数理解析研究所講究録
第 899 巻 1995 年 239-244

新しい確率順序の族とその特徴付け

東北大学 経済学部　大西 匡光 (Masamitsu OHNISHI)

1 準備

実数値確率変数 X の累積分布関数を F_X で表す. $F_X^{n|+}$, $n=1,2,\cdots$ を以下の様に再帰的に定義する:

$$F_X^{1|+}(x) := 1-F_X(x), \tag{1.1}$$

$$F_X^{n+1|+}(x) := \int_x^{+\infty} F_X^{n|+}(u)\,du, \quad n=1,2,\cdots. \tag{1.2}$$

また $F_X^{n|-}$, $n=1,2,\cdots$ も同様に再帰的に定義する:

$$F_X^{1|-}(x) := F_X(x), \tag{1.3}$$

$$F_X^{n+1|-}(x) := \int_{-\infty}^{x} F_X^{n|-}(u)\,du, \quad n=1,2,\cdots. \tag{1.4}$$

さらに F_X が確率密度関数 f_X を持つときは,

$$F_X^{0|+}(x) = F_X^{0|-}(x) := f_X(x) \tag{1.5}$$

と定義する.

定理 1.1 実数値確率変数 X と $n=2,3,\cdots$ に対して,

(+)

$$F_X^{n|+}(z) < +\infty,\ \forall z \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow E\left[\left\{(X)^+\right\}^{n-1}\right] < +\infty; \tag{1.6}$$

(−)

$$F_X^{n|-}(z) < +\infty,\ \forall z \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow E\left[\left\{(X)^-\right\}^{n-1}\right] < +\infty, \tag{1.7}$$

ただし $(X)^+ := \max\{0,X\}$, $(X)^- := -\min\{0,X\}$ は, それぞれ X の正, 負の部分を表す非負値確率変数である. □

さて,

$$\frac{d}{dx}F_X^{n+1|+}(x) = -F_X^{n|+}(x), \tag{1.8}$$

$$\frac{d}{dx}F_X^{n+1|-}(x) = F_X^{n|+}(x) \tag{1.9}$$

が成立することに注意する.

定理 1.2 実数値確率変数 X と $n=1,2,\cdots$ に対して, 以下が成立する:

(+)

$$(-1)^k F_X^{n|+(k)} \geq 0,\ k=0,1,\cdots,n; \tag{1.10}$$

(−)

$$(+1)^k F_X^{n|-(k)} \geq 0,\ k=0,1,\cdots,n, \tag{1.11}$$

ただし $F_X^{n|+(k)}$, $F_X^{n|-(k)}$ は, それぞれ $F_X^{n|+}$, $F_X^{n|-}$ の k 階導関数である. □

次に $n=1,2,\cdots$ に対して,

$$r_X^{n|+}(x) \ := \ \frac{F_X^{n-1|+}(x)}{F_X^{n|+}(x)}, \tag{1.12}$$

$$r_X^{n|-}(x) \ := \ \frac{F_X^{n-1|-}(x)}{F_X^{n|-}(x)} \tag{1.13}$$

と定義する. 上式において, $n=1$ のときは

$$r_X^{1|+}(x) \ = \ \frac{f_X(x)}{1-F_X(x)}:\ \text{ハザード率関数}, \tag{1.14}$$

$$r_X^{1|-}(x) \ = \ \frac{f_X(x)}{F_X(x)}:\ \text{逆ハザード率関数} \tag{1.15}$$

であり, $n=2$ のときは

$$r_X^{2|+}(x) \ = \ \frac{1-F_X(x)}{\displaystyle\int_x^{+\infty}\{1-F_X(x)\}\,du} = \frac{1}{E[X-x|X>x]}, \tag{1.16}$$

$$r_X^{2|-}(x) \ = \ \frac{F_X(x)}{\displaystyle\int_{-\infty}^{x} F_X(x)\,du} = \frac{1}{E[x-X|X\leq x]} \tag{1.17}$$

を表すことに注意する ($E[X-x|X>x]$ は年齢 x における X の平均残余寿命であり, $E[x-X|X\leq x]$ はその時間軸を反転することに対応する量である).

2 新しい確率順序の族

次の確率順序の族は良く研究されている.

定義 2.1 実数値確率変数 X, Y と $n=1,2,\cdots$ に対して,

(+) $X \geq_{n|+} Y$ (あるいは $F_X \geq_{n|+} F_Y$) が成立するとは, すべての z に対して, 次式が成立することである:

$$F_X^{n|+}(z) \geq F_Y^{n|+}(z); \tag{2.1}$$

(−) $X \geq_{n|-} Y$ (あるいは $F_X \geq_{n|-} F_Y$) が成立するとは, すべての z に対して, 次式が成立することである:

$$F_X^{n|-}(z) \leq F_Y^{n|-}(z). \tag{2.2}$$

□

上の定義において

- $\geq_{1|+}$ $(= \geq_{1|-})$ は通常の確率順序,
- $\geq_{2|+}$ は増加凸順序,
- $\geq_{2|-}$ は増加凹順序

であり, 一般に以下の定理が良く知られている.

定理 2.1 実数値確率変数 X, Y と $n = 1, 2, \cdots$ に対して,

(+) $X \geq_{n|+} Y$ が成立するための必要十分条件は, すべての

$$f \in \mathcal{F}_{n|+} := \left\{ f : \mathcal{R} \to \mathcal{R},\ (+1)^{k+1} f^{(k)} \geq 0,\ k = 1, \cdots, n \right\} \tag{2.3}$$

に対して, 次式が成立することである:

$$E[f(X)] \geq E[f(Y)];$$

(−) $X \geq_{n|-} Y$ が成立するための必要十分条件は, すべての

$$f \in \mathcal{F}_{n|-} := \left\{ f : \mathcal{R} \to \mathcal{R},\ (-1)^{k+1} f^{(k)} \geq 0,\ k = 1, \cdots, n \right\} \tag{2.4}$$

に対して, 次式が成立することである:

$$E[f(X)] \geq E[f(Y)],$$

ただし $f^{(k)}$ は f の k 階導関数である. □

とくに $\geq_{n|-}$ は n 次の確率優位と呼ばれ, 不確実性の経済学, ファイナンス理論などの分野において重要である.

定義 2.2 実数値確率変数 X, Y と $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して,

(+) $X \geq^{n|+} Y$ (あるいは $F_X \geq^{n|+} F_Y$) が成立するとは, すべての u, v $(-\infty < u \leq v < +\infty)$ に対して, 次式が成立することである:

$$\begin{vmatrix} F_Y^{n|+}(u) & F_Y^{n|+}(v) \\ F_X^{n|+}(u) & F_X^{n|+}(v) \end{vmatrix} \geq 0 \tag{2.5}$$

$$\left(\Longleftrightarrow \frac{F_X^{n|+}(z)}{F_Y^{n|+}(z)} \text{ が } z \text{ に関して増加} \right); \tag{2.6}$$

(−) $X \geq^{n|-} Y$ (あるいは $F_X \geq^{n|-} F_Y$) が成立するとは, すべての u, v $(-\infty < u \leq v < +\infty)$ に対して, 次式が成立することである:

$$\begin{vmatrix} F_Y^{n|-}(u) & F_Y^{n|-}(v) \\ F_X^{n|-}(u) & F_X^{n|-}(v) \end{vmatrix} \geq 0 \tag{2.7}$$

$$\left(\Longleftrightarrow \frac{F_X^{n|-}(z)}{F_Y^{n|-}(z)} \text{ が } z \text{ に関して増加} \right). \tag{2.8}$$

□

上の定義において

- $\geq^{0|+}$ $(= \geq^{0|-})$ は尤度比順序,
- $\geq^{1|+}$ はハザード率順序,
- $\geq^{1|-}$ は逆ハザード率順序

であり, 一般に以下の定理を得る.

定理 2.2 実数値確率変数 X, Y と $n = 1, 2, \cdots$ に対して,

(+) $X \geq^{n|+} Y$ が成立するための必要十分条件は, すべての z に対して, 次式が成立することである:

$$r_X^{n|+}(z) \leq r_Y^{n|+}(z); \tag{2.9}$$

(−) $X \geq^{n|-} Y$ が成立するための必要十分条件は, すべての z に対して, 次式が成立することである:

$$r_X^{n|-}(z) \geq r_Y^{n|-}(z). \tag{2.10}$$

□

定理 2.2 (+) において $n = 2$ とすれば,

- $\geq^{2|+}$ は平均残余寿命順序,
- $\geq^{2|-}$ は平均残余寿命順序における時間軸を反転するという意味で双対な確率順序

である.

3 確率順序間の強弱関係

定理 3.1 $n = 1, 2, \cdots$ に対して

(+) $X \geq_{n|+} Y \Longrightarrow X \geq_{n+1|+} Y$;

(−) $X \geq_{n|-} Y \Longrightarrow X \geq_{n+1|-} Y$

が成立する. □

定理 3.2 $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

(+) $X \geq^{n|+} Y \Longrightarrow X \geq^{n+1|+} Y$;

(−) $X \geq^{n|-} Y \Longrightarrow X \geq^{n+1|-} Y$

が成立する. □

定理 3.3 $n = 1, 2, \cdots$ に対して

(+) $X \geq^{n|+} Y \Longrightarrow X \geq_{n|+} Y$;

(−) $X \geq^{n|-} Y \Longrightarrow X \geq_{n|-} Y$

が成立する. □

4　確率順序の 2 変数関数による特徴づけ

2 変数関数 $g:\ \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ に対して

$$\Delta g(x,y) := g(x,y) - g(y,x) \tag{4.1}$$

と定義する.

定理 4.1 実数値確率変数 X, Y と $n = 1, 2, \cdots$ に対して,

(+) $X \geq_{n|+} Y$ が成立するための必要十分条件は, すべての

$$g \in \mathcal{G}_{n|+} := \left\{g:\ \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R},\ \Delta g(\cdot, y) \in \mathcal{F}_{n|+},\ \forall y \in \mathcal{R}\right\} \tag{4.2}$$

に対して, 次式が成立することである:

$$E\left[\Delta g(\hat{X}, \hat{Y})\right] \geq 0 \tag{4.3}$$

$$\left(\Longleftrightarrow E\left[g(\hat{X}, \hat{Y})\right] \geq E\left[g(\hat{Y}, \hat{X})\right]\right); \tag{4.4}$$

(−) $X \geq_{n|-} Y$ が成立するための必要十分条件は, すべての

$$g \in \mathcal{G}_{n|-} := \left\{g:\ \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R},\ \Delta g(\cdot, y) \in \mathcal{F}_{n|-},\ \forall y \in \mathcal{R}\right\} \tag{4.5}$$

に対して, 次式が成立することである:

$$E\left[\Delta g(\hat{X}, \hat{Y})\right] \geq 0 \tag{4.6}$$

$$\left(\Longleftrightarrow E\left[g(\hat{X}, \hat{Y})\right] \geq E\left[g(\hat{Y}, \hat{X})\right]\right), \tag{4.7}$$

ただし $\hat{X}, \hat{Y}$ は互いに独立で, それぞれ X, Y と同一の分布に従う実数値確率変数である. □

参考文献

[1] Aly, E.-E. A. A. and Kochar, S. C. (1993), "On Hazard Rate Ordering of Dependent Variables", *Advances in Applied Probability*, **25**, pp. 477–482.

[2] Barlow, R. E. and Proschan, F. (1975), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

[3] Fishburn, P. C. (1980), "Stochastic Dominance and Moments of Distributions", *Mathematics of Operations Research*, **5**, 94–100.

[4] Hirshleifer, J. and Riley, J. G. (1992), *The Analytics of Uncertainty and Information*, Cambridge University Press, Cambridge.

[5] Huang, C. and Litzenberger, R. H. (1988), *Foundations for Financial Economics*, North–Holland, New York.

[6] Ingersoll, J. E. Jr. (1987), *Theory of Financial Decision Making*, Rowman and Littlefield, New York.

[7] Karlin, S. (1968), *Total Positivity*, **I**, Stanford University Press, Stanford.

[8] Keilson, J. and Sumita, U. (1982), "Uniform Stochastic Ordering and Related Properties", *Canadian Journal of Statistics*, **10**, pp. 181–198.

[9] Kijima, M. and Ohnishi, M. (1992), Addendum to the Bivariate Characterization of Stochastic Orders, Technical Report No. 92–11, Graduate School of Systems Management, The University of Tsukuba, Tokyo.

[10] Kijima, M. and Ohnishi, M. (1992), Stochastic Dominance by Functional Characterization Approach: Fundamental Results and Applications, Technical Report No. 92–12, Graduate School of Systems Management, The University of Tsukuba, Tokyo.

[11] Lehman, E. L. (1959), *Testing Statistical Hypotheses*, John Wiley & Sons, New York.

[12] Levy, H. (1992), "Stochastic Dominance and Expected Utility: Survey and Analysis", *Management Science*, **38**, pp. 555–593.

[13] Marshall, A. W. and Olkin, I. (1979), *Inequalities: The Theory of Majorization with Applications*, Academic Press, New York.

[14] Mosler, K. and Scarsini, M. (Eds.) (1991), *Stochastic Orders and Decision under Risk*, IMS Lecture Notes–Monograph Series **19**, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, California.

[15] Mosler, K. and Scarsini, M. (1993), *Stochastic Orders and Applications – A Classified Bibliography*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems **401**, Springer–Verlag, Berlin.

[16] Righter, R. and Shanthikumar, J. G. (1992), "Extension of the Bivariate Characterization for Stochastic Orders", *Advances in Applied Probability*, **24**, pp. 506–508.

[17] Ross, S. M. (1983), *Introduction to Stochastic Dynamic Programming*, Academic Press, New York.

[18] Ross, S. M. (1983), *Stochastic Processes*, John Wiley & Sons, New York.

[19] Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (1994), *Stochastic Orders and Their Applications*, Academic Press, San Diego.

[20] Shaked, M. and Tong, Y. L. (Eds.) (1992), *Stochastic Inequalities*, IMS Lecture Notes–Monograph Series **22**, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, California.

[21] Shanthikumar, J. G., Yamazaki, G., and Sakasegawa, H. (1991), "Characterization of Optimal Order of Servers in a Tandem Queue with Blocking", *Operations Research Letters*, **10**, 17–22.

[22] Shanthikumar, J. G. and Yao, D. D. (1991), "Bivariate Characterization of Some Stochastic Order Relations", *Advances in Applied Probability*, **23**, 642–659.

[23] Stoyan, D. (Edited with Revision by Daley, D. J.) (1983), *Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models*, John Wiley & Sons, Chichester.

[24] Whitmore, G. A. and Findlay, M. C. (Eds.) (1978), *Stochastic Dominance: An Approach to Decision Making under Risk*, Lexington Books, Toronto.

[25] Whitt, W. (1980), "Uniform Conditional Stochastic Order", *Journal of Applied Probability*, **17**, pp. 112–123.

[26] Whitt, W. (1985), "Uniform Conditional Variability Ordering on Probability Distribution", *Journal of Applied Probability*, **22**, pp. 619–633.