]) そして、可解 Lie 群の場合も、K- 球函数の形は決定されている。今回は、球函数を決定する parameter から K- 球表現を構成し、それが与えられた K- 球函数に対応するという方法で話を進める。この際、可解 Lie 群は一般に非 I 型であることを考慮する必要がある。

1. 準備

S を連結かつ単連結な (unimodular) 可解 Lie 群、K を S 上に自己同型として作用している連結 compact 群とする。ここで本質的なのは K そのものよりも K の作用なので K は compact Lie 群で、S に効果的に作用しているとしてよい。また、S の Lie 代数を $\mathfrak{s}$ で表すが、S が単連結なることにより S 及び $\mathfrak{s}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(S)$, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{s})$ を同一視する。

ϕ を S 上の有界連続函数とする。ϕ が K- 球函数であるとは、次の条件を満たすことをいう：

$$\int_K \phi(x(k \cdot y))dk = \phi(x)\phi(y), \quad \phi(1_S) = 1. \tag{1.1}$$

ただし、1_S は S の単位元、dk は K 上の正規化された Haar 測度とする。これを Banach 代数を使って説明すると以下のようになる。S 上の群代数 $L^1(S)$ は、次で与えられる積と対合で $*-$ 代数の構造をもつ：

$$(f * g)(x) = \int_S f(xy^{-1})g(y)d\mu(y),$$
$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})},$$

ただし、$d\mu$ は S の Haar 測度である。K の $L^1(S)$ への作用を $(k \cdot f)(x) = f(k^{-1} \cdot x)$ $(f \in L^1(S), k \in K, x \in N)$ で与える。$L^1_K(S)$ で K 不変元全体を表すとすると、$L^1_K(S)$ は $L^1(S)$ の閉 $*$- 部分代数となる。このとき、有界函数 ϕ が K- 球函数であると

いうことは、$L^1_K(S)$ から $\mathbb{C}$ への線型写像 $\lambda_\phi : f \mapsto \int f(x)\phi(x)d\mu(x)$ が Banach 代数としての準同型になることと同値である。

ここで、半直積群 $K \ltimes S$ を次の積演算で与える：

$$(k_1, x)(k_2, y) = (k_1k_2, x(k_1 \cdot y)).$$

すると、$K \ltimes S$ も unimodular 群であり、Haar 測度は $dkd\mu$ で与えられる。$K \ltimes S$ 上の両側 K 不変な可積分函数全体のなす Banach $*$- 代数を $L^1(K\backslash K \ltimes S/K)$ とすると、$L^1_K(S)$ と $L^1(K\backslash K \ltimes S/K)$ は norm も含めて同型である。以下では $(K;S)$ が Gelfand 対、つまり $L^1_K(S)$ が可換代数である場合を扱う。これは $(K \ltimes S, K)$ が Gelfand 対であるものを扱うのと同じことである。

まず、$S = N$ が巾零 Lie 群の場合について論じる。このとき、$L^1(N)$ は対称であり、かつ $(K;N)$ が Gelfand 対であることから $L^1_K(N)$ は可換対称 Banach $*$- 代数である。よって、$L^1_K(N)$ から $\mathbb{C}$ への（$*$- 演算を含まない）準同型は、すべて $L^1(N)$ の $*$- 表現のある 1 次元空間への制限と同一視できる。次の結果は Benson-Jenkins-Ratcliff による。

定理 **1.1** [BJR]　N 上のすべての K- 球函数 ϕ は正定値である。さらに ϕ は N の既約 unitary 表現 (π, H_π) と、$\|v\| = 1$ なる $v \in H_\pi$ を用いて

$$\phi(n) = \phi_{\pi,v}(n) = \int_K \langle \pi(k \cdot n)v, v\rangle dk \tag{1.2}$$

と表される。

逆に $\phi_{\pi,v}$ が球函数になる条件を考えよう。$\widehat{N}$ を N の unitary 双対とする。このとき、K は $\widehat{N}$ に $\pi_k(n) = \pi(k \cdot n)$ $(k \in K, n \in N, \pi \in \widehat{N})$ で作用する。K_π で π の K

における固定部分群を表すと、K_π は K の閉部分群である。$k \in K_\pi$ に対し、H_π 上の unitary 作用素 $W_\pi(k)$ を $\pi_k(n) = W_\pi(k)\pi(n)W_\pi(k)^{-1}$ で決めることにする。今、$(K;N)$ が Gelfand 対であることから、N は高々 2-step である。([BJR]) よって $W_\pi : k \mapsto W_\pi(k)$ は K_π の unitary 表現になるようにとれる。このとき、W_π は K_π の表現として $(W_\pi, H_\pi) = \oplus_\alpha(T_\alpha, V_\alpha)$ と multiplicity-free に分解される。([C]) また、$\pi' = \pi_k$ $(k \in K)$ とするとき、$K_{\pi'} = kK_\pi k^{-1}, H_{\pi'} = H_\pi, W_{\pi'}(k') = W_\pi(k^{-1}k'k)$ $(k' \in K_{\pi'})$ となり、$(W_{\pi'}, H_{\pi'}) = \oplus_\alpha(T'_\alpha, V_\alpha)$ は $W_{\pi'}$ の multiplicity-free な分解となる。

命題 **1.2** [BJR]　(1) $\phi_{\pi,v}$ が K- 球函数になるのは、ある α があって $v \in V_\alpha$ となるときである。

(2) $\pi, \pi' \in \widehat{N}$ について、$\phi_{\pi,v} = \phi_{\pi',v'}$ となるのは、ある $k \in K$ があって、$\pi' = \pi_k$ となり、かつ v と v' が同じ既約成分 V_α の元となるときである。

以下では、$\phi_{\pi,\alpha} = \phi_{\pi,v}$ $(v \in V_\alpha)$ と表すことにする。このとき $\phi_{\pi,\alpha}$ に対応する $K \ltimes N$ の K- 球表現は $\widetilde{U}_{\pi,\alpha} = \mathrm{Ind}_{K_\pi \ltimes N}^{K \ltimes N} U_{\pi,\alpha}$ で与えられる。ただし

$$U_{\pi,\alpha}(k,n) = \bar{T}_\alpha(k) \otimes \pi(n)W_\pi(k). \tag{1.3}$$

2. Gelfand 対 $(K;S)$

巾零 Lie 群 N の場合は、群代数 $L^1(N)$ が対称 Banach $*-$ 代数であること、及び N が I 型群であることにより、K- 球函数の正定値性と、対応する K- 球表現が容易に構成できた。ところが、可解 Lie 群については、群代数の対称性は一般には分からず、また S が I 型でない場合も取り扱う必要がでてくるため、議論は複雑になってしまう。しかし、$(K;S)$ が Gelfand 対であるということにより、S 及び $K \ltimes S$ の構造がある程度決まる。それを以下で述べることにする。

$\mathfrak{s}$ を S の Lie 代数、$\mathfrak{n}$ を $\mathfrak{s}$ の巾零根基、N を $\mathfrak{n}$ に対応する S の解析部分群とする。まず、Leptin による次の補題を与えておく。

補題 2.1 $\mathfrak{s}$ の K 不変な部分空間 $\mathfrak{a}$ で、K が自明に作用し、実 K- 加群として $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ となるものが存在する。

次に $(K;S)$ が Gelfand 対になるための必要十分条件を述べておく。

定理 2.2 [BJR] $(K;S)$ が Gelfand 対になるのは、次の 2 条件が成立するときである：

(1) $(K;S)$ は Gelfand 対である。

(2) 任意の $X \in \mathfrak{a}, y \in S$ に対して、ある $k \in K$ が存在して、

$$(\exp X)y(\exp X)^{-1} = k \cdot y.$$

上の定理は、具体例を扱うには少々不便である。そこでこの定理を書きなおそう。

定理 2.3 $(K;S)$ が Gelfand 対になるのは、次の 3 条件が成立するときである：

(1) $(K;S)$ が Gelfand 対である。

(2) $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{s}$ の部分代数になる。

(3) 任意の $X \in \mathfrak{a}, Y \in \mathfrak{n}$ に対して、$k \in K$ が存在して、

$$\mathrm{Ad}(\exp X)Y = k \cdot Y.$$

さらに、A を $\mathfrak{a}$ に対応する S の解析部分群とするとき、$S = A \ltimes N, K \ltimes S = (K \times A) \ltimes N$ が成立する。

（略証） $(K;S)$ が Gelfand 対とするとき、$X \in \mathfrak{a}, Y \in \mathfrak{n}$ に対し、ある $k \in K$ が存在して、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、

$$(\exp X)(\exp tY)(\exp X)^{-1} = k \cdot (\exp tY)$$

が成立することが分かる。特に、$Y \in \mathfrak{a}$ のとき $[X,Y]=0$ となる。また、S が単連結であることにより、$S = A \ltimes N, K \ltimes S = (K \times A) \ltimes N$ が分かる。逆は、$S = A \ltimes N$ であることと、K の A への作用が自明であることより明らか。 □

後に、$K \ltimes S$ の K- 球表現を構成するが、定理 2.3 より、Mackey の正規部分群を用いる方法で構成するのが有効であることが分かる。ただし、正規部分群として用いるのは S ではなく N である。これは、可解 Lie 群 S は一般には I 型とは限らないが、巾零 Lie 群 N は CCR であることによる。

さて、S 上の K- 球函数を N 上の K- 球函数を用いて記述しよう。ϕ を S 上の K- 球函数とする。$(x,n) \in A \ltimes N$ に対して、

$$\begin{aligned}\phi(x,n) = \phi((0,n)(x,1_N)) &= \int_K \phi((0,n)(k\cdot(x,1_N)))dk \\ &= \phi(0,n)\phi(x,1_N),\end{aligned}$$

ただし、1_N は N の単位元とする。(1.1)を N 上で見ると ϕ の N への制限もまた N 上の K- 球函数である。それを ψ で表しておく。さらに、$x,y \in A$ に対し、

$$\begin{aligned}\phi(x+y,1_N) = \phi((x,1_N)(y,1_N)) &= \int_K \phi((x,1_N)(k\cdot(y,1_N)))dk \\ &= \phi(x,1_N)\phi(y,1_N).\end{aligned}$$

よって、次の結果を得る。

命題 2.4　ϕ に対し、N 上の K- 球函数 $\psi = \psi_{\pi,\alpha}$ と $a \in \mathbb{R}^m$ が存在して、

$$\phi(x,n) = \exp\sqrt{-1}ax\psi_{\pi,\alpha}(n) = \exp\sqrt{-1}ax\int_K \langle \pi(k\cdot n)v, v\rangle dk,$$

ただし、$m = \dim A$ とする。

これにより、S 上の K- 球函数は、3 個の parameter (π,α,a) によってすべて決定される。この K- 球函数を $\phi_{\pi,\alpha,a}$ で表すことにする：

$$\phi_{\pi,\alpha,a}(x,n) = \exp\sqrt{-1}ax\int_K \langle \pi(k\cdot n)v, v\rangle dk. \tag{2.1}$$

Gelfand 対 $(K;S)$ の具体例は、後で述べることにする。

3. 軌道空間

前節で $K \ltimes S = (K\times A)\ltimes N$ の K- 球表現を、Mackey の正規部分群の方法を使って構成すると述べたが、そのためには、N の $(K\times A)$- 軌道空間の Borel 空間としての構造が重要になる。([M])

$\mathfrak{n}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{n})$ は、$\mathfrak{n}$ の双対 $\mathfrak{n}^*$ に右から作用する：$(l\cdot\varphi)(X) = l(\varphi(X))$ $(l\in\mathfrak{n}^*, \varphi\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{n}), X\in\mathfrak{n})$. $\mathfrak{n}$ に K 不変な実内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を入れると、定理 2.3 より実は $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $(K\times A)$ 不変であることが分かる。

補題 3.1　$l\in\mathfrak{n}^*$ について、K- 軌道 $l\cdot K$ と $(K\times A)$- 軌道 $l\cdot(K\times A)$ は集合として等しい。

(略証)　$\mathfrak{n}$ と $\mathfrak{n}^*$ を $X \leftrightarrow (l_X : Y \mapsto \langle X,Y\rangle)$ によって同一視する。すると、定理 2.3 より l の A- 軌道 $l\cdot A$ が $l\cdot K$ に含まれることが分かる。　□

さらに、$\mathrm{Aut}(N) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{n})$ は N の unitary 双対 $\widehat{N}$ に $(\pi \cdot \varphi)(n) = \pi(\varphi(n))$ $(\pi \in \widehat{N}, \varphi \in \mathrm{Aut}(N), n \in N)$ で右から作用する。

命題 3.2 $\pi \in \widehat{N}$ に対し、K- 軌道 $\pi \cdot K$ と $(K \times A)$- 軌道 $\pi \cdot (K \times A)$ は集合として等しい。よって、軌道空間 $\widehat{N}/K$ と $\widehat{N}/(K \times A)$ は Borel 空間として同一視できる。

（略証） N の $\mathfrak{n}^*$ への余随伴表現を Ad^* とするとき、$\varphi \in \mathrm{Aut}(N), l \in \mathfrak{n}^*$ について、$(\mathrm{Ad}^*(N)l) \cdot \varphi = \mathrm{Ad}^*(N)(l \cdot \varphi)$ が分かる。このことと補題 3.1 及び Kirillov 対応 $\widehat{N} \simeq \mathfrak{n}^*/N$ を考え合わせればよい。 □

N は CCR であり、K は compact 群であることから、$\widehat{N}/K$ は 'smooth' である。([G1][G2]) よって $\widehat{N}/(K \times A)$ も 'smooth' である。このことにより、$(K \times A) \ltimes N$ のすべての既約 unitary 表現は Mackey の方法で得られる。

4. 固定部分群

$K \ltimes S = (K \times A) \ltimes N$ に Mackey の方法を適用するために、$\pi \in \widehat{N}$ に対して、固定部分群 $(K \times A)_\pi$ の構造を調べておこう。そのために、極大概周期群の理論を用いる。

G を位相群とし、G 上の有界連続函数全体の作る Banach 空間を $C_b(G)$ で表す。そして $x \in G, f \in C_b(G)$ に対し $f^x(y) = f(x^{-1}y)$ $(y \in G)$ とする。このとき、$f \in C_b(G)$ が概周期函数であるとは、$\{f^x \mid x \in G\}$ が $C_b(G)$ で相対 compact になることである。G が極大概周期群であるとは、任意の $x, y \in G, x \neq y$ について、概周期函数 f で $f(x) \neq f(y)$ となるものが存在することをいう。これは、compact 群 K 及び連続単準同型 $\varphi : G \to K$ が存在することと同値である。

命題 4.1 (1) G が極大概周期群で H を G の部分群とする。このとき H も極大概

周期群である。

(2) G_1, G_2 がともに極大概周期群とすると、$G_1 \times G_2$ も極大概周期群である。

次の定理はよく知られた構造定理である。(例えば [D] を見よ)。

定理 **4.2**　G を連結局所 compact 群とする。このとき、G が極大概周期群であるのは、G がある compact 群と vector 群の直積となるときである。

G が連結でなければ上の定理は成立しないが、次の定理は有効である。

定理 **4.3** [Ku]　G を極大概周期 Lie 群、G_0 を G の連結成分とし、G/G_0 が compact であるとする。すると、compact 部分群 K と vector 群 V で、$G = K \ltimes V, G_0 = K_0 \times V$ (直積) となるものが存在する。ただし、K_0 は K の連結成分である。

これらを π の $K \times A$ における固定部分群 $(K \times A)_\pi$ に適用する。明らかに $(K \times A)_\pi$ は極大概周期群である。$K_\pi, (K \times A)_\pi$ の連結成分をそれぞれ $(K_\pi)_0, ((K \times A)_\pi)_0$ で表す。また $p_A : K \times A \to A$ を自然な射影とすると、補題 3.1 より $p_A((K \times A)_\pi) = A.$

命題 **4.4**　$((K \times A)_\pi)_0 = (K_\pi)_0 \times V'$, ただし、$V'$ は A と同型な vector 群。

(略証) 定理 4.2 より、$((K \times A)_\pi)_0 = K' \times V'$, ただし、$K'$ は compact 群。また $p_A(((K \times A)_\pi)_0) = A.$ さらに $(K_\pi)_0$ が $((K \times A)_\pi)_0$ の compact 部分群、かつ K が $K \times A$ の最大 compact 部分群であることにより $V' \simeq A, (K_\pi)_0 = K'$ となる。□

命題 **4.5**　A に同型なある vector 群 V で $(K \times A)_\pi = K_\pi \ltimes V$, かつ $(K_\pi)_0$ と V が可換になるものが存在する。実は $(K \times A)_\pi = K_\pi \times V$ である。

（略証） まず $((K\times A)_\pi)_0\backslash(K\times A)_\pi \simeq (K_\pi)_0\backslash K_\pi$ が分かる。よって、定理 4.3 より $(K\times A)_\pi = \widetilde{K}\ltimes V$ となる compact 群 $\widetilde{K}$ と vector 群 V が存在する。K_π と $\widetilde{K}$ の連結成分の個数を比べることにより、$\widetilde{K} = K_\pi$ が分かる。さらに、積演算を調べることにより、K_π の V への作用が自明であることが分かる。 □

5. K- 球表現

前節までの結果を用いて、$K\ltimes S = (K\times A)\ltimes N$ 上の K- 球表現をすべて決定する。まず $(K;N)$ が Gelfand 対であることにより、N が高々 2-step であることに注意する。([BJR]) 0 でない $l\in\mathfrak{n}^*$ に対し、対応する N の既約 unitary 表現を $\pi=\pi_l$ とする。B_l を l に付随する $\mathfrak{n}$ 上の交代形式：$B_l([X,Y]) = l([X,Y])$ $(X,Y\in\mathfrak{n})$, $\mathfrak{n}(l)$ を B_l の巾零根基、$\mathfrak{b}(l)=\mathfrak{n}(l)\bigcap(\ker l)$, $B(l)$ を $\mathfrak{b}(l)$ に対応する N の解析部分群とする。すると $\mathfrak{b}(l)$ は $\mathfrak{n}$ の ideal で、$\mathfrak{n}/\mathfrak{b}(l)$ は $\mathbb{R}$ か Heisenberg Lie 代数 $\mathfrak{h}_n$ に同型である。いま $\mathrm{Aut}(N)_\pi = \mathrm{Aut}(\mathfrak{n})_\pi = \{\varphi\in\mathrm{Aut}(N)\mid \pi\circ\varphi\simeq\pi\}$ とする。$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を $\mathfrak{n}$ 上の K 不変な実内積とし、$\mathrm{O}(\langle\cdot,\cdot\rangle)$ でその直交群を表すとすると、$(k,x)\in K\times A$ の作用は $\mathrm{Aut}(\mathfrak{n})_\pi\bigcap\mathrm{O}(\langle\cdot,\cdot\rangle)$ の元とみなすことができる。

命題 5.1 π の $K, K\times A$ における固定部分群をそれぞれ $K_\pi, (K\times A)_\pi$ とし、それらの引き起こす intertwining 表現をそれぞれ $W_\pi, \widetilde{W_\pi}$ とする。すると $W_\pi, \widetilde{W_\pi}$ は（射影表現でない） unitary 表現になり、かつ $W_\pi = \widetilde{W_\pi}|_{K_\pi}$ となるものがとれる。

（略証） $\mathrm{Aut}(\mathfrak{n})_\pi\bigcap\mathrm{O}(\langle\cdot,\cdot\rangle)$ の引き起こす intertwining 表現が unitary 表現になることを示せばよい。それは例えば [Ki] を見よ。 □

命題 4.5 より $(K\times A)_\pi = K_\pi\times V$ となる。$\dim A = m$ とすると $V\simeq\mathbb{R}^m$ となる

から $(K\times A)_\pi^\wedge \simeq \widehat{K}_\pi \times \mathbb{R}^m$ とみなせる：

$$(T,b)(kk_x,x)=T(k)\exp\sqrt{-1}bx,$$

ただし、$T\in\widehat{K}_\pi, b\in\mathbb{R}^m, k\in K_\pi, (k_x,x)\in V$.

$(K\times A)_\pi\ltimes N$ の既約 unitary 表現 $U_{(T,b),\pi}$ を次で与える：

$$U_{(T,b),\pi}(kk_x,x,n)=\overline{\exp\sqrt{-1}bx}\,\overline{T}(k)\otimes\pi(n)\widetilde{W}_\pi(kk_x,x).$$

すると $\widetilde{U}_{(T,b),\pi}=\mathrm{Ind}_{(K\times A)_\pi\ltimes N}^{(K\times A)\ltimes N}U_{(T,b),\pi}$ は $(K\times A)\ltimes N$ の既約 unitary 表現であり、また $(K\times A)\ltimes N$ のすべての既約 unitary 表現はこの形をしている。

ここで１つ記号を用意する。T,U を K の unitary 表現とする。このとき、$c(T,U)$ で intertwining 作用素の作る空間の次元を表す。特に T が既約のとき $c(T,U)$ は U における T の multiplicity を表す。

命題 5.2 $T\in\widehat{K}_\pi$ について、$c(T,W_\pi)=1$ のとき、かつこのときに限り $\widetilde{U}_{(T,b),\pi}$ は $K\ltimes S$ の K- 球表現である。

6. K- 球函数の正定値性

ここで $K\ltimes S$ のすべての K- 球函数の正定値性を証明する。そのために、任意に与えられた K- 球函数 $\phi_{\pi,\alpha,a}$ について、対応する K- 球表現を π,α,a で表す。

$l\in\mathfrak{n}^*$ に対し、$B_l,\mathfrak{n}(l),\mathfrak{b}(l),B(l)$ 及び $\mathrm{Aut}(N)_\pi=\mathrm{Aut}(\mathfrak{n})_\pi$ を前節のようにとり、$\Phi_\pi:\mathrm{Aut}(N)_\pi\to\mathrm{Aut}(B(l)\backslash N)$ を $\Phi_\pi(\varphi)(p_l(n))=p_l(\varphi(n))$ をもって定める。ただし、$p_l:N\to B(l)\backslash N$ は自然な射影とする。すると $\Phi_\pi(K_\pi)$ と $\Phi_\pi(V)$ が可換になる。また $(K;N)$ が Gelfand 対であることから、π の表現空間 H_π の K_π についての既約分解 $H_\pi=\oplus_\alpha V_\alpha$ は multiplicity-free であるから、α に対し、$a_\alpha\in\mathbb{R}^m$ があって、

$$\widetilde{W}_\pi(k_x,x)v=(\exp\sqrt{-1}a_\alpha x)v, \tag{6.1}$$

ただし、$(k_x, x) \in V, v \in V_\alpha$, となるものが存在する。

定理 **6.1** K- 球函数 $\phi = \phi_{\pi,\alpha,a}$ は正定値である。

(略証) $(K \times A)_\pi \ltimes N$ の既約 unitary 表現 $U_{\pi,\alpha,a}$ を

$$U_{\pi,\alpha,a}(kk_x, x, n) = \exp\sqrt{-1}(a - a_\alpha)x\overline{T}_\alpha(k) \otimes \pi(n)\widetilde{W}_\pi(kk_x, x) \tag{6.2}$$

で定める。そして $(K \times A) \ltimes N$ の unitary 表現を $\widetilde{U}_{\pi,\alpha,a} = \mathrm{Ind}_{(K\times A)_\pi \ltimes N}^{(K\times A)\ltimes N}$ とすると、命題 5.2 より $\widetilde{U}_{\pi,\alpha,a}$ は K- 球表現である。このとき K 不変 vector は次のようにして求まる。V_α の基底 $\{v_1, \ldots, v_l\}$ $(l = \dim V_\alpha)$ を 1 つとる。$v = \frac{1}{\sqrt{l}}\sum_i \bar{v}_i \otimes v_i \in \overline{V}_\alpha \otimes H_\pi$ とし、$f : (K \times A)_\pi \ltimes N \to \overline{V}_\alpha \otimes H_\pi$ を

$$f(k, x, n) = \exp\sqrt{-1}ax(1 \otimes \pi(n))v,$$

ただし、$k \in K, x \in A, n \in N$ と定めると、f は K 不変 vector となることが分かる。よって、あとは $\phi_{\pi,\alpha,a}(x, n) = \langle \widetilde{U}_{\pi,\alpha,a}(x, n)f, f\rangle$ を計算により確かめればよい。 □

7. 特別な場合

この節では、幾つかの議論が自明となるような Gelfand 対の例について述べよう。

命題 **7.1** $(K; S)$ を Gelfand 対とし、$\mathfrak{s}$ を S の Lie 代数、そして $\mathfrak{n}, \mathfrak{a}, N, A$ を 2 節のようにとり、さらに K が N に効果的に作用しているとする。いま、次の条件 (I) を満たしているとする：

(I) 連続準同型 $f : A \to K$ によって A の N への作用が K の作用の制限となる。

ここで $V = \{(f(x)^{-1}, x) \mid x \in A\}$ とおく。このとき、

(1) f の像は K の中心に含まれる。

(2) $K \times A = K \times V$ 及び $K \ltimes S = (K \ltimes N) \times V$ が満たされる。

以下では、条件 (I) を満たしている場合のみを考察しよう。まず、補題 3.1 及び命題 4.5 を適用する。

命題 **7.2** $l \in \mathfrak{n}^*$ に対し、$\pi = \pi_l$ を対応する N の既約 unitary 表現とする。このとき、命題 7.1 の V について、

(1) $l \cdot V = l$. よって明らかに $l \cdot (K \times A) = l \cdot K$.

(2) $(K \times A)_\pi = K_\pi \times V$.

さらに、命題 7.1 より $K \ltimes S = (K \ltimes N) \times V$ となることから次のことが容易に分かる。

命題 **7.3** K- 球函数 $\phi_{\pi,\alpha,a}$ に対応する K- 球表現は $K \ltimes N$ の K- 球表現 $\widetilde{U}_{\pi,\alpha}$ と V の 1 次表現 $(k_x, x) \mapsto \exp\sqrt{-1}ax$ の（tensor）積で与えられる。このとき、(6.1)で与えた a_α は明らかにすべて 0 となる。

（注意） a_α は命題 4.5 の V 及び命題 5.1 の $\widetilde{W}_\pi$ のとり方に依存する。たとえば、条件 (I) が満たされても、$(K \times A)_\pi = K \times A$ のときには命題 4.5 の V として A をとることもできる。この場合、一般に a_α は 0 にはならない。（次節の例 2 を見よ）。

8. 例

1. Mautner 群。

S を次で定義する $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}^2$ の半直積とする：

$$(x, z_1, z_2)(x', z_1', z_2') = (x + x', z_1 + e^{\sqrt{-1}\alpha_1 x} z_1', z_2 + e^{\sqrt{-1}\alpha_2 x} z_2'),$$

ただし、α_1, α_2 は $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立な実数の組とする。このとき S は非 I 型可解 Lie 群に

なる。S の Lie 代数を $\mathfrak{s}$ とする。すると $\mathfrak{s}$ の根基 $\mathfrak{n}$ は $\mathbb{C}^2$ となる。$\mathfrak{n}$ に対応する S の解析部分群を N で表すと N は $\mathbb{C}^2$ と同一視できる。

$K=\mathbb{T}^2$ を 2 次元 torus とし、S に次のように作用するとする：

$$(u_1, u_2)\cdot(x, z_1, z_2) = (x, u_1 z_1, u_2 z_2),$$

ただし、u_i $(i = 1, 2)$ は絶対値 1 の複素数とする。明らかに $(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^2)$ は Gelfand 対である。連続準同型 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$ を $f(x) = (e^{\sqrt{-1}\alpha_1 x}, e^{\sqrt{-1}\alpha_2 x})$ とする。すると条件 (I) をみたす。$V = \{(e^{-\sqrt{-1}\alpha_1 x}, e^{-\sqrt{-1}\alpha_2 x}, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ とすると、命題 7.1 より $\mathbb{T}^2 \ltimes S = (\mathbb{T}^2 \ltimes \mathbb{C}^2) \times V$ となる。

N の unitary 双対 $\widehat{N}$ は $\mathbb{R}^4$ と同一視できる：

$$\pi_{(a_1,b_1,a_2,b_2)}(x_1 + \sqrt{-1}y_1, x_2 + \sqrt{-1}y_2) = \exp\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{2}(a_i x_i + b_i y_i).$$

$\widehat{N}$ における $\mathbb{T}^2$- 軌道は次の形をしている：

$$\mathcal{O}_{r_1,r_2} = \{\pi_{(a_1,b_1,a_2,b_2)} \mid a_i^2 + b_i^2 = r_i^2, r_i \geq 0 \text{ for } i = 1, 2\}.$$

そこで、$\mathbb{T}^2$- 軌道空間 $\widehat{N}/\mathbb{T}^2$ の完全代表系として、$\{\pi_{r_1,r_2} \mid r_i \geq 0 \text{ for } i = 1, 2\}$ をとる。ただし、

$$\pi_{r_1,r_2}(x_1 + \sqrt{-1}y_1, x_2 + \sqrt{-1}y_2) = \exp\sqrt{-1}(r_1 x_1 + r_2 x_2).$$

S 上の $\mathbb{T}^2$- 球函数は次の形をしている：

$$\phi_{r_1,r_2,a}(x, z_1, z_2) = \exp\sqrt{-1}ax \int_{\mathbb{T}^2} \pi_{r_1,r_2}((u_1, u_2)\cdot(z_1, z_2))du_1 du_2,$$

ただし、du_i $(i = 1, 2)$ は $\mathbb{T}$ 上の正規化された Haar 測度とする。対応する $\mathbb{T}^2$- 球表現は次のようにして与えられる。まず Hilbert 空間 H_r $(r > 0), H_0$ を次で定義する。$r >$

0 に対し H_r の元 f を $\mathbb{T} \ltimes \mathbb{C}$ 上の可測函数で、次を満たすものとする：

$$f((1, x+\sqrt{-1}y)(u, z')) = \exp\sqrt{-1}rxf(u, z'),$$

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{T}} |f(u, 0)|^2 du < \infty.$$

このとき $\mathbb{T}\ltimes\mathbb{C}$ の既約 unitary 表現 $\widetilde{U}_r$ を $\widetilde{U}_r(u, z)f(u', z') = f((u', z')(u, z))$ とする。また $H_0 = \mathbb{C}$ とし、H_0 への $\mathbb{T}\ltimes\mathbb{C}$ の表現 $\widetilde{U}_0$ は自明とする。すると、$\mathbb{T}^2 \ltimes \mathbb{C}^2 = (\mathbb{T} \ltimes \mathbb{C})^2$ の $\mathbb{T}^2$- 球表現は $\widetilde{U}_{r_1, r_2} = \widetilde{U}_{r_1} \otimes \widetilde{U}_{r_2}$ で与えられる。よって $\phi_{r_1, r_2, a}$ に対応する $\mathbb{T}^2 \ltimes S = (\mathbb{T} \ltimes \mathbb{C})^2 \times V$ の $\mathbb{T}^2$- 球表現は

$$\widetilde{U}_{r_1, r_2, a}(u_1 e^{-\sqrt{-1}\alpha_1 x}, u_2 e^{-\sqrt{-1}\alpha_2 x}, x, z_1, z_2) = \exp\sqrt{-1}ax\widetilde{U}_{r_1}(u_1, z_1) \otimes \widetilde{U}_{r_2}(u_2, z_2)$$

で与えられる。

2. 条件 (I) を満たさない場合。

$\mathbb{R}$ の $\mathbb{C}^2$ への作用を次であたえる：

$$x \cdot (z_1, z_2) = (e^{\sqrt{-1}x} z_1, e^{\sqrt{-1}x} z_2).$$

5 次元 Heisenberg Lie 群 H_2 を次の演算で $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$ と同一視する：

$$((z_1, z_2), t)((z_1', z_2'), t') = ((z_1 + z_1', z_2 + z_2'), t + t' - \frac{1}{2}\mathrm{Im} z\bar{z}'),$$

ただし、$z\bar{z}' = z_1\bar{z}_1' + z_2\bar{z}_2'$ とする。これにより $\mathbb{R}$ が H_2 に自己同型として作用していることが容易に分かる。そこで S をこの作用によって定義された可解 Lie 群とする。

$K = \mathrm{SU}(2)$ は S に次のように作用するものとする：

$$k \cdot (x, (z_1, z_2), t) = (x, k \cdot (z_1, z_2), t),$$

ただし、$k\cdot(z_1,z_2) = {}^t(k^t(z_1,z_2))$ とする。$(K;S)$ が Gelfand 対であることを示そう。まず $(\mathrm{SU}(2);H_2)$ は Gelfand 対である。（例えば [BJR] を見よ）。$z=(z_1,z_2)\in \mathbb{C}^2, x\in\mathbb{R}$ に対し、$k_z, k_x\in \mathrm{SU}(2)$ を次で定義する：

$$k_z = \begin{pmatrix} \dfrac{z_1}{\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2}} & \dfrac{-\bar{z}_2}{\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2}} \\ \dfrac{z_2}{\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2}} & \dfrac{\bar{z}_1}{\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2}} \end{pmatrix}, k_x = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{-1}x} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1}x} \end{pmatrix}.$$

すると $k_z k_x k_z^{-1}\cdot(z_1,z_2) = x\cdot(z_1,z_2)$ となることが分かり、定理 2.3 より $(K;S)$ が Gelfand 対となる。

この対 $(K;S)$ は条件 (I) を満たさない。これは SU(2) の中心が $\{\pm 1\}$ となることより分かる。

$K\ltimes S$ の K- 球表現を求めてみよう。対応する巾零 Lie 群 N は H_2 であり、vector 部分群 A は $\mathbb{R}$ である。興味深いのは無限次元既約 unitary 表現から構成する場合である。$\pi=\pi_l\in\widehat{N}$ を $l((z_1,z_2),t)=t$ なる $l\in\mathfrak{n}^*$ に対応する表現として一般性を失わない。π を次のようにして実現する。H を $\mathbb{C}^2$ 上の正則函数 f で、

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{C}^2} |f(w_1,w_2)|^2 e^{-(|w_1|^2+|w_2|^2)/2} dw_1 dw_2 < \infty$$

を満たすもの全体のなす Hilbert 空間とする。このとき π を次のように定義する：

$$\pi((z_1,z_2),t)f(w_1,w_2) = e^{\sqrt{-1}t-(w_1\bar{z}_1+w_2\bar{z}_2)/2-(|z_1|^2+|z_2|^2)/4} f(w_1+z_1, w_2+z_2).$$

$K\times A$ における π の固定部分群は $(K\times A)_\pi = K\times A$ になる。よって、命題 4.5 の V は A そのものである。$K\times A$ の intertwining 表現 $\widetilde{W}_\pi$ は次で与えられる：

$$\widetilde{W}_\pi(k,x)f(w_1,w_2) = f(k^{-1}e^{-\sqrt{-1}}1_K\cdot(w_1,w_2)),$$

ただし、1_K は2次単位行列とする。H の K についての既約分解は $H = \oplus_m P_m$ で与えられる。ただし、P_m は $\mathbb{C}^2$ 上 m 次斉次多項式全体のなす部分空間とする。$x \in \mathbb{R}, p \in P_m$ について、

$$\widetilde{W}_\pi(1_K, x)p(w_1, w_2) = p(e^{-\sqrt{-1}x}w_1, e^{-\sqrt{-1}x}w_2) = e^{-\sqrt{-1}mx}(w_1, w_2).$$

よって $a_\alpha = -m$ となる。これらに基づいて $\mathrm{SU}(2) \ltimes S$ の $\mathrm{SU}(2)$- 球表現を構成すると次のようになる：

$$\widetilde{U}_{\pi,m,a}(k, x, (z_1, z_2), t) = \exp\sqrt{-1}(a+m)xT_m(k) \otimes \pi((z_1, z_2), t)\widetilde{W}_\pi(k, x),$$

ただし、T_m は $\mathrm{SU}(2)$ の $(m+1)$- 次元既約表現である。

References

[BJR] C. Benson, J. Jenkins, and G. Ratcliff, *On Gelfand pairs associated with solvable Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **321** (1990), 85–116.

[C] G. Carcano, *A commutativity condition for algebras of invariant functions*, Boll. Un. Mat. Italiano **7** (1987), 1091–1105.

[D] J. Dixmier, *C^*-algebras*, North-Holland, Amsterdam, 1977.

[G1] J. Glimm, *Type I C^*-algebras*, Ann. Math. **73** (1961), 572–612.

[G2] ———, *Locally compact transformation groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **101** (1961), 124–138.

[Ki] K. Kikuchi, *On Gelfand pairs associated with nilpotent Lie groups* (to appear).

[Ku] M. Kuranishi, *On non-connected maximally almost periodic groups*, Tôhoku Math. J. **2** (1950), 40–46.

[M] G. Mackey, *Unitary representations of group extensions, I*, Acta Math. **99** (1958), 265–311.

[N] M. Naimark, *Normed algebras*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972.