数理解析研究所講究録
第 897 巻 1995 年 7-10

Banach 空間の有界閉集合内の最遠点の存在に関する一問題

東京理科大学理学部 宮島 静雄(Shizuo Miyajima)

昨年の集会で Banach 空間の有界閉集合内の最遠点の一意性について報告したが([3], [4]),残念ながらその後,そこで述べられた主要結果は既に Zhivkov [5] で得られていたことが Zhivkov 氏本人から指摘された。

ここでは一意性の問題から離れて,[4] の執筆中に気になった一つの問題について触れたい。なお以下に考える Banach 空間はすべて実 Banach 空間とする。

さて E を実 Banach 空間,C を E の空でない有界閉部分集合とすると,$x\in E$ から C への最遠距離は $f_C(x):=\sup_{y\in C}\|x-y\|$ によって与えられ,$f_C(x)=\|x-y\|$ をみたす $y\in C$ を C における x からの最遠点と呼ぶのであった. f_C について $f_C(x)=f_{\overline{\mathrm{co}}\,C}(x)$ が成り立つことは明か。また C に対して Lau [2] によって導入された集合([4] では $D(C)$ と表した)が,C 内の最遠点の存在と一意性に関して重要であった。$D(C)$ は凸関数 $f_C(x)$ を用いて

$$D(C):=\{x\in E\mid \inf_{z\in C}\langle z-x,x^*\rangle=-f_C(x)\ \text{for all}\ x^*\in\partial f_C(x)\}$$

と定義される. $D(C)$ は E で稠密な G_δ 集合であり、例えば C が weakly compact なときは、任意の $x\in D(C)$ は C の中に最遠点を持つ(Lau [2])。この $D(C)$ に対して [4] の Proposition 2.2 が示すように,自然に $\overline{\mathrm{co}}\,C$ が登場し,$D(C)=D(\overline{\mathrm{co}}\,C)$ がわかる。

Proposition 1 ([4], Proosition 2.2). C を Banach 空間 E の空でない有界閉集合とし,$x\in E$ とすると,次のことは互いに同値である:

(i) $x\in D(C)$;

(ii) $\inf_{z\in\overline{\mathrm{co}}\,C} d^+f_C(x)(z-x)=-f_C(x)$;

(iii) 任意の $\varepsilon>0$ に対して次の条件をみたす $\lambda\in(0,1)$ と $z\in\overline{\mathrm{co}}\,C$ が存在する。

$$f_C(x+\lambda(z-x))-f_C(x)<-\lambda f_C(x)+\varepsilon\lambda.$$

これから C に対する最遠点の問題を $\overline{\mathrm{co}}\,C$ に対する問題に帰着できないかという疑問が起きてくる。つまり具体的には次の問題を考えるのである:

問題 C を Banach 空間 E の空でない有界閉集合とし,$x\in E$ とする。このとき $\overline{\mathrm{co}}\,C$ 内に x から最も遠い点が存在すれば,C の中で x から最も遠い点が存在するか?

直感的にはこの問題の答えは肯定的であるように思われるが,全く一般の E に対しては次の例が示すように否定的である。

反例：$\overline{N} := N \cup \{0\}$ とし，$E := \ell^\infty(\overline{N})$ とする。$e_n \in E$ を E の canonical unit vector とし，$n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$a_n := (1 - \frac{1}{2^n})(e_0 + e_n); \quad b_n := (1 - \frac{1}{2^n})(e_0 - e_n)$$

と置く。このとき，$\|a_n - b_m\| \geq 1/2$, $\|a_n - a_m\| \geq 1/2$ $(n \neq m)$, $\|b_n - b_m\| \geq 1/2$ $(n \neq m)$ であるから，$C := \{a_n \mid n \in N\} \cup \{b_n \mid n \in N\}$ は閉集合となる。明らかに $\sup\{\|x\| \mid x \in C\} = 1$ であるが，$\|x\| = 1$ となる $x \in C$ は存在しない。つまり，C には原点 0 からの最遠点は存在しない。一方

$$\frac{1}{2}(a_n + b_n) = (1 - \frac{1}{2^n})e_0 \to e_0 \quad (n \to \infty)$$

より $e_0 \in \overline{\mathrm{co}}\,C$ で，$\overline{\mathrm{co}}\,C$ には原点からの最遠点 e_0 が存在する。

上の問題の答が肯定的になる一つの場合が次で与えられる。

Theorem 2． C を Banach 空間 E の weakly compact set, $x \in E$ とする。このとき $\overline{\mathrm{co}}\,C$ に x からの最遠点が存在していれば，C にも x からの最遠点が存在する。

PROOF. $z \in \overline{\mathrm{co}}\,C$ で C が weakly compact とすると，Krein-Smulian の定理の証明 (Dunford–Schwartz [1, Theorem V.6.4]) から，C 上の weak topology に関する probability Radon measure μ で

$$z = \int_C y\, d\mu(y) \quad \text{(weak integral)} \tag{$*$}$$

をみたすものがある。また $\varphi \in E^*$ で $\|\varphi\| = 1$, $\langle z - x, \varphi \rangle = \|z - x\|$ をみたすものが存在するが，これを $(*)$ に使うと

$$\|z - x\| = \langle z - x, \varphi \rangle = \int_C \langle y - x, \varphi \rangle\, d\mu(y). \tag{$**$}$$

ここで，任意の $y \in C$ で $\langle y - x, \varphi \rangle \leq \|y - x\| \leq \|z - x\|$ に注意すると，$(**)$ から任意の $y \in \operatorname{supp}\mu$ に対して $\langle y - x, \varphi \rangle = \|z - x\|$ であることが分かる。これより $y \in \operatorname{supp}\mu \subset C$ では $\|y - x\| = \|z - x\|$ となり，C に x からの最遠点が存在することが示された。□

上の定理では $\overline{\mathrm{co}}\,C$ における最遠点 z の存在から C における（他の）最遠点の存在が導かれたが，z 自身が C に属するならこのことは自動的に言える。このために Banach 空間の幾何学における次の定義を思い出そう。

Definition. Banach 空間 E の部分集合 C と $x \in C$ に対し，x が C の denting point であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $x \notin \overline{\mathrm{co}}(C \setminus B_\varepsilon(x))$ が成り立つことを言う。ただし $B_\varepsilon(x)$ は x を中心とする半径 ε の開球を表す。

Proposition 3. C を Banach 空間 E の空でない有界閉部分集合，$z \in \overline{\mathrm{co}}\, C$ が $\overline{\mathrm{co}}\, C$ での x からの最遠点とする。さらに z が $\overline{\mathrm{co}}\, C$ の denting point であれば $z \in C$ が成り立つ。

Proof. 任意に $\varepsilon > 0$ をとると，仮定より $z \notin \overline{\mathrm{co}}(\overline{\mathrm{co}}\, C \backslash B_\varepsilon(z))$ なので Hahn–Banach の定理からある $\varphi \in E^*$ で

$$\sup\{\langle y, \varphi\rangle \mid y \in \overline{\mathrm{co}}(\overline{\mathrm{co}}\, C \setminus B_\varepsilon(z))\} < \langle z, \varphi\rangle$$

をみたすものが存在する。これから特に

$$\sup\{\langle y, \varphi\rangle \mid y \in C \setminus B_\varepsilon(z)\} < \langle z, \varphi\rangle$$

が成り立つから，$C \cap B_\varepsilon(z) = \emptyset$ ならば $\sup\{\langle y, \varphi\rangle \mid y \in C\} < \langle z, \varphi\rangle$ となるが，これは $z \in \overline{\mathrm{co}}\, C$ に矛盾する。よって任意の $\varepsilon > 0$ に対し $C \cap B_\varepsilon(z) \neq \emptyset$ となり，$z \in C$ が分かる。□

この命題の結果として次の定理が得られる。

Theorem 4. Banach 空間 E の単位球面上の点がすべて閉単位球の denting point であれば，任意の空でない有界閉集合 $C \subset E$ と $x \in E$ に対し，$\overline{\mathrm{co}}\, C$ の x からの最遠点は常に C に属する。

Proof. $z \in \overline{\mathrm{co}}\, C$ が x からの最遠点とすると，z は x を中心とする半径 $r := \|z - x\|$ の球面上にあり，仮定から z は $\overline{B_r(x)}$ の denting point。$C \subset \overline{B_r(x)}$ より z は C の denting point でもあることは明か。よって前命題より $z \in C$ となる。□

この定理の前提をみたす空間の例を述べるために次の定義を思い起こそう：Banach 空間 E が locally uniformly convex であるとは，$\|x_0\| = 1$, $\|x_n\| \leq 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ で $\|(x_n + x_0)/2\| \to 1$ ならば常に $x_n \to x_0$ が成り立つことを言う。

この定義より次のことが成り立つ。

Proposition 5. E を locally uniformly convex な空間とすると，E の単位球面上の点はすべて閉単位球の denting point である。

Proof. $x_0 \in E$, $\|x_0\| = 1$ とする。x_0 が E の閉単位球 B の denting point でないとすると，ある $\varepsilon > 0$ で $x_0 \in \overline{\mathrm{co}}(B \setminus B_\varepsilon(x_0))$ となるものがある。$\varphi \in E^*$ を $\|\varphi\| = 1$, $\langle x_0, \varphi\rangle = 1$ をみたすものとする。このとき $\lambda := \sup\{\langle x, \varphi\rangle \mid x \in B \setminus B_\varepsilon(x_0)\} = 1$ である。なぜならば，もしそうでないと閉超平面 $\{z \in E \mid \langle z, \varphi\rangle = \lambda\}$ が x_0 と $\overline{\mathrm{co}}(B \setminus B_\varepsilon(x_0))$ を真に分離することになり $x_0 \in \overline{\mathrm{co}}(B \setminus B_\varepsilon(x_0))$ に反する。よって $B \setminus B_\varepsilon(x_0)$ に含まれる点列 $\{x_n\}$ で $\langle x_n, \varphi\rangle \to 1$ となるものがとれる。これに対して

$$\left\langle \frac{1}{2}(x_n + x_0), \varphi \right\rangle \to 1 \quad \text{従って} \quad \left\| \frac{1}{2}(x_n + x_0) \right\| \to 1$$

が成り立ち，E が locally uniformly convex という仮定から $x_n \to x_0$ となるが，これは $x_n \in B \setminus B_\varepsilon(x_0)$ に矛盾する。□

注：よく知られた次の Trojanski の定理によって locally uniformly convex space は豊富にあることが分かる：

Theorem 6 (Trojanski). E を weakly compactly generated な Banach 空間（特に separable または reflexive なら十分）とすると，E 上に元のノルムと同値な locally uniformly convex ノルムが存在する。

E が locally uniformly convex という仮定は強いものなので，もっと弱い条件で単位球面上の点がすべて閉単位球の denting point となることを保証するものを見いだすことは意味があるであろう.

References

[1] Dunford, N. and J.T. Schwartz, *Linear Operators, Part 1*, Wiley (Classics Library Edition), (1988).

[2] Lau, K.-S., *Farthest points in weakly compact sets*, Israel Journal of Math., **22** (1975), 168–174.

[3] 宮島静雄，和田文興,「Banach 空間の有界閉集合上の最遠点の一意性について」，数理解析研究所考究録 **861**「非線形解析学と数理経済学の研究」(1994), 214–221.

[4] Miyajima, S. and F. Wada, *Uniqueness of a farthest point in a bounded closed set in Banach spaces*, SUT Journal of Math., **29** (1993), 291–310.

[5] Zhivkov, N.V., *Continuiy and non-multivaluedness properties of metric projections and anti-projections*, Serdica Bulg. Math. Publ., **8** (1982), 378–385.