数理解析研究所講究録
第 898 巻 1995 年 44-52

Hartree 方程式の解の漸近挙動について

大阪大理　和田 健志 (Takeshi Wada)

平成5年 9月 28日

1 序

本講では, 次の非線形 Schrödinger 方程式の解の $t \to \infty$ における漸近挙動について考える.

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial t}u_j(t,x) &= -\frac{1}{2}\Delta u_j(t,x) + \sum_{k=1,k\neq j}^{N}(V * |u_k|^2)u_j(t,x), \\
u_j(0,x) &= \phi_j(x) \qquad (j = 1,\cdots,N)
\end{aligned} \tag{1}
$$

但し, $(t,x) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n (n \geq 2), V(x) = |x|^{-\gamma}$, $0 < \gamma < \min(4,n)$ である. この方程式は Hartree 方程式と呼ばれ, 量子力学における N 体問題の近似として現れる.

本講を通じ, 以下の記号を用いる:

$U(t) = \exp(it\Delta/2), M(t) = \exp(i|x|^2/2t)$. $L^p(\boldsymbol{R}^n)$ のノルムを $\|\cdot\|_p$ で表す. ($p = 2$ のときは, $\|\cdot\|_2$ を単に $\|\cdot\|$ と書く). $L^{2,s}(\boldsymbol{R}^n) = \{f(x); \|f\|_{2,s} = \|\langle x\rangle^s f\| < \infty\}$, 但し, $\langle x\rangle = (1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}$ である. $H^m(\boldsymbol{R}^n)(m = 0,1,2,\cdots)$ を通常の Sobolev 空間, すなわち, $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ の $\|f\|_{H^m} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m}\|\nabla^\alpha f\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ による完備化とする. $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ を Schwartz の急減少関数族とする. $\mathcal{F}f$ は Fourier 変換 $[\mathcal{F}f](\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{R^n} e^{-ix\xi}f(x)dx$ であり, $\mathcal{F}^{-1}f$ は逆 Fourier 変換である.

N 個の連立方程式を扱うため, 上記の空間の N 個の直和を考えることも多いが, 同じ記号を用い, その元は $\vec{f}$ の様に, 上に矢印をつけて表す.

Hartree 方程式としては, 単独の

$$
i\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = -\frac{1}{2}\Delta u(t,x) + (V * |u|^2)u(t,x) \tag{2}
$$

が主に研究されている ([2, 3, 4, 5, 6]). しかし, 解の $t \to \infty$ における漸近挙動を調べる際には, (1) と (2) の間には, 本質的な違いがある. それは (1) においては非線形項が他粒子との相互作用であるのに対し, (2) においては自己相互作用である点で, このことが問題を難しくしている. (2) については, 次の結果が知られている ([3, 5]).

[A] $1 < \gamma < \min(4,n)$, $u(0,x) \in H^1 \cap L^{2,1}$とする. このとき,

$$
\lim_{t\to\infty}\|u(t) - U(t)\psi\| = 0 \tag{3}
$$

となる$\psi \in L^2$ が存在する.

[B] $0 < \gamma < 1$, $u(0,x) \in H^1 \cap L^{2,1}$ とする. このとき, (3) を満たす $\psi \in L^2$ は存在しない.

我々は, (1) の場合に, [A], [B] に類似した結果を示したい. しかし, $\gamma = 1$ の近くでは, それを示すのは難しい. 我々が得たのは, [A], [B] より弱い次の結果である.

定理 1. 次の (i) または (ii) のいずれかを仮定する.

(i) $n \geq 2, \sqrt{5} - 1 < \gamma < \min(4, n)$, $\phi_j \in H^1 \cap L^{2,1} (j = 1, \cdots, N)$,

(ii) $n \geq 3, 4 - 2\sqrt{2} < \gamma < \sqrt{5} - 1$, $\phi_j \in H^1 \cap L^{2,2} (j = 1, \cdots, N)$.

このとき,

$$\lim_{t \to \infty} \|u_j(t) - U(t)\psi_j\| = 0. \tag{4}$$

を満たす $\psi_j \in L^2 (j = 1, \cdots, N)$ が存在する.

定理 2. $n \geq 2, \gamma < 1$ または $n \geq 3, \gamma \leq 1$ とし, $\phi_j \in H^1 \cap L^{2,1} (j = 1, \cdots, N)$ であって, $\{\phi_j\}$ のうち少なくとも 2 つは恒等的には 0 でない関数とする. このとき, (4) を満たす $\psi_j \in L^2 (j = 1, \cdots, N)$ は存在しない.

注意. うえの定理で, $\{\phi_j\}$ のうち少なくとも 2 つは恒等的には 0 でない関数であるという仮定は必要である. なぜなら, たとえば $\phi_1 \not\equiv 0, \phi_2 \equiv \cdots \phi_N \equiv 0$ とすると, $u_1(t) = U(t)\phi_1, u_2 = \cdots u_N = 0$ となるからである.

2 準備

予備定理 2.1(The Gagliardo - Nirenberg inequality). $1 \leq p, q, r \leq \infty$, j, m は整数で, $0 \leq j < m$ とすると,

$$\sum_{|\alpha|=j} \|\nabla^\alpha u\|_p \leq C \left(\sum_{|\beta|=m} \|\nabla^\beta u\|_r \right)^a \|u\|_q^{1-a} \tag{5}$$

である. 但し, $\frac{1}{p} - \frac{j}{n} = a(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}) + (1-a)\frac{1}{q}$ であって, a は次の範囲に属する: $m - j - \frac{n}{r}$が非負の整数のときは $\frac{j}{m} \leq a < 1$, それ以外のときは, $\frac{j}{m} \leq a \leq 1$ である.

予備定理 2.2. $0 < \gamma < n, 1 < p, q < \infty$, $1 + \frac{1}{q} = \frac{\gamma}{n} + \frac{1}{p}$とする. このとき,

$$\||x|^{-\gamma} * \phi\|_q \leq C\|\phi\|_p \tag{6}$$

が成り立つ.

予備定理 2.3.

$$\int_{R^n} \int_{R^n} \frac{|\phi(x)|^2 |\psi(x)|^2}{|x-y|^\gamma} dx dy \leq C\|\phi\|_q^2 \|\psi\|_q^2. \tag{7}$$

但し, $q = 4n/(2n - \gamma)$ である.

証明. Hölder の不等式と予備定理 2.2. により,

$$\begin{aligned} \int_{R^n} \int_{R^n} \frac{|\phi(x)|^2 |\psi(x)|^2}{|x-y|^\gamma} dx dy &\leq \|V * |\phi|^2\|_{\frac{q}{q-2}} \|\psi\|_q^2 \\ &\leq C\|\phi\|_q^2 \|\psi\|_q^2. \end{aligned}$$

予備定理 2.4.

$$\|V * |\phi|^2\|_\infty \leq C\|\phi\|_{r_1}\|\phi\|_{r_2}. \tag{8}$$

但し, $2 < r_1 < 2n/(n-\gamma) < r_2 < 2n/(n-2)(\infty \text{ if } n=2)$, $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1 - \frac{n}{\gamma}$である.

証明. $l > 0$ をひとつ固定しておく. Hölder の不等式により,

$$\begin{aligned}
\int_{R^n} V(x-y)|\phi(y)|^2 dy &\leq \int_{|x-y|>l} + \int_{|x-y|<l} \\
&\leq \left(\int_{|x-y|>l} |x-y|^{-\gamma r_1/(r_1-2)} dy\right)^{(r_1-2)/r_1} \|\phi\|_{r_1}^2 \\
&\quad + \left(\int_{|x-y|<l} |x-y|^{-\gamma r_2/(r_2-2)} dy\right)^{(r_2-2)/r_2} \|\phi\|_{r_2}^2 \\
&\leq (l^{-b}\|\phi\|_{r_1}^2 + l^b\|\phi\|_{r_2}^2)
\end{aligned}$$

ここで, $b > 0$ である. $l^b = \|\phi\|_{r_1}/\|\phi\|_{r_2}$ となる様に l を選べば, (8) を得る.

3 定理 1 の証明

予備定理 3.1. (i) $\vec{\phi} \in H^l(l \in \boldsymbol{N})$ のとき, (1) と同値な積分方程式

$$U(-t)u_j(t) = \phi_j - i\int_0^t U(-\tau) \sum_{k=1, k\neq j}^{N} (V * |u_k|^2)u_j(\tau)d\tau \qquad (j = 1, \cdots, N) \tag{9}$$

は一意な解$\vec{u}(t) \in C(\boldsymbol{R}; H^l) \cap C^1(\boldsymbol{R}; H^{l-2})$ を持つ. 更に, $\vec{\phi} \in L^{2,m}(m \in \boldsymbol{N})$ であれば, $U(-t)\vec{u}(t) \in C(\boldsymbol{R}; L^{2,m})$ となる.

(ii) $\vec{u}(t)$ は次の関係式を満たす.

$$\begin{aligned}
\|u_j(t)\| &= \|\phi_j\| \qquad (j = 1, \cdots, N), &(10)\\
E(\vec{u}(t)) &= \sum_{j=1}^{N} \|\nabla u_j(t)\|^2 + P(\vec{u}(t)) = E(\vec{\phi}). &(11)
\end{aligned}$$

但し, $P(\vec{u}(t)) = \sum_{j,k=1\ j\neq k}^{N} \int_{R^n}\int_{R^n} |u_j(x)|^2|u_k(y)|^2/|x-y|^\gamma dxdy$ である.

(iii) 更に, $\vec{\phi} \in L^{2,1}$ であれば, $\vec{u}(t)$ は

$$\sum_{j=1}^{N} \|xU(-T)u_j(t)\|^2 + t^2P(\vec{u}(t)) = \sum_{j=1}^{N} \|x\phi_j\|^2 + \int_0^t \tau P(\vec{u}(\tau))d\tau \tag{12}$$

を満たす.

証明. (2) の場合とほぼ同じである (例えば, [4] を見よ).

これらは, それぞれ L^2-norm, エネルギーの保存則及び pseudo-conformal conservation law と呼ばれる.

定理の証明の為に, 次の変換を施す.

$$v_j(t) = \mathcal{F}M(t)U(-t)u_j(t). \tag{13}$$

このとき, (1) は

$$i\frac{\partial}{\partial t}v_j(t,x) = -\frac{1}{2t^2}\Delta v_j(t,x) + \frac{1}{t^\gamma}\sum_{k=1,k\neq j}^{N}(V*|v_k|^2)v_j(t,x) \qquad (j=1,\cdots,N). \tag{14}$$

と変換される. (10), (12) はそれぞれ

$$\|v_j(t)\| = constant, \tag{15}$$

$$\frac{1}{t^2}\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}\|\nabla v_j(t)\|^2 + \frac{1}{t^\gamma}\frac{d}{dt}P(\vec{v}(t)) = 0 \tag{16}$$

と同値である. (16) により, 次の評価が得られる.

$$\sum_{j=1}^{N}\|\nabla v_j(t)\|^2 \leq \begin{cases} Ct^{2-\gamma} & (\gamma < 2) \\ C & (\gamma \geq 2), \end{cases} \tag{17}$$

$$P(\vec{v}(t)) \leq C. \tag{18}$$

但し, $t \geq 1$ である. $\gamma > 2$ のときは, (18) を直接 (16) から導くことはできない. しかし, (17) と予備定理 2.1., 予備定理 2.3. を使うことにより, (18) を示すことができる.

まず, 定理 1 を (i) のもとで示す. $w_j = \text{s-}\lim_{t\to\infty} v_j(t) \in L^2$ が存在すれば,

$$\|U(-t)u_j(t) - \mathcal{F}^{-1}w_j\| \leq \|\mathcal{F}M(t)U(-t)u_j(t) - w_j\| + \|w_j - \mathcal{F}M(t)\mathcal{F}^{-1}w_j\|$$

であって, 第一項は明らかに 0 に収束する. 第二項の

$$\|(1-M(t))\mathcal{F}^{-1}w_j\|$$

は Lebesgue の収束定理により 0 に収束するから,

$$\lim_{t\to\infty}\|u_j(t) - U(t)\mathcal{F}^{-1}w_j\| = 0$$

である. 従って, $\text{s-}\lim_{t\to\infty} v_j(t)$ が存在することを示せば十分である. (14) と (15) により,

$$\begin{aligned} &\|v_j(t) - v_j(s)\|^2 \\ = \;& -2Re(v_j(t) - v_j(s), v_j(s)) \\ = \;& -2Im\left\{\int_s^t \frac{1}{2\tau^2}(\nabla v_j(\tau), \nabla v_j(s))d\tau \right. \\ & \left. + \int_s^t \frac{1}{\tau^\gamma}\sum_{k=1,k\neq j}^{N}((V*|v_k|^2)v_j(\tau), v_j(s))d\tau\right\}. \end{aligned} \tag{19}$$

$\sqrt{5}-1<\gamma<2$ のとき,(17) により

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &\le C\|\nabla v_j(s)\|\int_s^t \|\nabla v_j(\tau)\|d\tau \\ &\le Cs^{1-\frac{\gamma}{2}}\int_s^t \tau^{-1-\frac{\gamma}{2}}d\tau = C(s^{1-\gamma}-s^{1-\frac{\gamma}{2}}t^{-\frac{\gamma}{2}}) \to 0 \qquad (s,t\to\infty). \end{aligned}$$

$\gamma<2$ のとき, Hölder の不等式, 予備定理 2.4., (17) 及び (18) により,

$$\begin{aligned} \mathrm{II} &\le \int_s^t \frac{1}{\tau^\gamma}\sum_{k=1,k\neq j}^N \|((V*|v_k|^2)v_j(\tau)\|d\tau\|v_j(s)\| \\ &\le C\int_s^t \frac{1}{\tau^\gamma}\sum_{k=1,k\neq j}^N \|(V*|v_k|^2)\|_\infty^{\frac{1}{2}}P(\vec{v})^{\frac{1}{2}}d\tau \\ &\le C\int_s^t \frac{1}{\tau^\gamma}\sum_{k=1}^N (\|v_k\|_{r_1}\|v_k\|_{r_2})^{\frac{1}{2}}d\tau \\ &\le C\int_s^t \frac{1}{\tau^\gamma}\sum_{k=1}^N (\|\nabla v_k\|^\gamma\|v_k\|^{2-\gamma})^{\frac{1}{2}} \\ &\le C\int_s^t \tau^{\frac{\gamma}{2}(1-\frac{\gamma}{2})}d\tau \end{aligned}$$

$\sqrt{5}-1<\gamma<2$ であれば, これは, $s,t\to\infty$ のとき 0 に収束する. $\gamma\ge 2$ のときは, s$-\lim_{t\to\infty} v_j(t)$ の存在を示すのはより簡単である. 実際, このとき, 第一項は先程と同じ様に評価できるし, 第二項は

$$\begin{aligned} & C\int_s^t \sum_{k=1,k\neq j}^N \|v_k(\tau)\|_q^2\|v_j(\tau)\|_q d\tau\|v_j(s)\|_q \\ \le\ & C(\sup_{t\ge 1}\|\vec{v}(t)\|_{H^1})^4\int_s^t \frac{1}{\tau^\gamma}d\tau \to 0 \qquad (s,t\to\infty). \end{aligned}$$

となるからである (予備定理 2.4. の証明を見よ).

(ii) の場合には, 少し工夫がいる. まず, つぎの予備定理を示す.

予備定理 3.2. $\vec{\phi}\in H^1\cap L^{2,2}$ とする. $t\ge 1$ に対し,

$$\|\Delta v_j(t)\|^2 \le Ct^{(\gamma^2-8\gamma+10)/(2-\gamma)} \tag{20}$$

が成り立つ.

証明. $\vec{\phi}\in H^1\cap L^{2,2}$であれば, $\vec{v}\in C((0,\infty);H^2)\cap C^1((0,\infty);L^2)$ である. (14) の両辺に Δ を作用させると,

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Delta v_j(t,x) = -\frac{1}{2t^2}\Delta^2 v_j(t,x) + \frac{1}{t^\gamma}\sum_{k=1,k\neq j}^N \Delta[V*|v_k|^2)v_j(t,x)] \qquad (j=1,\cdots,N). \tag{21}$$

これに $\Delta\overline{v_j}$ をかけて積分し, 虚部をとれば,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^N \|\Delta v_j(t)\|^2 = \frac{1}{t^\gamma}Im\sum_{k=1,k\neq j}^N \int_{R^n} \Delta[(V*|v_k|^2)v_j]\Delta\overline{v_j}dx.$$

予備定理 2.1., 予備定理 2.2. 及び (17) により,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}\|\Delta v_j(t)\|^2 &\le Ct^{-\gamma}\left(\sum_{j=1}^{N}\|\Delta v_j(t)\|^2\right)^{\frac{4-\gamma}{2}}\left(\sum_{j=1}^{N}\|\nabla v_j\|\right)^{\gamma} \\
&\le Ct^{-\gamma+\gamma(1-\frac{\gamma}{2})}\left(\sum_{j=1}^{N}\|\Delta v_j(t)\|^2\right)^{\frac{4-\gamma}{2}} \qquad (22)
\end{aligned}
$$

この微分不等式を解けば, (20) を得る.

注意. $\Delta^2 v_j$ を考える為には, $v_j \in H^4$ が必要であるが, regularizing technique により, $v_j \in H^2$ という仮定の下で上の予備定理を示すことができる.

予備定理 3.3. $1 < \gamma < 4/3$, $\vec{\phi} \in H^1 \cap L^{2,2}$ とする. $t \ge 1$ に対し,

$$
\|v_j(t)\|_p \le C \qquad (23)
$$

が成り立つ. 但し, $\frac{1}{2} - \frac{(\gamma-1)(2-\gamma)}{n(6-4\gamma)} < \frac{1}{p} \le \frac{1}{2}$ とする.

証明. (14) の両辺に $|v_j|^{p-2}\overline{v_j}$ をかけて積分し, 虚部をとると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|v_j\|_p^p &= \frac{-1}{2t^2} Im \int_{R^n} \Delta v_j |v_j|^{p-2}\overline{v_j}dx \\
&= \frac{1}{2t^2} Im \int_{R^n} \nabla v_j \nabla(|v_j|^{p-2}\overline{v_j})dx \\
&\le \frac{C}{t^2}\int_{R^n} |\nabla v_j|^2 |v_j|^{p-2}dx \\
&\le \frac{C}{t^2}\|\nabla v_j\|_p^2 \|v_j\|_p^{p-2}.
\end{aligned}
$$

ここで, Hölder の不等式を用いた. 予備定理 2.1., 予備定理 3.2. により,

$$
\begin{aligned}
\|\nabla v_j\|_p &\le C\|\Delta v_j\|^{\frac{n}{2}-\frac{n}{p}}\|\nabla v_j\|^{1-\frac{n}{2}+\frac{n}{p}} \\
&\le Ct^{\rho}
\end{aligned}
$$

が成り立つ. 但し

$$
\rho = (\frac{n}{2}-\frac{n}{p})\frac{\gamma^2-8\gamma+10}{2(2-\gamma)} + (1-\frac{n}{2}+\frac{n}{p})(1-\frac{\gamma}{2}).
$$

である. 従って,

$$
\frac{d}{dt}\|v_j(t)\|_p^p \le Ct^{-2+2\rho}\|v_j(t)\|_p^{p-2}.
$$

p が予備定理の条件を満たしていれば, この微分不等式を解くことにより予備定理の主張を得る.

注意. $v_j(t,x) = (it)^{\frac{n}{2}}M(t)u_j(t,tx)$ であるから, この結果は $\|v_j\|_p \le Ct^{-\frac{n}{2}+\frac{n}{p}}$ を意味する. これは, 自由粒子の場合と同じ減衰評価である.

定理の証明を続けよう.

(ii) の場合の定理 1 の証明. (i) の場合と同じ様に, (19) の右辺を評価していく. 第一項は先程と同じであるので, 第二項だけ考えれば良い. 予備定理 3.3. により, $\|v_j(s)\|_\eta = O(s^\nu)$ ($\frac{1}{\eta} = \frac{1}{2} - \frac{(\gamma-1)(2-\gamma)}{n(6-4\gamma)}$, ν は任意の正数) であるから, $\tau^{-\gamma}\|V * |v_k|^2 v_j(\tau)\|_{\eta'} = O(\tau^{-1-\varepsilon})$ ($\varepsilon > 0$) を示せば十分. Hölder の不等式, 予備定理 2.2., と (18) により,

$$\begin{aligned}
& \|V * |v_k|^2 v_j(\tau)\|_{\eta'} \\
\le\ & \|(V * |v_k|^2)^{\frac{1}{2}} v_j\| \|(V * |v_k|^2)^{\frac{1}{2}}\|^{\frac{1}{2}}_{\frac{2\eta}{\eta-2}} \\
\le\ & P(\vec{v})^{\frac{1}{2}} \|V * |v_k|^2\|^{\frac{1}{2}}_{\frac{\eta}{\eta-2}} \\
\le\ & C\|v_k\|_\mu \qquad (\frac{1}{\mu} = 1 - \frac{1}{\eta} - \frac{\gamma}{2n}).
\end{aligned} \tag{24}$$

予備定理 2.1. より,

$$\|v_k\|_\mu \le C\|\nabla v_k\|^a \|v_k\|_\eta^{1-a},$$

但し $\frac{1}{\mu} = a(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) + (1-a)\frac{1}{\eta}$ であるから, (24) の右辺は

$$C_\nu \tau^{a(1-\frac{\gamma}{2})+\nu}$$

で評価される. 但し ν は任意に小さくとれる正数である. 従って

$$-\gamma + a(1 - \frac{\gamma}{2}) < -1.$$

であればよく, これを整理すると,

$$2\gamma^3 - 19\gamma^2 + 40\gamma - 24 > 0$$

となる. $4 - 2\sqrt{2} < \gamma < \sqrt{5} - 1$ のとき, この式は成り立っている.

4 定理 2 の証明

証明. 矛盾により示す. $w_j = \mathrm{s-}\lim_{t\to\infty} v_j(t) \in L^2 (j = 1, \cdots, N)$ が存在すると仮定すると, (15) により $\|v_j\| = \|w_j\|$ が成り立つ. まず, $\psi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ に対し,

$$\lim_{t\to\infty}(V * |v_k|^2 v_j(t), \psi) = (V * |w_k|^2 w_j, \psi). \tag{25}$$

が成り立つことを示す.

$$\begin{aligned}
& |(V * |v_k|^2 v_j, \psi) - (V * |w_k|^2 w_j, \psi)| \\
\le\ & |(V * (|v_k|^2 - |w_k|^2) v_j, \psi)| + |(V * |w_k|^2 (v_j - w_j), \psi)| \\
=\ & A + B.
\end{aligned}$$

Fubini の定理と Hölder の不等式により,

$$\begin{aligned} A &\le \int_{R^n}\left(\int_{R^n} V(x-y)(|v_k(y)|^2-|w_k(y)|^2)dy\right)|v_j(x)||\psi(x)|dx \\ &= \int_{R^n}(|v_k(y)|^2-|w_k(y)|^2)\left(\int_{R^n} V(x-y)|v_j(x)||\psi(x)|dx\right)dy \\ &\le \|(|v_k|+|w_k|)(|v_k|-|w_k|)\|_1\|V*(|v_j||\psi|)\|_\infty \\ &\le C(\|v_k\|+\|w_k\|)\|v_k-w_k\|(\|\psi\|_{\alpha+\delta}+\|\psi\|_{\alpha-\delta}). \end{aligned}$$

但し$\alpha=2n/(n-2\gamma)$ であって, δ は任意に小さくとれる. $\|v_j(t)\|$ は保存されるから,

$$A \le C\|v_k(t)-w_k\| \to 0 \qquad (t\to\infty)$$

である. B についても同様に,

$$B \le C\|w_k\|^2\|v_j(t)-w_j\|(\|\psi\|_{\alpha+\delta}+\|\psi\|_{\alpha-\delta}) \to 0 \qquad (t\to\infty).$$

さて, $\{\phi_j\}$ に関する仮定により, $\sum_{k=1,k\neq j}^{N}(V*|w_k|^2)w_j \not\equiv 0$ となる j が存在し, $\psi\in\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ を

$$Im\sum_{k=1,k\neq j}^{N}(V*|w_k|^2)w_j,\psi) > 0. \tag{26}$$

となる様に選ぶことができる. $w_j-v_j(t)$ と ψ の内積をとれば,

$$\begin{aligned} &Re(w_j-v_j(t),\psi) \\ = \; &Im\left\{-\int_t^\infty \frac{1}{2\tau^2}(v_j(\tau),\Delta w)d\tau+\int_t^\infty \frac{1}{\tau^\gamma}\sum_{k=1,k\neq j}^{N}(V*|v_k|^2v_j(\tau),\psi)d\tau\right\}. \end{aligned}$$

第一項は,

$$\int_t^\infty \frac{1}{2\tau^2}\|v_j(\tau)\|d\tau\|\Delta w\| = \frac{C}{t} \to 0 \qquad (t\to\infty)$$

となる. (26) により, 第二項は, 十分大きな t に対し,

$$\begin{aligned} &Im\int_t^\infty \sum_{k=1,k\neq j}^{N}(V*|v_k|^2v_j(\tau),\psi)d\tau \\ \ge\; &\frac{1}{2}Im\sum_{k=1,k\neq j}^{N}(V*|w_k|^2)w_j,\psi)\int_t^\infty\frac{1}{\tau^\gamma}d\tau \to \infty \qquad (t\to\infty) \end{aligned}$$

となる. 故に $\lim_{t\to\infty} Re(w_j-v_j(t),\psi)=\infty$ であるが, これは矛盾である.

注意. $n=2$, $\gamma=1$ のときは, $\alpha=\infty$ となってしまう. 従って, 上の証明は適用できない.

参考文献

[1] A. Friedman: *Partial Differential Equations.* Holt-Rinehart and Winston, New York, 1969.

[2] J. Ginibre and G. Velo: On a class of nonlinear Schrödinger equations with nonlocal interaction. *Math. Z.* 170 (1980), 109–136.

[3] N. Hayashi and T. Ozawa: Scattering theory in the weighted $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ spaces for some Schrödinger equations. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique,* 48 (1988), 17–37.

[4] N. Hayashi and T. Ozawa: Smoothing effect for some Schrödinger equations. *J. Funct. Anal.* 85 (1989), 307–348.

[5] N. Hayashi and Y. Tsutsumi: Scattering theory for Hartree type equations. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique,* 46 (1987), 187–213.

[6] H. Nawa and T.Ozawa: Nonlinear scattering with nonlocal interaction. *Commun. Math. Phys.* 146 (1992), 259–275.

[7] E. M. Stein: *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princeton Univ. Press, princeton math. Series 30, 1970.