数理解析研究所講究録
第 899 巻 1995 年 233-238

$\sigma-$集合体の行列表現と確率制御問題への応用

田中　輝雄　(Teruo Tanaka)
広島市立大学情報科学部情報数理学科

Abstract

確率空間の$\sigma-$集合体（ここでは、集合体のみを扱う）の行列表現を用いて、離散時間の確率制御問題、特に、最適停止問題、一般の制御問題、Dynkin game を線形計画、２次計画、行列ゲームの問題に帰着できることを述べる。

1　集合体の行列表現 ([2], [4])

T を自然数、$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間、$\{\mathcal{F}_t, t=1,2,\cdots,T\}$ を部分集合体の増大列とし、以下の２条件を満たすとする：

- $\mathcal{F}=\mathcal{F}_T=\sigma(F_1,F_2,\cdots,F_m),\ \ P(F_i)>0\ \ (i=1,2,\cdots,m),\ \ F_i\cap F_j=\emptyset\ \ (i\neq j),\ \ \cup_i F_i=\Omega$
- $\mathcal{F}_t=\sigma(F_1^t,F_2^t,\cdots,F_{n_t}^t),\ \ P(F_i^t)>0\ \ (i=1,2,\cdots,n_t),\ \ F_i^t\cap F_j^t=\emptyset\ \ (i\neq j),\ \ \cup_i F_i^t=\Omega$

そして、行列 $M_t\ \ (t=1,2,\cdots,T),\ \ M$ を次で定める：

- $M_t:=(m_{ij}^t)_{m\times n_t}\quad (t=1,2,\cdots,T)$

$$m_{ij}^t:=\begin{cases}1 & \text{if } F_i\subset F_j^t\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

- $M:=[M_1M_2\cdots M_T]$:　$m\times n$ 行列　　但し、$n:=\sum_{t=1}^{T}n_t$ とする。

注意 1.1 集合体 $\mathcal{F}_t,\mathcal{F}$ と、行列 M_t, M は１対１に対応する。

例　確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$、増大列 $\{\mathcal{F}_t, t=1,2,3,4\}$ として次のものを考える：

- $\Omega=\{\ (a_1,a_2,a_3,a_4)\ :\ \{1,2,3,4\}$ の permutation$\}$
- $P(\ (a_1,a_2,a_3,a_4)\ )=\dfrac{1}{4!}$
- $\mathcal{F}_1=\sigma(\Omega)$
- $\mathcal{F}_2=\sigma(\{a_1>a_2\},\{a_2>a_1\})$
- $\mathcal{F}_3=\sigma(\{a_1>a_2>a_3\},\{a_1>a_3>a_2\},\{a_3>a_1>a_2\},\{a_2>a_1>a_3\},$
$\{a_2>a_3>a_1\},\{a_3>a_2>a_1\})$

- $\mathcal{F} = \mathcal{F}_4 = \sigma(\{a_1 > a_2 > a_3 > a_4\}, \{a_1 > a_2 > a_4 > a_3\}, \{a_1 > a_4 > a_2 > a_3\},$
$\{a_4 > a_1 > a_2 > a_3\}, \{a_1 > a_3 > a_2 > a_4\}, \{a_1 > a_3 > a_4 > a_2\},$
$\{a_1 > a_4 > a_3 > a_2\}, \{a_4 > a_1 > a_3 > a_2\}, \{a_3 > a_1 > a_2 > a_4\},$
$\{a_3 > a_1 > a_4 > a_2\}, \{a_4 > a_3 > a_1 > a_2\}, \{a_2 > a_1 > a_3 > a_4\},$
$\{a_2 > a_1 > a_4 > a_3\}, \{a_2 > a_4 > a_1 > a_3\}, \{a_2 > a_4 > a_1 > a_3\},$
$\{a_4 > a_2 > a_1 > a_3\}, \{a_2 > a_3 > a_1 > a_4\}, \{a_2 > a_3 > a_4 > a_1\},$
$\{a_2 > a_4 > a_3 > a_1\}, \{a_4 > a_2 > a_3 > a_1\}, \{a_3 > a_2 > a_1 > a_4\},$
$\{a_3 > a_2 > a_4 > a_1\}, \{a_3 > a_4 > a_2 > a_1\}, \{a_4 > a_3 > a_2 > a_1\})$

各 $\mathcal{F}_t$ を生成する集合を、左から順番に F_i^t とする。

このとき、行列 M (24 × 33) は次のようになる：

	$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$		$\mathcal{F}_3$						$\mathcal{F}_4$								
	1	1	2	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	....	22	23	24
1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	....	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	....	0	0	0
3	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	....	0	0	0
4	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	....	0	0	0
5	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	....	0	0	0
6	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	....	0	0	0
7	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	....	0	0	0
8	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	....	0	0	0
9	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	....	0	0	0
10	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	....	0	0	0
11	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	....	0	0	0
12	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	....	0	0	0
13	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	....	0	0	0
14	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	....	0	0	0
15	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	....	0	0	0
16	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	....	0	0	0
17	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	....	0	0	0
18	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	....	0	0	0
19	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	....	0	0	0
20	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	....	0	0	0
21	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	....	0	0	0
22	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	....	1	0	0
23	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	....	0	1	0
24	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	....	0	0	1

命題 1.1 ([2], [4]) *$\mathcal{F}_t$−stopping time τ と 集合*

$$\mathbf{X_{int}} := \{x \in \{0,1\}^n : Mx = \mathbf{1}\}$$

の元は 1 対 1 に対応する。実際、その対応は

$$x_j^t := \begin{cases} 1 & \text{if} \quad F_j^t \subset \{\tau = t\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおき、

$$x = (x_1^1, x_2^1, \cdots, x_{n_1}^1, x_1^2, x_2^2, \cdots, x_{n_2}^2, \cdots, x_1^T, x_2^T, \cdots, x_{n_T}^T)$$

で与えられる。**1** はすべての成分が *1* であるベクトルとする。

命題 1.2 $E = \{c_1, c_2, \cdots, c_r\}$ を有限集合とする。$\mathcal{F}_t$−可測関数 $U : \Omega \longrightarrow E$ と集合

$$\mathbf{C^t_{int}} := \{ \ \{y^{c_j}, j = 1, 2, \ldots, r\} : y^{c_j} \in \{0,1\}^{n_t}, \sum_{j=1}^{r} M_t y^{c_j} = \mathbf{1}, \sum_{j=1}^{r} y^{c_j} = \mathbf{1} \ \}$$

の元は 1 対 1 に対応する。

2 離散時間確率制御問題への応用

E, S をそれぞれ有限集合、f を $S \times E$ 上の実数値関数、g を S 上の実数値関数とし、τ を $\{\mathcal{F}_t\}$−stopping time、S−値確率過程 $\{X_t, t = 1, 2, \cdots, T\}$ で状態変数を、F−値確率過程 $\{U_t, t = 1, 2, \cdots, T\}$ で制御変数を表わすとする。

まず、次の確率制御問題 (SCP) を考える：

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & E[\sum_{k=1}^{\tau} f(X_k, U_k) + g(X_\tau)] \\ \text{subject to} & \tau, \{U_k\} \end{array}$$

2.1 最適停止問題

(SCP) において $f = 0$ とする。

定理 2.1 ([2]) 上記の問題は、次の整数計画問題と同値である *:*

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & x'L \\ \text{subject to} & x \in \mathbf{X_{int}} \end{array}$$

但し、$l_\beta^t := E[g(X_t) : F_\beta^t]$, $L := [l_1^1, l_2^1, \cdots, l_{n_1}^1, l_1^2, l_2^2, \cdots, l_{n_2}^2, \cdots, l_1^T, l_2^T, \cdots, l_{n_T}^T]$ とし、$'$ は転置を表わすとする。

定義 2.1 **([1], [4])** $q = \{q_t, t = 1, 2, \cdots, T\}$ が次の条件を満たすとき、*randomized stopping time* であるという *:*

1. $q_t \geq 0,$

2. q_t *:* $\mathcal{F}_t-$可測関数,

3. $\displaystyle\sum_{t=1}^{T} q_t = 1.$

定理 2.2 **([2], [4])** 定理 *2.1* における整数計画問題を次の線形計画問題に修正する *:*

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & x'L \\ \text{subject to} & Mx = \mathbf{1}, x \geq \mathbf{0} \end{array}$$

このとき、この問題は次の *randomized* 最適停止問題と同値である *:*

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \langle X, q \rangle := E[\sum_{t=1}^{T} g(X_t) q_t] \\ \text{subject to} & q \end{array}$$

2.2 確率制御問題

定理 2.3 上記の問題 *(SCP)* は、次の２次計画問題と同値である *:*

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & x'b + \frac{1}{2}x'Ax \\ \text{subject to} & x = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]',\ \mathbf{y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \cdots, \mathbf{y}_T]' \quad \text{とするとき} \\ & \mathbf{x} \in \mathbf{X_{int}} \\ & \mathbf{y}_t \in \mathbf{C}^{\mathbf{t}}_{\mathbf{int}} \end{array}$$

但し、行列 b, A は次で定める *:*

$K(kt\alpha\beta c) := E[f(X_k, c) : F^t_\alpha \cap F^k_\beta]$,

行列 $\mathbf{K_{(ktc)}}$ は、(α, β) 成分を $K(kt\alpha\beta c)$ とする行列,

$$\mathbf{K} = \left(\begin{array}{cccccccccccccccc}
\mathbf{K_{(11c_1)}} & \cdots & \mathbf{K_{(11c_r)}} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{K_{(12c_1)}} & \cdots & \mathbf{K_{(12c_r)}} & \mathbf{K_{(22c_1)}} & \cdots & \mathbf{K_{(22c_r)}} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{K_{(13c_1)}} & \cdots & \mathbf{K_{(13c_r)}} & \mathbf{K_{(23c_1)}} & \cdots & \mathbf{K_{(23c_r)}} & \mathbf{K_{(33c_1)}} & \cdots & \mathbf{K_{(33c_r)}} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{K_{(1Tc_1)}} & \cdots & \mathbf{K_{(1Tc_r)}} & \mathbf{K_{(2Tc_1)}} & \cdots & \mathbf{K_{(2Tc_r)}} & \mathbf{K_{(3Tc_1)}} & \cdots & \mathbf{K_{(3Tc_r)}} & \mathbf{K_{(4Tc_1)}} & \cdots & \mathbf{K_{(T-1,Tc_r)}} & \mathbf{K_{(TTc_1)}} & \cdots & \mathbf{K_{(TTc_r)}} &
\end{array} \right),$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K} \\ \mathbf{K}' & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} L \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

定義 2.2 $\lambda^t = \{\lambda_j^t, j = 1, 2, \cdots, r\}$ $(t = 1, 2, \cdots, T)$ が次の条件を満たすとき、*randomized* $\mathcal{F}_t-$可測関数であるという：

1. $\lambda_j^t \geq 0$
2. λ_j^t : $\mathcal{F}_t-$可測関数
3. $\sum_{t=1}^{T} \lambda_j^t = 1$

さらに、$\lambda = \{\lambda^1, \lambda^2, \cdots, \lambda^T\}$ を *randomized control* という。

定理 2.4 定理 *2.3* における 2 次計画問題を次の問題に修正する：

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & x'b + \frac{1}{2}x'Ax \\ \text{subject to} & x = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]', \ \ \mathbf{y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \cdots, \mathbf{y}_T]', \ \ \mathbf{y}_t = [\mathbf{y}_t^{c_1}, \mathbf{y}_t^{c_2}, \cdots, \mathbf{y}_t^{c_r}]' \ \ \text{とするとき} \\ & M\mathbf{x} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ & \sum_{j=1}^{r} M_t \mathbf{y}_t^{c_j} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{y}_t^{c_j} \geq \mathbf{0}, \quad \sum_{j=1}^{r} \mathbf{y}^{c_j} = \mathbf{1} \quad t = 1, 2, \cdots, T \end{array}$$

このとき、この問題は次の *randomized* 確率制御問題と同値である：

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \langle X, \lambda, q \rangle := E[\sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{t} \sum_{j=1}^{r} f(X_k, c_j)\lambda_j^t q_t + \sum_{t=1}^{T} g(X_t) q_t] \\ \text{subject to} & \lambda, \ q \end{array}$$

2.3 Dynkin game

$\{X(k), k = 1, 2, \cdots, T\}, \{h(k), k = 1, 2, \cdots, T\}, \{g(k), k = 1, 2, \cdots, T\}, \{f(k), k = 1, 2, \cdots, T\}$ を実数値確率過程、τ_1, τ_2 を $\{\mathcal{F}_t\}-$stopping time として、次の問題を考える：

$$\begin{array}{ll} \text{Find} & ({\tau_1}^*, {\tau_2}^*) \ \text{such that} \\ & J({\tau_1}^*, \tau_2) \leq J({\tau_1}^*, {\tau_2}^*) \leq J(\tau_1, {\tau_2}^*) \quad \forall\, (\tau_1, \tau_2) \\ \text{但し、} & J(\tau_1, \tau_2) = E[\sum_{k=1}^{\tau_1 \wedge \tau_2} X(k) + h(\tau_1) 1_{\{\tau_1 < \tau_2\}} + g(\tau_2) 1_{\{\tau_2 < \tau_1\}} + f(\tau_1) 1_{\{\tau_1 = \tau_2\}}] \end{array}$$

定理 2.5 上記の問題は次と同値である：

$$\begin{array}{ll} \text{Find} & (x^*, y^*) \ \text{such that} \\ & F(x^*, y) \leq F(x^*, y^*) \leq F(x, y^*) \quad \forall\, (x, y) \ \in \mathbf{X_{int}} \times \mathbf{X_{int}} \end{array}$$

但し、関数 F は次で定める：

行列 $A(s, t)$ は、(i, j) 成分を$\sum_{k=1}^{s \wedge t} E[X(k) : F_i^s \cap F_j^t]$ とする行列,
行列 A は、(s, t) 成分を $A(s, t)$ とする行列,
行列 $B(s, t)$ は、

- $s = t$ のとき、(i,j) 成分を $E[f(t) : F_i^t \cap F_j^t]$ とする行列
- $s > t$ のとき、(i,j) 成分を $E[g(t) : F_i^s \cap F_j^t]$ とする行列
- $s < t$ のとき、(i,j) 成分を $E[h(s) : F_i^s \cap F_j^t]$ とする行列

行列 B は、(s,t) 成分を $B(s,t)$ とする行列,
として、

$$F(x,y) = x'(A+B)y$$

とおく。

参考文献

[1] J.R.Baxter and R.V.Chacon, Compactness of Stopping Times, Z.Wahrsch.Verw.Gebiete 40 (1977), 169–181

[2] R.Cairoli and R.C.Dalang, Sequential Stochastic Optimization, Forthcoming (1993)

[3] Y.S.Chow, H.Robbins and D.Siegmund, Great Expectations : The Theory of Optimal Stopping, Houghton–Mifflin, Boston, (1971)

[4] R.C.Dalang, L.E.Trotter,Jr and D.de.Werra, On Randomized Stopping Points and Perfect Graphs, J.Combin.Theory Ser.B 45 (1988), 320–344

[5] J.Neveu, Discrete–Parameter Martingale, North–Holland, (1975)