

非線形作用素の軌道と不動点集合への引き込み写像

お茶大理 澤島侑子 (Ikuko Sawashima)

Banach 空間上の非線形作用素に対する双対の方法について、数理経済の国際学会や関数空間の研究集会などで報告したが [1] [2]、今回はその方法を Lipschitz 連続な作用素の軌道の研究に応用する。 先ず、双対作用素を用いずに容易に得られる次の命題を示す。

命題 E が回帰的な Banach 空間とする。 E 上の作用素 T は次の条件を満たす；

- (i) T は弱位相に関して連続、
- (ii) $\sup \|T^n x\| < \infty$ ($x \in E$)
- (iii) $T^n x - T^{n+1} x \xrightarrow{w} 0$ ($x \in E$)

このとき、次が成り立つ；

- (1) $\bigcup_{x \in E} Cl\{T^n x\} = F(T)$
- (2) E から T の不動点集合 $F(T)$ 上への写像 S が存在して、

$$ST = TS = S = S^2$$
$$Sx \in Cl\{T^n x\} \quad (x \in E)$$

となる。

- (3) $T^n x \xrightarrow{w} 0$ ($x \in E$) と $F(T) = \{0\}$ は同値である。

ただし、 $Cl\{T^n x\} = \bigcap_m [\{T^n x; n \geq m\}$ の弱閉包] で $F(T)$ は T の不動点全体を表す。

証明にはいる前に、この報告で用いる点列のフィルター極限について説明する。 N を自然数全体とする。 N の部分集合族 \mathcal{F} が N のフィルターであるとは、 \mathcal{F} が性質；
 $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \ni A, B$, ならば $A \cap B \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \ni A, B \supset A$ ならば $B \in \mathcal{F}$ を持つことである。
フィルター \mathcal{F} がウルトラフィルターであるとは、 \mathcal{F} が極大フィルターで、すべての m について $\mathcal{F} \ni \{n; n \geq m\}$ となることである。 S を Hausdorff 位相 τ を備えた位相空間と

する。\$S\$ の点列 \$\{s_n\}\$ について、\$\mathcal{F}\$ がウルトラフィルターであるとき、\$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \{s_n; n \in F\}\$ の \$\tau\$-閉包] は空集合またはただ1点よりなる集合である。もし、これがただ1点集合であるとき、この点を \$\mathcal{F}\$ による \$\{s_n\}\$ のフィルター極限といい、\$\tau\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim s_n\$ とかく。すなわち、

$$\tau\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim s_n = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \{s_n; n \in F\} \text{ の } \tau\text{-閉包}$$

である。\$\bigcap_m \{s_n; n \geq m\}\$ の \$\tau\$-閉包] を \$s_n\$ の \$\tau\$-クラスター集合といい、\$\tau\text{-}Cl\{s_n\}\$ と表す。フィルター極限やクラスター集合は位相に関係して定まるが、\$\tau\$-位相によることが明らかなきは、\$\tau\$-を省略する。あきらかに、\$\tau\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim s_n \in \tau\text{-}Cl\{s_n\}\$ である。フィルター極限について必要な性質を次にまとめておく。\$\tau\$ は省略する（「5」は除く）。

「1」 \$\mathcal{F}\text{-}\lim s_n = s\$ であるための必要十分な条件は任意の近傍 \$U(s)\$ に対して、\$\{n; s_n \in U(s)\}\$ が \$\mathcal{F}\$ に属することである。

「2」 \$\lim s_n\$ が存在することと、すべてのウルトラフィルター \$\mathcal{F}\$ に対して \$\lim s_n = \mathcal{F}\text{-}\lim s_n\$ となることとは同値である。

「3」 \$\{s_n\}\$ がコンパクト集合 \$K\$ に含まれるならば、任意のウルトラフィルター \$\mathcal{F}\$ に対して \$\mathcal{F}\text{-}\lim s_n\$ が存在する

$$\text{「4」 } Cl\{s_n\} = \{\mathcal{F}\text{-}\lim s_n; \text{ウルトラフィルター } \mathcal{F}\}$$

「5」 \$S'\$ を Hasdorff 空間 (位相 \$\tau'\$) とし、\$\psi\$ を \$S\$ から \$S'\$ への連続な写像とする。このとき、

$$\psi(\tau\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim s_n) = \tau'\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim \psi(s_n)$$

「6」 \$S\$ が線形構造を持つとき、フィルター極限もその線形性を保存し、\$S\$ が束 (lattice) 構造を持つとき、フィルター極限もその束演算を保存する。ただし、Banach 極限が持つ ‘ずらし’ についての不変性は持たない。

証明 条件 (ii) より \$\sup \|T^n x\| = M < \infty\$ とおけば、\$\{T^n x\}\$ は 0 を中心とする半径 \$M\$ の閉球 \$B_M\$ に含まれる。\$E\$ の回帰性により \$B_M\$ は弱コンパクトである。従って \$N\$ の任意のウルトラフィルター \$\mathcal{F}\$ に対して、\$w\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim T^n x\$ (\$x \in E\$) が存在する。このフィ

ルター極限を x に対して Sx と定める。ただちに $Sx \in w\text{-Cl}\{T^n x\}$ を得る。 T の弱連続性により、 $TSx = w\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim T^{n+1}x = STx$ となり、条件 (iii) により、

$$w\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim T^{n+1}x = w\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim T^n x = Sx$$

となる。よって、

$$STx = TSx = Sx = S^2x$$

である。また、 $F(T) \ni y$ ならば $Ty = y$ で、従って $Sy = y$ となる。すなわち、 S は E から $F(T)$ 上への写像である。上記フィルター極限の性質によって、(1) 及び (3) も明らかである。よって、この命題が証明された。

次に、Banach 空間の回帰性を仮定しない場合を考える。非線形作用素に対する双対の方法を用いるために、非線形作用素に対する双対空間等を簡単に説明する。

Banach 空間 E の通常の双対空間を E^* で表す。 $L(E)$ を E 上の Lipschitz 連続、かつ、 0 で 0 をとる作用素の全体とする。 $L(E)$ に属する作用素を扱う場合の双対空間として E 上の Lipschitz 連続、 0 で 0 をとる汎関数の全体を $E^\#$ とする。 $x^\# \in E^\#$ のノルム $\|x^\#\|_L$ を $x^\#$ の Lipschitz 係数によって定める。すなわち；

$$\|x^\#\|_L = \inf\{c; |x^\#(x) - x^\#(y)| \leq c\|x - y\| \quad x, y \in E\}$$

同様に $L(E) \in T$ に対して、ノルム $\|T\|_L$ を T の Lipschitz 係数によって定める。 $E^\#$ は E^* を閉部分空間に持つ Banach 空間となり、 $E^\#$ の閉球は $\sigma(E^\#, E)$ -位相に関してコンパクトとなる。この $E^\#$ を便宜的に Lipschitz 双対空間と呼ぶ。 $L(E) \in T$ に対して、 T の双対作用素 $T^\#$ を

$$T^\#x^\#(x) = x^\#(Tx) \quad (x \in E, x^\# \in E^\#)$$

と定義する。 $T^\#$ は $E^\#$ 上の有界線形作用素となる。 $E^{\#\#}$ は Banach 空間 $E^\#$ の通常の双対空間を、 $T^{\#\#}$ は $T^\#$ の通常の双対作用素を表す。また Q を E から $E^{\#\#}$ への埋め込み写像、すなわち、 $x \in E$ に対して

$$Qx(x^\#) = x^\#(x) \quad (x^\# \in E^\#)$$

とする。詳細は [1], [2] 参照。

定理 T は Banach 空間 E 上の Lipschitz 連続、かつ $T0 = 0$ となる作用素で、つぎの条件 (i) と (ii) をみたすとする；

$$(i) \sup \|T^n\|_L < \infty$$

(ii) N のあるウルトラフィルタ- \mathcal{F} について

$$w\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim(T^n x - T^{n+1}x) = 0 \quad (x \in E)$$

このとき、

(1) \mathcal{F} に対して、次の性質を持つ $E^{\#*}$ 上の有界線形作用素 P^* が定義できる；

$$(a) P^*Qx(x^*) = T^{\#*}P^*Qx(x^*) = P^{*2}Qx(x^*) \quad (x \in E, x^* \in E^*)$$

$$(b) T^{\#*}P^* = P^*T^{\#*}$$

$$(c) P^*Qx = \sigma(E^{\#*}, E^{\#})\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim T^{\#*n}Qx$$

$$\in \bigcap_m [\{T^{\#*n}Qx; n \geq m\} \text{ の } \sigma(E^{\#*}, E^{\#})\text{-}\text{閉包}] \quad (x \in E)$$

(2) $A = \{x; P^*Qx \in QE\}$ とすると、 A の元 x に対して $P^*Qx = QSx$ によって A 上の作用素 S が定義され、 S は A から T の不動点集合 $F(T)$ 上への Lipschitz 連続な引き込み写像となる。すなわち、

$$(d) S \text{ の値域} = F(T)$$

$$(e) TS = S = S^2$$

さらに

$$(f) A \text{ は } T\text{-不変で、} TS = ST|_A$$

$$(g) Sx \in \|\ \| - Cl\{T^n x\} \quad (x \in A)$$

が成り立つ。

証明 Lipschitz 双対空間 $E^{\#}$ には局所凸位相 $\sigma(E^{\#}, E)$ が考えられる。この位相を簡単に $w^{\#}$ で表す。仮定 (i) と双対作用素の性質 $(T^n)^{\#} = T^{\#n}$, $\|T^n\|_L = \|T^{\#n}\|$ とによって、 $M = \sup \|T^n\|_L$ とおけば $\|T^{\#n}x^{\#}\|_L \leq M\|x^{\#}\|_L$ すなわち、 $x^{\#}$ の $T^{\#}$ による軌道 $T^{\#n}x^{\#}$ は半

径 $M\|x^\sharp\|_L$ の閉球の中にある。条件 (ii) におけるウルトラフィルター \mathcal{F} を固定する。 E^\sharp の閉球の w^\sharp -コンパクト性により

$$P^\sharp x^\sharp = w^\sharp\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim T^{\sharp n} x^\sharp \quad (x^\sharp \in E^\sharp)$$

が定義できる。明らかに、 $\|P x^\sharp\|_L \leq M\|x^\sharp\|_L$ で、 T^\sharp の線形性により P も E^\sharp 上の有界線形作用素となる。 T^\sharp の w^\sharp -連続性とフィルター極限の性質とにより

$$T^\sharp P x^\sharp(x) = \mathcal{F}\text{-}\lim T^{\sharp n+1} x^\sharp(x) = P T^\sharp x^\sharp(x) \quad (x \in E, x^\sharp \in E^\sharp)$$

が成り立つ。また、仮定 (ii) により、

$$\begin{aligned} T^\sharp P x^*(x) &= \mathcal{F}\text{-}\lim \{T^{\sharp n+1} x^*(x)\} \\ &= \mathcal{F}\text{-}\lim T^{\sharp n} x^*(x) - \mathcal{F}\text{-}\lim \{T^{\sharp n} x^*(x) - T^{\sharp n+1} x^*(x)\} \\ &= \mathcal{F}\text{-}\lim T^{\sharp n} x^*(x) - \mathcal{F}\text{-}\lim \{x^*(T^n x - T^{n+1} x)\} \\ &= P x^*(x) \end{aligned} \quad (x \in E, x^* \in E^*)$$

よって、 $T^\sharp P x^* = P x^*$ となり、このことから

$$P^{\sharp 2} x^* = w^\sharp\text{-}\lim T^{\sharp n} P x^* = P x^* \quad (x^* \in E^*)$$

も直ちに得られる。従って、この E^\sharp 上の有界線形作用素 P の通常の双対作用素を P^* とすれば結論の、(1) の (a), (b) は明かである。(c) を示そう。 Qx は E^\sharp 上の w^\sharp -連続な汎関数であるから、

$$\begin{aligned} P^* Q x(x^\sharp) &= Q x(P x^\sharp) = Q x(w^\sharp\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim T^{\sharp n} x^\sharp) \\ &= \mathcal{F}\text{-}\lim Q x(T^{\sharp n} x^\sharp) = \mathcal{F}\text{-}\lim T^{\sharp * n} Q x(x^\sharp) \\ &= \{\sigma(E^{\sharp *}, E^\sharp) - \mathcal{F}\text{-}\lim T^{\sharp * n} Q x(x^\sharp)\} \end{aligned}$$

がすべての $x \in E$ と $x^\sharp \in E^\sharp$ について成り立つ。よって、「4」より

$$P^* Q x \in \bigcap_m \{T^{\sharp * n} Q x; n \geq m\} \text{ の } \sigma(E^{\sharp *}, E^\sharp)\text{-閉包} \quad (x \in E)$$

が成り立つ。以上で (1) が証明された。

$A \ni x$ とする。(1) の (a) より、

$$\begin{aligned} x^*(Sx) &= Q S x(x^*) = P^* Q x(x^*) = T^{\sharp * *} P^* Q x(x^*) \\ &= T^{\sharp * *} Q S x(x^*) = Q S x(T^\sharp x^*) = x^*(T S x) \end{aligned} \quad (x^* \in E^*)$$

よって $S = TS$ かつ、 $Sx \in F(T)$ 。また、(1) の (b) より

$$P^*QTx = P^*T^{\#*}Qx = T^{\#*}P^*Qx = T^{\#*}QSx = QTSx$$

となり、 $Tx \in A$ で $TS = ST|_A$ が得られた。次に、 $y \in F(T)$ ならば、 $T^{\#*}Qy = QTy = Qy$ となり、従って、(c) より $P^*Qy = Qy$ を得る。よって、 $Sy = y$ で S は $F(T)$ 上への写像となり、同時に、 $x \in A$ に対して $SSx = Sx$ も得られ、(d), (e), (f) が証明された。

(g) を示すために再び (c) を用いる。 $A \ni x$ とする。

$$QSx = \sigma(E^{\#*}, E^{\#})\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim T^{\#*n}Qx$$

である。いま、特に $\psi(y) = \|y - Sx\| - \|Sx\|$ とすれば、 $\psi \in E^{\#}$ となるので、

$$\begin{aligned} -\|Sx\| &= QSx(\psi) = \mathcal{F}\text{-}\lim T^{\#*n}Qx(\psi) = \mathcal{F}\text{-}\lim \psi(T^n x) \\ &= \mathcal{F}\text{-}\lim (\|T^n x - Sx\| - \|Sx\|) \\ &= \mathcal{F}\text{-}\lim \|T^n x - Sx\| - \|Sx\| \end{aligned}$$

よって、 $\mathcal{F}\text{-}\lim \|T^n x - Sx\| = 0$

すなわち、 $Sx = \|\|\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim T^n x$

となり、「4」より $Sx \in \|\|\text{-}Cl\{T^n x\}$ が得られ、定理の証明が完了する。

系 定理に於いて、条件 (ii) を強め、

(ii)' N のあるウルトラフィルター \mathcal{F} に対して

$$\mathcal{F}\text{-}\lim \{x^{\#}(T^n x) - x^{\#}(T^{n+1} x)\} = 0$$

$$(x \in E, x^{\#} \in E^{\#})$$

を仮定すれば、 P^* は性質

$$T^{\#*}P^* = P^*T^{\#*} = P^* = P^{*2}$$

を持ち、すなわち、 $E^{\#*}$ から $F(T^{\#*})$ 上への引き込み写像となる。

参考文献

- [1] I.Sawashima; *Methods of Duals in Nonlinear Analysis*, Nonlinear and Convex Analysis in Economic Theory, Lecture note in Economics and Mathematical systems,

Springer, vol. 419(1995), 247-259.

- [2] I.Sawashima; *Ergodicity of Lipschitz dual operator*, 第2回関数空間セミナー報告集,
(1994), 72-78.