数理解析研究所講究録
897 巻 1995 年 11-25

Banach 空間における最良近似度について

琉球大理 西白保敏彦 (Toshihiko Nishishiraho)

$\boxed{1}$ X を Banach 空間とし，$B[X]$ は X からそれ自身へのすべての有界線形作用素全体のなす Banach 代数を表す。$\mathbb{N}$ を自然数全体の集合とし，$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$，また $\mathbb{Z}$ は整数全体の集合を表す。$\{P_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ は $B[X]$ に属する射影作用素の列で，次の 3 条件を満たすとする：

(P-1) (Orthogonal) $P_j P_m = \delta_{jm} P_m$, $\forall j, m \in \mathbb{Z}$, δ_{jm} は Kronecker のデルタ関数を表す。

(P-2) (total) $f \in X$, $P_j(f) = 0$, $\forall j \in \mathbb{Z} \Rightarrow f = 0$.

(P-3) (fundamental) $\operatorname{span} \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} P_j(X)$ は X で稠密である。

各 $n \in \mathbb{N}_0$ に対して，M_n は $\{P_j(X) : |j| \leq n\}$ で張られる X の線形部分空間を表す。与えられた $f \in X$ に対して，

$$E_n(f) = E_n(X; f) = \inf\{\|f - g\| : g \in M_n\}$$

を M_n に関する f の n 次最良近似度という。明らかに，$\{E_n(f)\}$ は単調減少し，条件 (P-3) によって，すべての $f \in X$ に対

して $\lim_{n\to\infty} E_n(f) = 0$ である．ここでの目的は，この収束する速さの度合の評価を与えることである（cf. [19]）．得られる結果は斉次Banach空間（cf. [10], [15], [20]）の場合へ適用される．従って，特に，$C_{2\pi}$ や $L^p_{2\pi}$ $(1 \le p < \infty)$ において三角多項式による最良近似度に関するJackson型の古典的な結果（e.g., [1], [4], [9], [22]を参照）を拡張する．

$\boxed{2}$ $\{T_t : t \in \mathbb{R}\}$ は $B[X]$ に属する作用素の一様有界な強連続な群，すなわち，次の4条件を満たす作用素の族とする：

(T-1) $A = \sup\{\|T_t\| : t \in \mathbb{R}\} < \infty$.

(T-2) $T_0 = I$ (恒等作用素).

(T-3) $T_{s+t} = T_s T_t$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$.

(T-4) $\forall f \in X$, $\forall u \in \mathbb{R}$, $\lim_{t\to u} \|T_t(f) - T_u(f)\| = 0$.

$\{T_t\}$ の生成作用素 G は

$$G(f) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T_t(f) - f)$$

によって，定義される．$D(G)$ はその定義域を表す．$r \in \mathbb{N}$ に対して，$D(G^r)$ は X で稠密な線形部分空間で，G^r は閉線形作用素である（cf. [3, Propositions 1.1.4 and 1.1.6]）．作用素の半群についての基本的な事項については，[3], [6], [7], [8] を参照．

各 $r \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\Delta_t^0 = I,\quad \Delta_t^r = (T_t - I)^r = \sum_{m=0}^{r} (-1)^{r-m} \binom{r}{m} T_{mt} \quad (r \geq 1)$$

と定義する．明らかに，各 Δ_t^r は $B[X]$ に属し，

$$\|\Delta_t^r\| \leq A_r, \quad A_r = \min\{(A+1)^r, 2^r A\}$$

が成り立つ．$r \in \mathbb{N}_0$, $f \in X$, $\delta \geq 0$ のとき，

$$\omega_r(f, \delta) = \omega_r(X; f, \delta) = \sup\{\|\Delta_t^r(f)\| : |t| \leq \delta\}$$

と定義し，これを $\{T_t\}$ に関する f の r 次連続率という．これは次の基本的な性質をもつ．

補題 1．$r \in \mathbb{N}$, $f \in X$ とする．

(a) $\quad \omega_r(f, \delta) \leq A_r \|f\| \quad (\forall \delta \geq 0)$.

(b) $\omega_r(f, \cdot)$ は $[0, \infty)$ で単調増加関数で，$\omega_r(f, 0) = 0$.

(c) $\quad \omega_{r+s}(f, \delta) \leq A_r\, \omega_s(f, \delta) \quad (\forall s \in \mathbb{N}_0,\ \delta \geq 0)$.

特に，$\displaystyle\lim_{\delta \to +0} \omega_r(f, \delta) = 0$.

(d) $\omega_r(f, \xi\delta) \leq A(1+\xi)^r \omega_r(f, \delta) \quad (\forall \xi, \delta \geq 0)$.

(e) $0 < \delta \leq \xi \Rightarrow \omega_r(f, \xi)/\xi^r \leq 2^r A\, \omega_r(f, \delta)/\delta^r$.

(f) $f \in D(G^r) \Rightarrow \omega_{r+s}(f, \delta) \leq A\delta^r \omega_s(G^r(f), \delta) \quad (\forall s \in \mathbb{N}_0, \delta \geq 0)$.

$r \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ に対して，X の要素 f は，すべての $\delta \geq 0$ に対して，$\omega_r(f, \delta) \leq M\delta^\alpha$ であるとき，クラス $Lip_r(\alpha, M)$ に属するという．また，$Lip_r \alpha = \bigcup\{Lip_r(\alpha, M) ; M > 0\}$ とおく．各 $r \in \mathbb{N}$ に対して，$D(G^r) \subset Lip_r r$ であり，$\alpha > r$ ならば，$f \in Lip_r \alpha$ と $\omega_r(f, \delta) = o(\delta^r)\ (\delta \to +0)$ とは同値である．

[3] 各 $f \in X$ に対して，$\sum_{j=-\infty}^{\infty} P_j(f)$ を $\{P_j\}$ に関する f の Fourier級数といい，

$$f \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_j(f)$$

と書く．$T \in B[X]$ がマルチプライヤー作用素であるとは，あるスカラー列 $\{\tau_j\}_{j\in Z}$ が存在して，すべての $f \in X$ に対して，$T(f) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tau_j P_j(f)$ となることである．そして，このとき，

$$(1) \qquad T \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tau_j P_j$$

と書く（cf. [5], [15], [16], [23], [2], [13], [20]）．

X 上のマルチプライヤー作用素の全体の集合を $M[X]$ で表す．$M[X]$ は $B[X]$ の可換な閉部分代数で，$I \in M[X]$ である．

$\{T_t : t \in R\}$ は条件（T-1）を満たす $M[X]$ に属する作用素の族で，

$$(2) \qquad T_t \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp(\lambda_j t) P_j \qquad (t \in R)$$

とする．ここで，$\{\lambda_j\}_{j\in Z}$ はスカラー列である．このとき，$\{T_t : t \in R\}$ は強連続な群になり，各 $r \in N$ に対して，

$$G^r(f) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} \lambda_j^r P_j(f) \qquad (f \in D(G^r))$$

が成立する（cf. [15, Proposition 2]）．$\varphi : R \to R$ は連続な関数とする．$k \in L^1_{2\pi}$，$T \in B[X]$ に対して，合成積作用素 $(k*T)(\varphi; \cdot)$ を

$$(k*T)(\varphi; f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k(u)\, T_{\varphi(u)}(T(f))\,du \qquad (f \in X)$$

で定義する (cf. [15])．右辺の積分は Bochner 積分として常に存在している．明らかに，$(k*T)(\varphi;\cdot)$ は $B[X]$ に属し，

$$\|(k*T)(\varphi;\cdot)\| \leq B\,\|k\|_1\,\|T\|$$

が成り立つ．ただし，$\|B\| = \sup\{\|T_{\varphi(u)}\| ; |u| \leq \pi\}$．

補題2．$k \in L^1_{2\pi}$，$T \in M[X]$ は (1) の通りとする．このとき，$(k*T)(\varphi;\cdot)$ は $M[X]$ に属し，

$$(3) \qquad (k*T)(\varphi;\cdot) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(\varphi;k)\,T_j\,P_j(\cdot)$$

である．ここで，

$$c_j(\varphi;k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k(t)\exp(\lambda_j\varphi(t))\,dt \qquad (j \in \mathbb{Z}).$$

各 $n \in \mathbb{N}_0$ に対して，

$$\Pi_n(\varphi) = \{k \in L^1_{2\pi} : c_j(\varphi;k) = 0,\ |j| > n\}$$

とおく．また，$a \in \mathbb{R}$ に対し，$\varphi_a(t) = at$, $t \in \mathbb{R}$, と定義し，

$$(k*T)_a(\cdot) = (k*T)(\varphi_a;\cdot),\quad \Pi_{n,a} = \Pi_n(\varphi_a)$$

とおく．$r \in \mathbb{N}$，$k \in L^1_{2\pi}$ とし，

$$L_{k,r} = \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1}\binom{r}{j}(k*I)_j$$

と定義する．

補題3．$r \in \mathbb{N}$，$k \in L^1_{2\pi}$，$\hat{k}(0) = 1$，$f \in X$ とする．このとき，任意の $\delta > 0$ に対して，

$$\|L_{k,r}(f) - f\| \leq A\,\omega_r(f,\delta)\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\delta^{-j}\mu(k;j)$$

が成り立つ．ここで，$\mu(k;j)$ は k の j 次絶対モーメントを

表す，すなわち，

$$\mu(k;j)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|^{j}|k(t)|\,dt.$$

[4] n 次以下の三角多項式全体の集合を $\mathcal{T}_n$ と書く．本節では，

$$(4)\qquad \mathcal{T}_n\subset\bigcap_{m=1}^{\infty}\pi_{n,m}\qquad(\forall n\in\mathbb{N}_0)$$

を仮定する．

注意．$\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{Z}}=\{-ij\}_{j\in\mathbb{Z}}$ とする．

$$\text{(a)}\qquad \mathcal{T}_n\subset\bigcap_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\pi_{n,m}\qquad(\forall n\in\mathbb{N}_0).$$

従って，(4) は常に満たされる．

(b) $\varphi=\varphi_m$, $m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ とする．このとき，(3) は

$$(k*T)_m\sim\sum_{j=-\infty}^{\infty}\hat{k}(jm)\,\tau_j\,P_j$$

となる．特に，$k\in\mathcal{T}_n$ ならば，

$$(k*T)_n=\sum_{|j|\le[n/|m|]}\hat{k}(jm)\,\tau_j\,P_j$$

である．ここで $[\lambda]$ は Gauss 記号を表す．

さて，次の一般的な評価式を得る：

定理1．$r\in\mathbb{N}$ とする．このとき，すべての $f\in X$, $n\in\mathbb{N}_0$ に対して，

$$E_n(f)\le\inf\{\|L_{k,r}(f)-f\|:k\in\mathcal{T}_n'\}$$
$$\le A\inf\{\omega_r(f,\delta)\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\delta^{-j}\mu(k;j):\delta>0,\ k\in\mathcal{T}_n'\},$$

ここで，$\mathcal{J}_n' = \{ k \in \mathcal{J}_n : \hat{k}(0) = 1 \}$.

証明．$k \in \mathcal{J}_n$，$f \in X$ とする．このとき，条件(4) 及び補題2より，すべての $m \in \mathbb{N}$ に対して，

$$(k*I)_m(f) = \sum_{j=-n}^{n} c_j(\varphi_m ; k) P_j(f)$$

が成り立つ．従って，$L_{k,r}(f)$ は H_n に属する．よって，補題3により，求める評価式を得る． Q.E.D.

この定理で下限をとる k として，一般 Jackson 核 $J_{n,m}$ を考えよう．この核は次で与えられる：

$$J_{n,m}(t) = c_{n,m}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^{2m} \qquad (n, m \in \mathbb{N}),$$

ここで定数 $c_{n,m} > 0$ は

$$\hat{J}_{n,m}(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} J_{n,m}(t)\,dt = 1$$

となるように選ぶ（cf. [12]）．特に，

$$J_{n,1}(t) = F_n(t) = \sum_{j=1-n}^{n-1}\left(1 - \frac{|j|}{n}\right)\exp(ijt)$$

は Fejér 核であり，従って，$J_{n,m}(t) = c_{n,m} n^m F_n^m(t)$ は非負な $m(n-1)$ 次の偶三角多項式である．また，

$$J_{n,2}(t) = \frac{3}{n(2n^2+1)}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4$$

は Jackson 核である（cf. [9], [14]）．

補題4.

$$J_{n,m}(t) \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^{4m} n \qquad (|t| \le \pi)$$

及び

$$J_{n,m}(t) \le \left(\frac{\pi^2}{2nt}\right)^{2m} n \qquad (0 < |t| \le \pi)$$

が成立する.

補題5.

$$\mu(J_{n,m}; j) \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^{4m} \frac{2^{j+1}}{\pi} \left(\frac{1}{j+1} + \frac{1}{2m-j-1}\right) n^{-j}.$$

$$(j = 0, 1, 2, \cdots, 2m-2)$$

これらの評価を用いて,次のJackson型の順定理を示すことができる.

定理2. $r \in \mathbb{N}$ とする.このとき,すべての $f \in X$, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$(5) \qquad E_n(f) \le A C_r \, \omega_r(f, \tfrac{1}{n}),$$

ここで, $C_r = 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2r+5} (r+4)^r$.

証明. $m = [(r+3)/2]$, $\delta = [n/m] + 1$ とおく.このとき, $J_{\delta,m}$ は $\mathcal{J}_n^1$ に属するから,定理1より,

$$E_n(f) \le A\omega_r(f, \tfrac{1}{n}) \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} n^j \mu(J_{\delta,m} : j).$$

従って,補題5を用いれば,求める不等式(5)が得られる.

Q.E.D.

系1. (a) ある $r \in \mathbb{N}$ に対して, $f \in Lip_r(\alpha, M)$ ならば,すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$E_n(f) \le AMC_r n^{-\alpha}.$$

(b) ある $r \in \mathbb{N}$ に対して，$f \in D(G^r)$ ならば，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，

(6) $$E_n(f) \le A^2 C_r \| G^r(f) \| n^{-r}.$$

(c) $f \in \bigcap_{r=1}^{\infty} D(G^r)$ ならば，すべての $\lambda > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} n^\lambda E_n(f) = 0.$$

次の定理は，高次の連続率による(6)の改良を与える．

定理3．$r \in \mathbb{N}$，$f \in D(G^r)$ とする．このとき，すべての $n \in \mathbb{N}$，$s \in \mathbb{N}_0$ に対して，

$$E_n(f) \le A^2 C_{r+s} n^{-r} \omega_s \left(G^r(f), \frac{1}{n}\right).$$

証明．定理2及び補題1 (f) によって，

$$E_n(f) \le A C_{r+s} \omega_{r+s}\left(f, \frac{1}{n}\right) \le A^2 C_{r+s} n^{-r} \omega_s \left(G^r(f), \frac{1}{n}\right).$$

Q.E.D.

定理3の直接の結果として，次を得る．

系2．$r \in \mathbb{N}$，$f \in D(G^r)$ とする．もし，$f \in Lip_s(\alpha, M)$ ならば，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$E_n(f) \le A^2 M C_{r+s} n^{-(\alpha+r)}.$$

[17], [18] においては，$r=1$，$s=1, 2$ に対して，上と類似の評価式が Fejér-Korovkin 核 k_n を用いて得られている．この核は次の式で定義されるものである（cf. [11]）：

$$k_n(t) = \Lambda_n \left| \sum_{j=0}^{n} \lambda_n(j) e^{ijt} \right|^2 \quad (n \in \mathbb{N}_0,\ t \in \mathbb{R}),$$

ここで，

$$\lambda_n(j) = \sin\left(\frac{j+1}{n+2}\right)\pi \qquad (j=0,1,2,\cdots,n),$$

$$\Lambda_n = \left(\lambda_n^2(0) + \lambda_n^2(1) + \cdots + \lambda_n^2(n)\right)^{-1}.$$

$k_n \in \mathcal{T}_n^1$ で，

$$k_n(t) = 1 + 2\sum_{m=1}^{n} \theta_n(m) \cos mt,$$

$$\theta_n(m) = \Lambda_n \sum_{j=0}^{n-m} \lambda_n(j) \lambda_n(m+j) \quad (m=1,2,\cdots,n)$$

と表される．特に，$\theta_n(1) = \cos\left(\frac{\pi}{n+2}\right)$ である．

定理4．$\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ は，$B[X]$ に属する作用素の列で，すべての $g \in M_n$ に対して $U_n(g) = g$ を満たすとする．このとき，すべての $f \in X$，$n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\|U_n(f) - f\| \leq (\|U_n\| + 1) E_n(f) \leq A C_r (\|U_n\| + 1) \omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right).$$

証明．任意の $g \in M_n$ に対して，

$$\begin{aligned} \|U_n(f) - f\| &\leq \|U_n(f-g)\| + \|g-f\| \\ &\leq (\|U_n\| + 1)\|f-g\| \end{aligned}$$

であるから，(5) より

$$\|U_n(f) - f\| \leq (\|U_n\| + 1) E_n(f) \leq A C_r (\|U_n\| + 1) \omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right)$$

となる． Q.E.D.

系3．$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ は定理4の通りとし，$f\in X$ とする．このとき，$\lim_{n\to\infty}\|U_n\|E_n(f)=0$ ならば，$\lim_{n\to\infty}\|U_n(f)-f\|=0$．特にある $r\in\mathbb{N}$ に対して，$\lim_{n\to\infty}\|U_n\|\omega_r(f,\frac{1}{n})$ ならば，$\lim_{n\to\infty}\|U_n(f)-f\|=0$.

$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ を $\{P_j\}$ に関する Fourier 級数の才 n 部分和作用素列とする．すなわち，$S_n=\sum_{j=-n}^{n}P_j$，$n\in\mathbb{N}_0$．このとき，定理4によって，次の Lebesgue 型の評価式を得る：

定理5．$r\in\mathbb{N}$ とする．このとき，すべての $f\in X$，$n\in\mathbb{N}$ に対して，

$$\|S_n(f)-f\|\leq(\|S_n\|+1)E_n(f)\leq AC_r(\|S_n\|+1)\omega_r(f,\tfrac{1}{n}).$$

系4．$\lim_{n\to\infty}\|S_n\|E_n(f)=0$ ならば，f の Fourier 級数は f に収束する，すなわち，

$$\lim_{n\to\infty}\Big\|\sum_{j=-n}^{n}P_j(f)-f\Big\|=0. \tag{6}$$

特に，ある $r\in\mathbb{N}$ に対して，$\lim_{n\to\infty}\|S_n\|\omega_r(f,\frac{1}{n})=0$ ならば，(6) が成り立つ．

各 $n\in\mathbb{N}_0$ に対して，σ_n は n 次 Cesàro 平均作用素とする：

$$\sigma_n=\frac{S_0+S_1+\cdots+S_n}{n+1}=\sum_{j=-n}^{n}\Big(1-\frac{|j|}{n+1}\Big)P_j.$$

また，V_n は n 次 de la Vallée-Poussin 作用素を表す：

$$V_n=\frac{S_n+S_{n+1}+\cdots+S_{2n-1}}{n}=2\sigma_{2n-1}-\sigma_{n-1}\qquad(n\in\mathbb{N}).$$

$\{\sigma_n\}$ が一様有界，すなわち，

$$C=\sup\{\|\sigma_n\|:n\in\mathbb{N}_0\}<\infty$$

とする．このとき，定理4を $U_n = V_n$ の場合へ適用すれば，次の de la Vallée-Poussin 型の評価式を得る．

定理6．$r \in \mathbb{N}$ とする．このとき，すべての $f \in X$, $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$E_{2n-1}(f) \leq \|V_n(f) - f\| \leq (3C+1)E_n(f) \leq A(3C+1)C_r\omega_r(f, \tfrac{1}{n}).$$

$\boxed{5}$ 本節では，X が斉次 Banach 空間の場合を考える．すなわち，X は次の4条件を満たす $L^1_{2\pi}$ の線形部分空間とする．

(H-1) X はノルム $\|\cdot\|$ をもつ Banach 空間である．

(H-2) $\exists M > 0$; $\|f\|_1 \leq M\|f\|$, $\forall f \in X$.

(H-3) 各 $t \in \mathbb{R}$ に対して，移動作用素

$$T_t(f)(\cdot) = f(\cdot - t) \qquad (\forall f \in X)$$

は X 上で等距離的である．

(H-4) 各 $f \in X$ に対して，写像 $t \longmapsto T_t(f)$ は $\mathbb{R}$ 上で強連続である．

このような関数空間の典型的なものは，$C_{2\pi}$，$L^p_{2\pi}$ $(1 \leq p < \infty)$ である．他の例については，[15] を見よ (Cf. [10], [20])．

さて，$B[X]$ に属する射影作用素の列 $\{P_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ を，

$$P_j(f)(\cdot) = \hat{f}(j)\exp(ij\cdot) \qquad (f \in X)$$

によって定義する．このとき，$\{P_j\}$ は条件 (P-1), (P-2), (P-3) を満たす (Cf. [10], [15])．また，展開式 (2) が $\lambda_j = -ij$ として成立する．従って，$\varphi = \varphi_m$, $m \in \mathbb{Z}$, に対して，(3) は

$$(R*T)_m \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{k}(jm)\tau_j P_j$$

となり，また

$$M_n = \mathfrak{J}_n \subset \bigcap_{\delta \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \pi_{n,\delta} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

である(cf. ④の注意)．さらに，各$f \in X$に対して，

$$\Delta_t^0(f) = f, \quad \Delta_t^r(f)(\cdot) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} f(\cdot - jt) \qquad (r \geq 1).$$

結局，これまでに得られた諸結果が上の立場で齊次Banach空間において適用される．特に，$r = 1$のとき，定理2，定理5，系4はそれぞれ，[20]における定理9.3.3.1，定理9.3.4.2，系9.3.4.3を含む．さらに，系1(b)は，[20]における定理9.3.3.2を含む．

参考文献

[1] N. I. Achieser, Theory of Approximation, Frederick Ungar, New York, 1956.

[2] H. Buchwalter, Saturation dans un espace norme, C. R. Acad. Sci. Paris 250(1960), 651-653.

[3] P. L. Butzer and H. Berens, Semi-Groups of Operators and Approximation, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1967.

[4] P. L. Butzer and R. J. Nessel, Fourier Analysis and Approximation, Vol. I, Academic Press, New York, 1971.

[5] P. L. Butzer, R. J. Nessel and W. Trebels, On summation processes of Fourier expansions in Banach spaces. I. Comparison theorems, Tohoku Math. J., 24(1972), 127-140; II. Saturation theorems, ibid., 551-569; III. Jackson-and Zamansky-type inequalities for Abel-bounded expansions, ibid., 27(1975), 213-223.

[6] E. B. Davies, One-Parameter Semigroups, Academic Press, New York, 1980.

[7] J. A. Goldstein, Semigroups of Linear Operators and Applications, Oxford Univ. Press, New York, 1985.

[8] E. Hille and R. S. Phillips, Functional Analysis and Semi-Groups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 31, Amer. Math. Soc., Providence, R. I, 1957.

[9] D. Jackson, The Theory of Approximation, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 11, Amer. Math. Soc., New York, 1930.

[10] Y. Katznelson, An Introduction to Harmonic Analysis, John Wiley, New York, 1968.

[11] P. P. Korovkin, Linear Operators and Approximation Theory, Hindustan Publ. Corp., Delhi, 1960.

[12] G. G. Lorentz, Approximation of Functions, 2ed. ed., Chelsea, New York, 1986.

[13] V. D. Milman, Geometric theory of Banach spaces I; The theory of bases and minimal systems, Russian Math. Surveys 25(1970), 111-170.

[14] I. P. Natanson, Constructive Function Theory, Vol. I; Uniform Approximation, Frederick Ungar, New York, 1964.

[15] T. Nishishiraho, Quantitative theorems on linear approximation processes of convolution operators in Banach spaces, Tohoku Math. J., 33(1981), 109-126.

[16] T. Nishishiraho, Saturation of multiplier operators in Banach spaces, Tohoku Math. J., 34(1982), 23-42.

[17] T. Nishishiraho, Direct theorems for best approximation in Banach spaces, Approximation, Optimization and Computing (IMACS, 1990; A. G. Law and C. L. Wang, eds.), pp. 155-158, North-Holland, Amsterdam, 1990.

[18] T. Nishishiraho, The order of best approximation in Banach spaces, Proc. 13-th Symp. Appl. Funct. Analysis (H. Umegaki and W. Takahashi, eds.), pp. 90-104, Tokyo Inst. Technology, Tokyo, 1991.

[19] T. Nishishiraho, The degree of the best approximation in Banach spaces, Tohoku Math. J., 46(1994), 13-26.

[20] H. S. Shapiro, Topics in Approximation Theory, Lecture Notes in Math. 187, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1971.

[21] I. Singer, Bases in Banach Spaces I. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/ New York, 1970.

[22] A. F. Timan, Theory of Approximation of Functions of a Real Variable, Macmillan, New York, 1963.

[23] W. Trebels, Multiplier for (C,α)-Bounded Fourier Expansions in Banach Spaces and Approximation Theory, Lecture Notes in Math. 329, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg/New York, 1973.