数理解析研究所講究録
895巻 1995年 44-66

Kazhdan-Lusztig conjecture for Kac-Moody Lie algebras

京大数理研 柏原正樹 (M. Kashiwara)
広島大理 谷崎俊之 (T. Tanisaki)

§0. 序

(有限次元半単純リー代数の)最高ウェイト加群の研究は, D. N. Verma によりはじめられ, 70年代に入って Bernstein-Gelfand-Gelfand や Janzen らによる純代数的手法を用いた精力的な研究が行なわれた。その主な目標は, 既約な最高ウェイト加群の指標を求めることであったが, これに関しては, 1980年前後になってようやく新しい進展がもたらされた。まず Kazhdan-Lusztig [KL1] は, いわゆる Kazhdan-Lusztig 多項式を定義し, これを用いて指標の具体的な形を予想した (Kazhdan-Lusztig 予想)。続いて Beilinson-Bernstein [BB] および Brylinski-柏原 [BK] は, 旗多様体上の D加群を用いることにより, この予想を独立に証明した。

そこで今度は, Kac-Moody リー代数の既約最高ウェイト加群の

指標がどうなるかが問題になる。有限次元半単純リー代数の場合の指標公式の自然な拡張として，次の２つの場合の公式が考えられる。

（１）最高ウェイトが支配的ウェイトとWeyl群共役な場合。

（２）最高ウェイトが反支配的ウェイトとWeyl群共役な場合。

一般の無限次元Kac-Moodyリー代数では，支配的ウェイトと反支配的ウェイトはWeyl群共役ではないので，（１）と（２）は全く別の公式を与える。

（１）については，柏原（－谷崎）[K2]，[KT1]（およびCasian [C1]）により，対称化可能Kac-Moodyリー代数に対して成立することが示された。また（２）は，アフィン・リー代数について正しいことが，柏原－谷崎[KT3]（およびCasian [C2]）により証明された。なお，（２）は一般のKac-Moodyリー代数では成立せず，アフィン・リー代数（あるいは有限次元半単純リー代数）に限る必要がある。

本稿では，[K2]，[KT1]，[KT3]の結果を中心にその解説を行なう。なお，本文の文責は谷崎にあることを付言しておく。

§1. 指標公式

1.0 記号の準備

$\mathfrak{g}$ を Kac-Moody リー代数，$\mathfrak{h}$ をその Cartan 部分代数，$\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset \mathfrak{h}^*$ を単純ルート系，$\{h_i\}_{i=1}^n \subset \mathfrak{h}$ を単純余ルート系とし，Δ をルート系，Δ^+ を正ルート系とする．また，各 $\alpha \in \Delta$ に対して，対応するルート空間を $\mathfrak{g}_\alpha$ で表わす．$i=1, \cdots, n$ に対して，$e_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$，$f_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ を $[e_i, f_i] = h_i$ となるように選ぶ．$\mathfrak{g}$ の部分代数を

$$\mathfrak{n}^+ = \langle e_1, \cdots, e_n \rangle \quad , \quad \mathfrak{n}^- = \langle f_1, \cdots, f_n \rangle$$
$$\mathfrak{b}^+ = \langle e_1, \cdots, e_n, \mathfrak{h} \rangle \quad , \quad \mathfrak{b}^- = \langle f_1, \cdots, f_n, \mathfrak{h} \rangle$$

で定めるとき，

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+ \quad , \quad \mathfrak{b}^\pm = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^\pm$$
$$\mathfrak{n}^\pm = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$$

が成立する．また $W \subset GL(\mathfrak{h}^*)$ を Weyl 群とする．すなわち，$i = 1, \cdots, n$ に対して，$s_i \in GL(\mathfrak{h}^*)$ を

$$s_i(\lambda) = \lambda - \lambda(h_i)\alpha_i \qquad (\lambda \in \mathfrak{h}^*)$$

により定め，$W = \langle s_i \rangle_{i=1}^n$ とする．$S = \{s_i\}_{i=1}^n$ とおくとき，(W, S) は Coxeter 群になる．従って，各 $w \in W$ に対して，その長さ $\ell(w) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が定まる．また，W 上の Bruhat 順序を $\geq$ により表わす．

1.1 問題の説明

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して，$\mathfrak{g}$加群 $M(\lambda)$ を次で定める：

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \Big/ \Big(\sum_{h \in \mathfrak{h}} U(\mathfrak{g})(h - \lambda(h)1) + U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^+ \Big)$$

$$\cong U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^+)} \mathbb{C}_\lambda .$$

ここで $U(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の包絡代数を表わす。また $\mathbb{C}_\lambda$ は

$$\mathbb{C}_\lambda = \mathbb{C} v_\lambda , \quad h \cdot v_\lambda = \lambda(h) v_\lambda \ (h \in \mathfrak{h}), \quad e_i \, v_\lambda = 0 \ \ (i = 1, \cdots, n)$$

により定まる1次元 $\mathfrak{b}^+$加群である。$M(\lambda)$ はただ1つの極大真部分加群 $K(\lambda)$ を含む。従って商加群

$$L(\lambda) = M(\lambda) / K(\lambda)$$

は既約 $\mathfrak{g}$加群になる。$M(\lambda)$ を最高ウェイト λ の Verma加群，$L(\lambda)$ を最高ウェイト λ の既約加群と呼ぶ。

一般に $\mathfrak{g}$加群 M と $\mu \in \mathfrak{h}^*$ に対して，

$$M_\mu = \{ m \in M \mid {}^\forall h \in \mathfrak{h} , \ {}^\exists N \ \text{s.t.} \ (h - \mu(h) \cdot 1)^N m = 0 \}$$

とおく。$\mathfrak{g}$加群 M であって，$M = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} M_\mu$ かつ $\dim M_\mu < \infty$ $({}^\forall \mu \in \mathfrak{h}^*)$ をみたすものを一般ウェイト加群と呼び，その指標 $\mathrm{ch}(M)$ を形式的無限和

$$\mathrm{ch}(M) = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} (\dim M_\mu) \, e^\mu$$

として定める。$M(\lambda)$, $L(\lambda)$ は一般ウェイト加群なので，指標を考えることができる。

「<u>命題 1.1.1</u>　$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対し

$$\mathrm{ch}(M(\lambda)) = \frac{e^{\lambda}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})^{\dim\mathfrak{g}_\alpha}}.$$
」

ただし，シンボル e^{λ} は $e^{\lambda_1}e^{\lambda_2}=e^{\lambda_1+\lambda_2}$ をみたすものとし，

$\dfrac{1}{1-e^{-\alpha}}$ は $\sum_{i=0}^{\infty} e^{-i\alpha}$ として解釈する。命題1.1.1は，$M(\lambda)$ が $U(\mathfrak{n}^-)$ 加群として階数1の自由加群であることから簡単に従う。

「<u>問題 1.1.2</u> (Verma)　$\mathrm{ch}(L(\lambda))$ を求めよ。」

以下 $\mathfrak{h}^*$ の $\mathbb{Z}$ 束 P であって，

$$\langle P, h_i\rangle \subset \mathbb{Z}, \quad \alpha_i \in P \qquad (i=1,\cdots,n)$$

をみたすものをひとつ固定し，$\lambda\in P$ の場合に問題を考えることにする。

上の問題の解答としてよく知られているのは，Weyl-Kac の指標公式であるが，これについて説明しよう。

$\rho \in \mathfrak{h}^*$ であって，$\rho(h_i)=1$ $(i=1,\cdots,n)$ をみたすものを

ひとつとり，固定する．

$$P^+ = \{\lambda \in P \mid \lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (i=1,\cdots,n)\}$$

$$= \{\lambda \in P \mid (\lambda+\rho)(h_i) \in \mathbb{Z}_{>0} \quad (i=1,\cdots,n)\}$$

$$P^- = \{\lambda \in P \mid (\lambda+\rho)(h_i) \in \mathbb{Z}_{<0} \quad (i=1,\cdots,n)\}$$

とおく．

「<u>定理1.1.3</u>（Weyl－Kacの指標公式）

$\lambda \in P^+$のとき

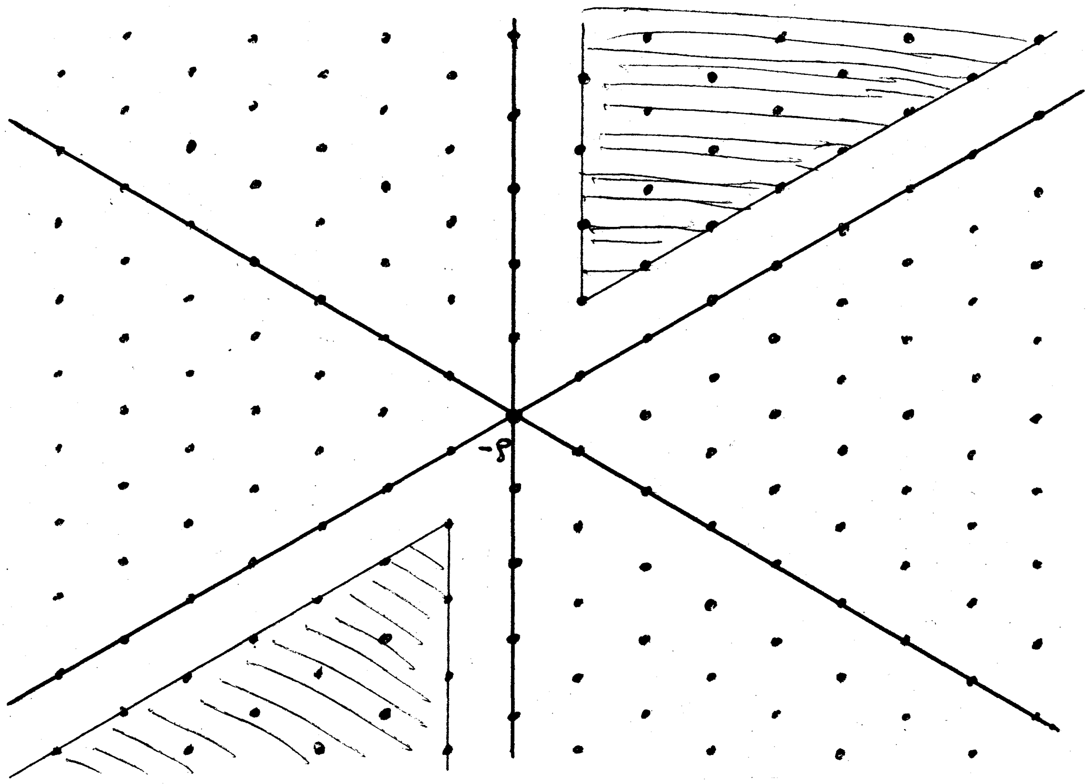
$$ch(L(\lambda)) = \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} ch(M(w(\lambda+\rho)-\rho))$$」

この公式にみえるように，以下Weyl群Wの$\mathfrak{h}^*$への作用で原点を$-\rho$にずらしたものが頻繁にでてくる．そこで記号を簡略化するために，

$$w \circ \lambda = w(\lambda+\rho)-\rho \qquad (w \in W, \lambda \in \mathfrak{h}^*)$$

とおく．

A_2型の場合に絵をかくと，次のようになる．



この絵で，3本の直線(壁)に関するおり返しで生成される群が，Weyl群の$-\rho$だけずらした作用を与える。・がPの点，中のPの点の全体がP^+，中のPの点の全体がP^-である。

壁の上にあるPの点の全体を

$$P_{sing} = \{\lambda \in P \mid \lambda(h_i) = 0 \quad (\exists i = 1, \dots, n)\}$$

とし，$P_{reg} = P - P_{sing}$ とおく。P^+, P^- は共に W の P_{reg} への(ずらした)作用に関する完全代表系を与えている。

1.2 有限次元半単純リー代数の場合

まず $\mathfrak{g}$ が有限次元の場合を考える。

$\lambda \in P_{sing}$ のときの $L(\lambda)$ の指標は、$\lambda \in P_{reg}$ のときのある種の極限として得られることが知られている (translation principle)。従って、$\lambda \in P_{reg}$ の場合を考えればよい。

「**命題 1.2.1** $\operatorname{rank} \mathfrak{g} = n \leqq 2$ とする。

$\lambda \in P^-$, $w \in W$ のとき,

$$\begin{cases} ch(L(w \circ \lambda)) = \sum_{y \leqq w} (-1)^{\ell(w)-\ell(y)} \blacksquare\, ch(M(y \circ \lambda)) & \cdots ① \\ ch(M(w \circ \lambda)) = \sum_{y \leqq w} \blacksquare\, ch(L(y \circ \lambda)) & \cdots ② \end{cases}$$

$\lambda \in P^+$, $w \in W$ のとき,

$$\begin{cases} ch(L(w \circ \lambda)) = \sum_{y \geqq w} (-1)^{\ell(y)-\ell(w)} \blacksquare\, ch(M(y \circ \lambda)) & \cdots ③ \\ ch(M(w \circ \lambda)) = \sum_{y \geqq w} \blacksquare\, ch\, L(y \circ \lambda)) & \cdots ④ \end{cases}$$

ここで $\blacksquare = 1$ とする。」

①と②は共に

$$\sum_{y \leqq x \leqq w} (-1)^{\ell(x)-\ell(y)} = \delta_{y,w} \qquad (y \leqq w)$$

から同値なのである。また, W の最長元を w_0 とするとき,

$w_0 \circ P^- = P^+$ と $y \leqq w \Longleftrightarrow y w_0 \geqq w w_0$ により, ③, ④は

それぞれ①,② と同値である。よって上の①〜④はすべて同値な関係式を与える。

Verma の最初の期待は、これが一般の有限次元半単純リー代数について成立するのではないかというものであったが、実は、$\operatorname{rank} \mathfrak{g} > 2$ のときには、▨に 1 より大きな数が入ることがあり、そう単純ではない。▨の部分がいわゆる Kazhdan-Lusztig 多項式を使ってかけるというのが、Kazhdan-Lusztig 予想である。これを述べるために Kazhdan-Lusztig 多項式の定義を説明する。

$\boxed{1.3}$ Kazhdan-Lusztig 多項式

一般に (W, S) を Coxeter 系とする。$\{T_w\}_{w \in W}$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 加群

$$H(W) = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[q, q^{-1}]\, T_w$$

上の結合代数の構造が、

$$\begin{cases} T_{w_1} T_{w_2} = T_{w_1 w_2} & (\ell(w_1) + \ell(w_2) = \ell(w_1 w_2)) \\ (T_s + 1)(T_s - q) = 0 & (s \in S) \end{cases}$$

により一意的に定まる $(T_e = 1)$。これを (W, S) の Hecke-岩堀代数と呼ぶ。

「**命題1.3.1** (Kazhdan-Lusztig [KL1])

各 $w \in W$ に対して,

$$C_w = \sum_{y \leq w} P_{y,w}(q) T_y \in H(W) \qquad (P_{y,w}(q) \in \mathbb{Z}[q])$$

であって, 以下の条件をみたすものが一意的に定まる.

(a) $P_{w,w}(q) = 1$

(b) $y < w$ のとき $P_{y,w}(q) \in \mathbb{Z}[q^{-\frac{1}{2}}]\, q^{\frac{1}{2}(\ell(w)-\ell(y)-1)} \cap \mathbb{Z}[q]$

(c) $C_w = q^{+\ell(w)} \sum_{y \leq w} P_{y,w}(q^{-1})\, T_{y^{-1}}^{-1}$ 」

$P_{y,w}(q)$ を Kazhdan-Lusztig 多項式と呼ぶ. $|S| \leqq 2$ ならば, 常に $P_{y,w}(q) = 1$ となる。

1.4 有限次元半単純リー代数の場合(続き)

再び, §1.3 の設定に戻る. 問題は命題1.2.1. の の部分であったが, 答は次のとおり

「**定理1.4.1** (Kazhdan-Lusztig予想 [KL1]; Beilinson-Bernstein [BB], Brylinski-柏原 [BK]).

$\mathfrak{g}$ を有限次元半単純リー代数とする.

$\lambda \in P^-$, $w \in W$ のとき

$$\begin{cases} ch(L(w\circ\lambda)) = \sum_{y \leqq w} (-1)^{\ell(w)-\ell(y)} P_{y,w}(1)\, ch(M(y\circ\lambda)) & \cdots ①' \\ ch(M(w\circ\lambda)) = \sum_{y \leqq w} P_{ww_0, yw_0}(1)\, ch(L(y\circ\lambda)) & \cdots ②' \end{cases}$$

$\lambda \in P^+$, $w \in W$ のとき

$$\begin{cases} ch(L(w\circ\lambda)) = \sum_{y \geqq w} (-1)^{\ell(y)-\ell(w)} P_{yw_0, ww_0}(1)\, ch(M(y\circ\lambda)) & \cdots ③' \\ ch(M(w\circ\lambda)) = \sum_{y \geqq w} P_{w,y}(1)\, ch(L(y\circ\lambda)) & \cdots ④' \end{cases}$$

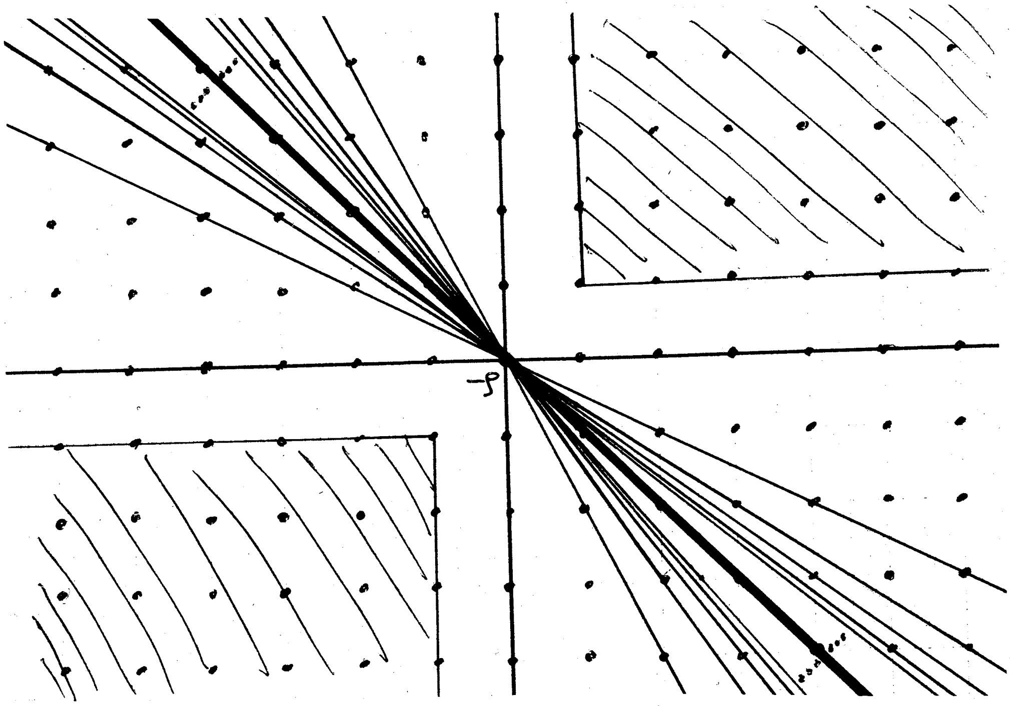
①′と②′は公式（[KL1]）

$$\sum_{y \leqq x \leqq w} (-1)^{\ell(x)-\ell(y)} P_{y,x}(q)\, P_{ww_0, xw_0}(q) = \delta_{y,w} \quad (y \leqq w)$$

から同値な式である。また命題1.2.1の場合と同じ理由により，③′，④′はそれぞれ①′，②′と同値である。従って，やはり，①′～④′はすべて同値な公式とする。

$\boxed{1.5}$ Kac-Moody リー代数の場合

次に，一般のKac-Moodyリー代数の場合への拡張を考えよう。最も簡単な$A_1^{(1)}$の場合にもPのA_2と同様の絵をかいてみよう。



壁が無数にあるので全部は書けないが、

$$y=-\frac{n-1}{n}x,\quad y=-\frac{n+1}{n}x \quad (n=1,2,3,\cdots),\quad x=0$$

がWeyl群のおり返しに関する壁で、他にその極限としての(別の意味の)壁 $y=-x$ がある。P^+(あるいはP^-)の点から出発してWeyl群の元を作用させると、壁をひとつひとつ越えて隣りの領域には移れるが、どこまで行っても真中のベルリこの壁 $y=-x$ を乗り越えることはできない。これはWeyl群が無限群で最長元 w_0 が存在しないことに起因する。

そこで、定理1.4.1を一般のKac-Moodyリー代数に拡張することを考えよう。w_0 が存在しないので、そのまま拡張できるのは、定理1.4.1の主張のうち①′と④′である。またIに

述べた理由により，①′と④′は一般のKac-Moodyリー代数では別の主張になる。

「<u>定理1.5.1</u>（柏原-谷崎 [K2], [KT1]，Casian [C1]）

$\mathfrak{g}$を対称化可能Kac-Moodyリー代数とする。

$\lambda \in P^{+}$, $w \in W$ に対し

$$\mathrm{ch}(M(w\circ\lambda)) = \sum_{y \geq w} P_{w,y}(1)\, \mathrm{ch}(L(y\circ\lambda))$$
」

「<u>定理1.5.2</u>（柏原-谷崎 [KT3]，Casian [C2]）

$\mathfrak{g}$をアフィン・リー代数とする。

$\lambda \in P^{-}$, $w \in W$ に対し

$$\mathrm{ch}(L(w\circ\lambda)) = \sum_{y \leq w} (-1)^{\ell(w)-\ell(y)} P_{y,w}(1)\, \mathrm{ch}(M(y\circ\lambda))$$
」

なお，定理1.5.1の場合の$\mathrm{ch}(L(w\circ\lambda))$および定理1.5.2の場合の$\mathrm{ch}(M(w\circ\lambda))$に関する公式は逆Kazhdan-Lusztig多項式を用いて書けるが，ここでは省略する。

§2. 旗多様体上のD加群

$\boxed{2.0}$ 本節では、定理1.4.1、定理1.5.1、定理1.5.2の証明の方針について述べる。考え方はどれも同じで、次の対応関係：

$$\boxed{\mathfrak{g}\text{加群}} \longleftrightarrow \boxed{\text{旗多様体上の }D\text{加群}} \longleftrightarrow \boxed{\text{旗多様体上の偏屈層}}$$

により、問題をSchubert多様体の交叉コホモロジー群の計算に帰着させる。

$\boxed{2.1}$ 定理1.4.1の証明について

$\mathfrak{g}$を有限次元半単純リー代数とする。$\mathfrak{g}$に対応する連結な代数群をGとし、B^+, B^-をそれぞれ$\mathfrak{b}^+$, $\mathfrak{b}^-$に対応するGの部分群とする。このとき、$X=G/B^-$をGの旗多様体と呼ぶ。一般に滑らかな代数多様体Yに対して、Yの構造層を$\mathcal{O}_Y$、Y上の微分作用素の層を$D_Y\subset \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_Y)$であらわす。旗多様体$X$には$G$が作用しているので、これから環準同型

$$U(\mathfrak{g})\longrightarrow\Gamma(X;D_X)\qquad (a\in\mathfrak{g}\mapsto \partial_a)$$

が、

$$(\partial_a f)(x)=\frac{d}{dt}f(\exp(-ta)x)\Big|_{t=0}\qquad (a\in\mathfrak{g},\ f\in\mathcal{O}_X,\ x\in X)$$

により定まる. 従って(左)D_X加群 $\mathcal{M}$ に対して $U(\mathfrak{g})$加群 $\Gamma(X;\mathcal{M})$ が定まる. また $U(\mathfrak{g})$加群 M に対して D_X加群 $D_X\otimes_{U(\mathfrak{g})} M$ が定まる.

「<u>定理2.1.1</u> (Beilinson–Bernstein [BB])
次の圏同値が成立する.

$$\left\{\begin{array}{l}U(\mathfrak{g})\text{加群であって,}\\ \text{1次元の自明な加群と}\\ \text{同じ中心指標をもつもの}\end{array}\right\} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l}\text{左}D_X\text{加群であって,}\\ \mathcal{O}_X\text{加群として}\\ \text{準連接的なもの}\end{array}\right\}$$

$$M \longmapsto D_X\otimes_{U(\mathfrak{g})} M$$

$$\Gamma(X;\mathcal{M}) \longleftarrow\!\shortmid\ \mathcal{M}$$
」

なお, [BK]においては, これより弱い形の圏同値が示されている.

$w\in W$ に対して, $U(\mathfrak{g})$加群 $M(w\circ 0)$, $L(w\circ 0)$ は 1次元の自明な$\mathfrak{g}$加群と同じ中心指標をもつので, これらに対応して D_X加群

$$\mathcal{M}_w = D_X\otimes_{U(\mathfrak{g})} M(w\circ 0)$$
$$\mathcal{L}_w = D_X\otimes_{U(\mathfrak{g})} L(w\circ 0)$$

が定まる.

このとき，定理1.4.1の④′を（$\lambda=0$ のときに）証明するには，左 D_X 加群の圏の Grothendieck 群における等式

$$[\mathcal{M}_w] = \sum_{y \geq w} P_{w,y}(1)[\mathcal{L}_y]$$

を示せばよい．そのためには，$\mathcal{M}_w$，$\mathcal{L}_w$ がどのような D_X 加群であるかを考える必要がある．$w \in W$ に対し

$$X^w = B^+ w B^- / B^- \subset X$$

とおく．このとき，次はよく知られている．

「<u>命題 2.1.2</u>

(i) X^w は X の局所閉部分多様体．

(ii) $X = \bigsqcup_{w \in W} X^w$．

(iii) $X^w \simeq \mathbb{C}^{\dim X - \ell(w)}$．

(iv) $\overline{X^w} = \bigsqcup_{y \geq w} X^y$．」

そこで，

「<u>定理 2.1.3</u>（[BB], [BK]） $w \in W$ とすると

$$\mathcal{M}_w = \left(\mathcal{H}^{\ell(w)}_{X^w}(\mathcal{O}_X)\right)^*, \quad \mathcal{L}_w = \mathrm{Image}(\mathcal{M}_w \longrightarrow \mathcal{M}_w^+)$$」

ここで，$\mathcal{H}^{l(w)}_{X^w}$ は X^w に台をもつ $l(w)$ 次の局所コホモジー層をとる関手である。$\mathcal{O}_X$ は自然に左 D_X 加群なので $\mathcal{H}^{l(w)}_{X_w}(\mathcal{O}_X)$ も自然に D_X 加群になるが，さらにこれは正則ホロノミー左 D_X 加群になる。(正則) ホロノミー D_X 加群の圏では，双対関手 $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}^*$ が，

$$\mathcal{M}^* = \mathcal{E}xt^{\dim X}_{D_X}(\mathcal{M}, D_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{*}$$

により定まる。従って $\mathcal{M}_w$ も正則ホロノミー D_X 加群である。また $\mathcal{M}_w, \mathcal{M}_w^*$ が正則ホロノミー左 D_X 加群なので，$\mathcal{L}_w$ も正則ホロノミー D_X 加群である。$\partial X^w = \overline{X^w} - X^w$ とおくとき，$\mathcal{M}_w | X - \partial X^w \cong \mathcal{L}_w | X - \partial X^w$ で，これは X^w に台をもつデルタ関数のみたす微分方程式になる。

一般に Y を $\mathbb{C}$ 上の滑らかな代数多様とするとき，正則ホロノミー D_Y 加群の圏と Y 上の偏屈層の圏の反圏同値

$$Sol : \{\text{正則ホロノミー } D_Y \text{ 加群}\} \to \{Y \text{ 上の偏屈層}\}$$

が

$$Sol(\mathcal{M}) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{D_Y}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_Y)$$

により定まる (Rieman-Hibert 対応)。従って，我々の考える問題は，D 加群の問題からさらに偏屈層の問題に翻訳できる。Rieman-Hilbert

対応の一般論により

$$Sol(\mathcal{M}_w) = (\mathbb{C}_{X^w}[-\ell(w)])^*, \quad Sol(\mathcal{L}_w) = {}^\pi\mathbb{C}_{X^w}[-\ell(w)].$$

従って，定理1.4.1の④′でλ=0の場合，主張は次から従う。

「<u>定理2.1.4</u>（[KL2]）偏屈層の圏のGrothendieck群において，

$$[\mathbb{C}_{X^w}[-\ell(w)]] = \sum_{y \geq w} P_{w,y}(1)\,[{}^\pi\mathbb{C}_{X^y}[-\ell(y)]]$$

$$\left([\mathbb{C}_{X_w}[-\ell(w)]] = [(\mathbb{C}_{X^w}[-\ell(w)])^*] \text{ に注意} \right)$$」

この定理は定理1.4.1の証明以前に知られていたものである。

定理1.4.1でλが一般の場合は，translation principleにより，λ=0の場合に帰着できる。あるいは，ねじれD_X加群を使えば，上と全く同様の議論により証明することもできる。

2.2 Kac-Moody リー代数の旗多様体

Kac-Moody リー代数に対して，定理1.4.1の証明で述べた議論を適用しようとすると，まずその旗多様体を構成しなければならない。これについて解説する。

以下 $\mathfrak{g}$ を Kac-Moody リー代数とする。

まず群スキーム H, N^+, N^-, B^+, B^- を次で定める:

$$H = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[P]),$$

$$N^{\pm} = \varprojlim_{k} \exp(\mathfrak{n}^{\pm}/(\mathrm{ad}\,\mathfrak{n}^{\pm})^k \mathfrak{n}^{\pm}),$$

$$B^{\pm} = (H \text{ と } N^{\pm} \text{ の半直積}).$$

Hは有限次元であるが, $N^{\pm}$, $B^{\pm}$ は無限次元である. $\mathfrak{g}$が有限次元の場合, 対応する代数群の座標環は包絡環 $U(\mathfrak{g})$ のある種の双対として捉えることができるが, この方法で, $\mathfrak{g}$が一般のKac-Moody リー代数の場合もスキーム G を構成することができる(詳細略). Gは群スキームではないが, B^+の左からの局所自由な作用と B^-の右からの局所自由な作用をもつ. このとき, $\mathfrak{g}$の旗多様体を商多様体

$$X = G/B^- \qquad ([K1])$$

として定義することができる. また, $\mathfrak{g}$が有限次元のときの B^+wB^-/B^-, B^-wB^-/B^- の類似物 X^w, X_w が X の局所閉部分多様体として定義され, 次が成立する.

命題 2.2.1 ([K1])

(i) $X = \bigsqcup_{w \in W} X^w$

(ii) $X^w \simeq \mathbb{C}^{\infty}$ で $\mathrm{codim}\, X^w = l(w)$

(iii) $\overline{X^w} = \bigsqcup_{y \geq w} X^y$.

「<u>命題 2.2.2 ([KT3])</u>

(i) $\bigcup_{w \in W} X_w = \bigsqcup_{w \in W} X_w \subset X$.

(ii) $X_w \simeq \mathbb{C}^{\ell(w)}$.

(iii) $\overline{X_w} = \bigsqcup_{y \leq w} X_y$ 」

ただし，無限変数の多項式環 $\mathbb{C}[x_i \mid i \in \mathbb{N}] = \varinjlim_n \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ に対して，$\mathbb{C}^\infty = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_i \mid i \in \mathbb{N}]) = \varprojlim_n \mathbb{C}^n$ とおく．旗多様体 X は無限次元ではあるが，局所的には $\mathbb{C}^\infty$ と同型なよいスキームである．

$\boxed{2.3}$ 定理1.5.1, 1.5.2 の証明

$\mathfrak{g}$ を Kac-Moody リー代数とする．まず定理1.5.1 の証明について述べる．X を $\mathfrak{g}$ の旗多様体とする．X はよい無限次元スキームなので，そのうえで（正則ホロノミー）D_X 加群の理論を展開することができる．有限次元の場合と同様に，$w \in W$ に対して

$$\mathcal{M}_w = (\mathcal{H}^{\ell(w)}_{X_w}(\mathcal{O}_X))^*, \quad \mathcal{L}_w = \mathrm{Image}(\mathcal{M}_w \longrightarrow \mathcal{M}_w^*)$$

とおくとき，これらは正則ホロノミー左 D_X 加群になる．

W の有限部分集合 F が，条件

$$w \in F,\ y \in W \Rightarrow y \in F$$

をみたすとき，F を可容的集合という．このとき，

$$X^F=\coprod_{w\in F}X^w$$

はXの準コンパクトな開集合である。$w\in F$のとき、$\mathcal{M}_w|X^F$および$\mathcal{L}_w|X^F$は正則ホロノミーD_{X^F}加群で、さらに$\mathcal{L}_w|X^F$は既約になる。また$\mathcal{M}_w|X^F$は有限な組成列をもち、各組成因子は、ある$y\in F$に対する$\mathcal{L}_y|X^F$と同型である。有限な組成列をもつ正則ホロノミーなD_{X^F}加群であって、組成因子がある$y\in F$に対する$\mathcal{L}_y|X^F$と同型になるもののなす圏を$\mathbb{M}_0^F$とかく。

このとき、正則ホロノミーなD_X加群$\mathcal{M}$であって、任意の可容的集合Fについて$\mathcal{M}|X^F\in Ob(\mathbb{M}_0^F)$となるものの圏を$\mathbb{M}_0$とすると、$\mathbb{M}_0=\varprojlim_F \mathbb{M}_0^F$となる。そこで、$\mathcal{M}\in Ob(\mathbb{M}_0)$に対して、$\hat{H}^n(X;\mathcal{M})$を次で定める。$H^n(X^F;\mathcal{M})$は自然に$\mathfrak{h}$加群であるが、ウェイト空間$H^n(X^F;\mathcal{M})_\mu$は十分大きなFのとり方によらない。これを$\hat{H}^n(X;\mathcal{M})_\mu$とかき、$\hat{H}^n(X;\mathcal{M})$を

$$\hat{H}^n(X;\mathcal{M})=\bigoplus_{\mu\in P}\hat{H}^n(X;\mathcal{M})_\mu$$

とおく。このとき、$\hat{H}^n(X;\mathcal{M})$は自然に$\mathfrak{g}$加群になる。

<u>定理2.3.1</u>（[K2]）

(i) 任意の$\mathcal{M}\in\mathbb{M}_0$に対して$\hat{H}^n(X;\mathcal{M})=0$　$(n>0)$.

(ii) $\hat{H}^0(X;\mathcal{M}_w)\simeq M(w\circ 0)$

(iii) $\hat{H}^0(X;\mathcal{L}_w)\simeq L(w\circ 0)$.

定理1.5.1は，この定理と$\overline{X^w}$の交叉コホモロジー群の計算([KT1])から従う。

定理1.5.2も同じ思想のもとで証明されるが，基本的に異なる点のみについて注意しておく。旗多様体としては，$X=G/B^-$でなく，Gの定義においてB^+とB^-の役割をいれかえてできるスキームG'をB^+でわったもの$X'=G'/B^+$を用いる。またSchubertセルX^wのかわりにB^+wB^+/B^+の類似物$X'_w \simeq \mathbb{C}^{\ell(w)}$を用いる。さらに左D加群ではなく，右D加群を用いる(無限次元多様体上では左D加群と右D加群は全くの別物)。その他の詳細は略す。

文献

[BB] A. Beilinson, J. Bernstein, localisation de $\mathfrak{g}$-modules, C. R. Acad. Sci. Paris, **292** (1981), 15-18.

[BK] J.-L. Brylinski, M. Kashiwara, Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems, Invent. Math., **64** (1981), 387-410.

[C1] L. Casian, Kazhdan-Lusztig multiplicity formulas for Kac-Moody algebras, C. R. Acad. Sci. Paris, **310** (1990), 333-337.

[C2] L. Casian, Kazhdan-Lusztig conjecture in the negative level case (Kac-Moody algebras of affine type), preprint.

[DGK] V. V. Deodhar, O. Gabber, V. Kac, Structure of some categories of representations of infinite dimensional Lie algebras, Adv. in Math., **45** (1982), 92-116.

[J] J. C. Jantzen, Moduln mit einem höchsten Gewichit, Lecture Notes in Math. **750**, Springer Verlag, 1979.

[Kac] V. Kac, Infinite dimensional Lie algebras (3rd ed.), Cambridge Univ. Press, 1990.

[KK] V. Kac, D. Kazhdan, Structure of representations with highest weight of infinite dimensional Lie algebras, Adv. Math., **34** (1979), 97-108.

[K1] M. Kashiwara, The flag manifold of Kac-Moody Lie algebra, Algebraic Analysis , Geometry, and Number Theory, supplement of Amer. J. Math., Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1989, 161-190.

[K2] M. Kashiwara, Kazhdan-Lusztig conjecture for symmetrizable Kac-Moody Lie algebras,
Progress in Math. **87**, Birkhäuser, 1991, 407-433.

[KT1] M. Kashiwara, T. Tanisaki, Kazhdan-Lusztig conjecture for symmetrizable Kac-Moody Lie algebras II, Progress in Math. **92**, Birkhäuser, 1990, 159-195.

[KT2] M. Kashiwara, T. Tanisaki, Characters of the negative level highest-weight modules for affine Lie algebras, Intern. Math. Res. Notices. (1994), 151-160.

[KT3] M. Kashiwara, T. Tanisaki, Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras with negative level, Duke Math. J. in press.

[KL1] D. Kazhdan, G. Lusztig, Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, Invent. Math. **53** (1979), 165-184.

[KL2] D. Kazhdan, G. Lusztig, Schubert varieties and Poincaré duality, Proc. Symp. in Pure Math., **36** (1980), 185-203.