数理解析研究所講究録
第 899 巻 1995 年 224-232

Stochastic Production Planning について

愛媛大学工学部 大橋 守 (Ohashi Mamoru)

1 はじめに

ある製品の需要率と在庫量に注目して、製品の適正な生産率を決める生産計画問題を考える。製品の在庫量は需要率と生産率によって決まる微分方程式に従う。Fleming, Sethi and Soner[2] は製品の需要率がマルコフ連鎖に従ってランダムに変化する Production Planning について研究した。また、Akella and Kumar [1] は生産システムの故障や修理を考慮して、生産率に制約がある Production Planning 問題を取り扱った。

ここでは、製品の需要率がマルコフ連鎖に従ってランダムに変化する Stochastic Production Planning 問題に対するダイナミック・プログラミング方程式について考察し、classical solution の数値解を求める。製品の在庫量が次の確率微分方程式で表せるものとする。

$$\frac{d}{dt}x(t) = u(t) - y(t), \tag{1}$$

$$x(0) = x, \qquad y(0) = i$$

ただし，製品の在庫量を $x(t) \in R$，製品の生産率 $u(t) \in K = [0,\ d]$，マルコフ連鎖 $\{y(t), t \geq 0\}$ とする。このマルコフ連鎖によって製品の需要率を表す。このとき

$$J(u : x, i) = \mathbf{E}\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}\{h(x(t)) + g(u(t))\}dt \mid x(0) = x,\ y(0) = i\right]$$

を最小にする生産率 $u(t)$ を決める。ここで、$h(x)$, $g(x)$ は単位時間当たりの在庫費用、生産費用とする。

マルコフ連鎖の状態空間 $S = \{1, 2, ..., s\}$ は有限で生成行列 Λ を

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1s} \\ \lambda_{21} & -\lambda_{22} & \dots & \lambda_{2s} \\ \dots & & & \\ \lambda_{s1} & \lambda_{s2} & \dots & -\lambda_{ss} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\lambda_{ii} = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}, \qquad \lambda_{ij} \geq 0$$

とする。$J(u:x,i)$ の最小値

$$v(x,i)=\inf_{u} J(u:x,i) \tag{3}$$

を最適費用関数といい、

$$v(x,i)=J(u^{*}:x,i)$$

となる u^{*} を最適生産方策という。

ここでは以下の仮定のもとで Stochastic Production Planning 問題を考察する。

仮定 **(i)** 在庫費用 $h(x)$ は R の凸関数で、正の定数 k_1, k_2 に対して

$$-k_1 \le h(x) \le k_2(1+|x|^2)$$

とする。

(ii) 生産費用 $g(u)$ は K の狭義凸関数とする。

(iii) $s<d$ とする。

2 最適方策

最適費用関数 $v(x,i)$ の性質を次に示す。

補題 1 $v(x,i)$ はそれぞれの $i \in S$ に対して 凸関数で

$$-k \le v(x,i) \le k(1+\mid x\mid^2) \tag{4}$$

となる正の定数 k が存在する。

この補題は大橋 [5] の結果である。また、Stochastic Production Planning 問題に対するダイナミック・プログラミング方程式は

$$\alpha v(x,i)+H(x,i,v'(x,i))-Lv(x,i)=0, \qquad x\in R, \quad i\in S \tag{5}$$

となる。ただし、

$$H(x,i,r)=-\inf_{u\in K}[\,h(x)+g(u)+(u-i)r\,], \tag{6}$$

$$Lv(x,i)=\sum_{j\neq i}\lambda_{ij}[\,v(x,j)-v(x,i)\,] \tag{7}$$

とする。

ダイナミック・プログラミング方程式 (5) の連続な解 $v(x,i)$ について次の定義を行う。

定義 (viscosity solution)

$v(x,i)$ を連続関数とする。それぞれの (x,i) に対して凸集合 $D_x^+(x,i), D_x^-(x,i)$ を次のように定義する。

$$D_x^+(x,i) = \{r \in R^n : \limsup_{h\to 0}(v(x+h,i) - v(x,i) - r\cdot h) \mid h \mid^{-1} \le 0\},$$

$$D_x^-(x,i) = \{r \in R^n : \liminf_{h\to 0}(v(x+h,i) - v(x,i) - r\cdot h) \mid h \mid^{-1} \ge 0\}$$

このとき、連続関数 $v(x,i)$ がそれぞれの (x,i) に対して

$$\alpha v(x,i) + H(x,i,r) - Lv(x,i) \le 0, \qquad r \in D_x^+(x,i)$$

$$\alpha v(x,i) + H(x,i,r) - Lv(x,i) \ge 0, \qquad r \in D_x^-(x,i)$$

となるとき、ダイナミック・プログラミング方程式 (5) の viscosity solution という。

以下の補題は Fleming, Sethi and Soner[2] の結果である。

補題 2 $v(x,i)$ が viscosity solution で凸関数ならば、それぞれの $i \in S$ に対して $v'(x,i)$ は存在し、連続となる。

補題 3 $v(x,i)$ は viscosity solution となる。

定理 1 それぞれの $i \in S$ に対して

$$u^*(x,i) = \arg\min_{u\in K}[\, g(u) + u\cdot v'(x,i)\,] \tag{8}$$

は連続となる。

[証明] 補題 1、2、3 より $v'(x,i)$ は x に関して連続となる。仮定 (ii) より

$$g(u) + u\cdot v'(x,i)$$

の最小点 $u^*(x,i)$ はただ 1 つ存在し、x に関して連続となる。 ‖

補題 4 u^* に対する方程式 (1) の解 $x^*(t)$ が

$$|x^*(t)| \le k, \qquad (t \ge 0)$$

となる正の定数 k が存在する。

定理 2 $v(x,i) = J(u^* : x,i)$ となる最適生産方策 u^* は (8) 式で与えられる。

[証明] 補題 4 と定理 1 より結果を得る。 ‖

3 数値例

次に最適費用関数 $v(x,i)$ と最適生産方策 u^* の数値解を求める。いま、

$$h(x)=x^2,\qquad g(u)=u^2,\qquad K=[0,3],\qquad S=\{1,\ 2\},$$

$$\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

とする。このとき、最適生産方策 u^* は (8) 式より

$$u^*(x,i)=\begin{cases}0 & v'(x,i)\geq 0\\ -\frac{1}{2}v'(x,i) & -6\leq v'(x,i)<0\\ 3 & v'(x,i)<-6\end{cases} \tag{9}$$

となる。製品の最適在庫量 $x^*(t)$ は

$$\frac{d}{dt}x^*(t)=u^*(x^*(t),y(t))-y(t), \tag{10}$$

$$x^*(0)=x,\qquad y(0)=i$$

で与えられる。また、$u^*(x,i)-i=0$ となる x を $\hat{x}_i$ とすると、$\{(x(t),y(t)):t\geq 0\}$ がマルコフ過程であるから

$$v(\hat{x}_i,i)=\sum_{j\neq i}\int_0^\infty \lambda_{ij}e^{-(\sum_{k\neq i}\lambda_{ik})t}[\int_0^t e^{-\alpha s}\{f(\hat{x}_i)+g(u^*(\hat{x}_i,i))\}ds$$
$$+e^{-\alpha t}v(\hat{x}_i,j)]dt$$

となる。よって、最適費用関数 $v(x,i)$ は $\hat{x}_i$ で次の関係が成り立つ。

$$v(\hat{x}_1,1)-\frac{\hat{x}_1^2+1}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+1}v(\hat{x}_1,2)=0 \tag{11}$$

$$v(\hat{x}_2,2)-\frac{\hat{x}_2^2+4}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+1}v(\hat{x}_2,1)=0 \tag{12}$$

このとき、(5) 式は次のように書ける。

(a) $-6\leq v'(x,1)<0,\ -6\leq v'(x,2)<0$ のとき

$$\alpha v(x,1)+\frac{1}{4}(v'(x,1))^2+v'(x,1)-v(x,2)+v(x,1)-x^2=0$$

$$\alpha v(x,2)+\frac{1}{4}(v'(x,2))^2+2v'(x,2)-v(x,1)+v(x,2)-x^2=0$$

(b) $v'(x,1) \geq 0,\ -6 \leq v'(x,2) < 0$ のとき

$$\alpha v(x,1) + v'(x,1) - v(x,2) + v(x,1) - x^2 = 0$$

$$\alpha v(x,2) + \frac{1}{4}(v'(x,2))^2 + 2v'(x,2) - v(x,1) + v(x,2) - x^2 = 0$$

(c) $v'(x,1) \geq 0,\ v'(x,2) \geq 0$ のとき

$$\alpha v(x,1) + v'(x,1) - v(x,2) + v(x,1) - x^2 = 0$$

$$\alpha v(x,2) + 2v'(x,2) - v(x,1) + v(x,2) - x^2 = 0$$

(d) $-6 \leq v'(x,1) < 0,\ v'(x,2) \leq -6$ のとき

$$\alpha v(x,1) + \frac{1}{4}(v'(x,1))^2 + v'(x,1) - v(x,2) + v(x,1) - x^2 = 0$$

$$\alpha v(x,2) - v'(x,2) - v(x,1) + v(x,2) - x^2 - 9 = 0$$

(e) $v'(x,1) \leq -6,\ v'(x,2) \leq -6$ のとき

$$\alpha v(x,1) - 2v'(x,1) - v(x,2) + v(x,1) - x^2 - 9 = 0$$

$$\alpha v(x,2) - v'(x,2) - v(x,1) + v(x,2) - x^2 - 9 = 0$$

$\alpha = 0.05$ の場合について上式の数値解を求める。(11), (12) 式を満たす (a) の解は

(a-i) $-1.45 \leq x < 1.30$ のとき

$$\begin{aligned} v(x,1) &= 46.890 - 2.531x + 0.975x^2 \\ v(x,2) &= 48.305 - 3.176x + 0.975x^2 \end{aligned}$$

(a-ii) $-1.05 < x \leq 0.90$ のとき

$$\begin{aligned} v(x,1) &= 29.058 - 4.200x - 1.000x^2 \\ v(x,2) &= 30.721 - 2.210x - 1.050x^2 \end{aligned}$$

(a-iii) $-1.05 < x \leq 0.90$ のとき

$$\begin{aligned} v(x,1) &= 29.063 - 4.154x - 1.025x^2 \\ v(x,2) &= 30.676 - 2.153x - 1.025x^2 \end{aligned}$$

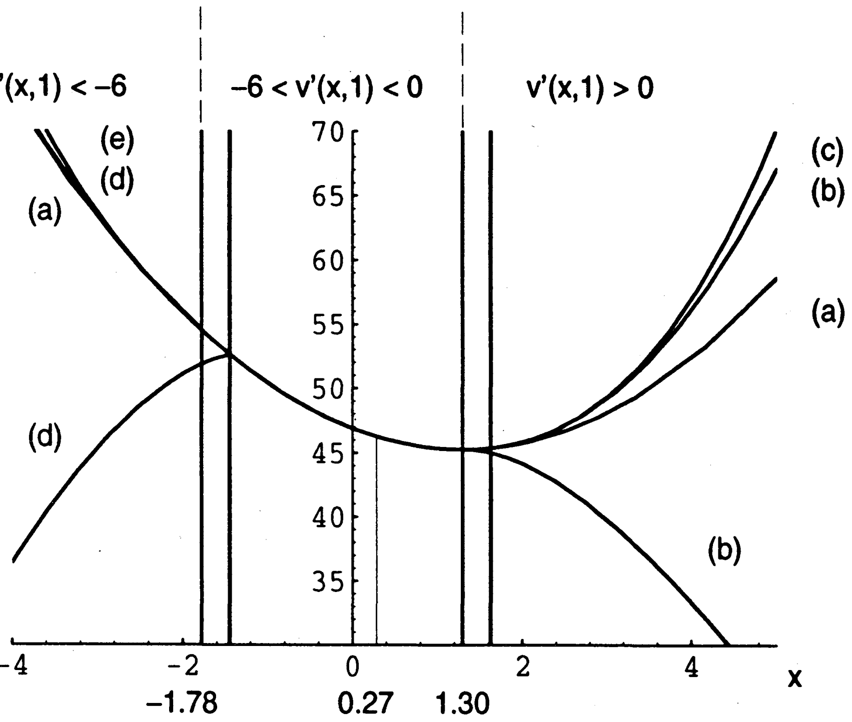

Fig. 1 最適費用関数 v(x,1)

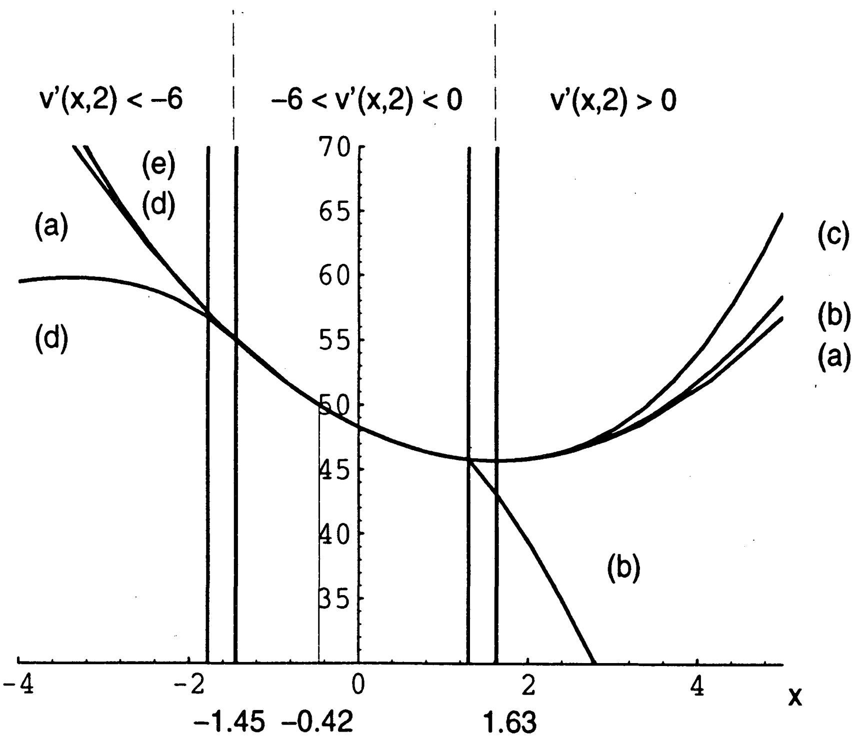

Fig. 2 最適費用関数 v(x,2)

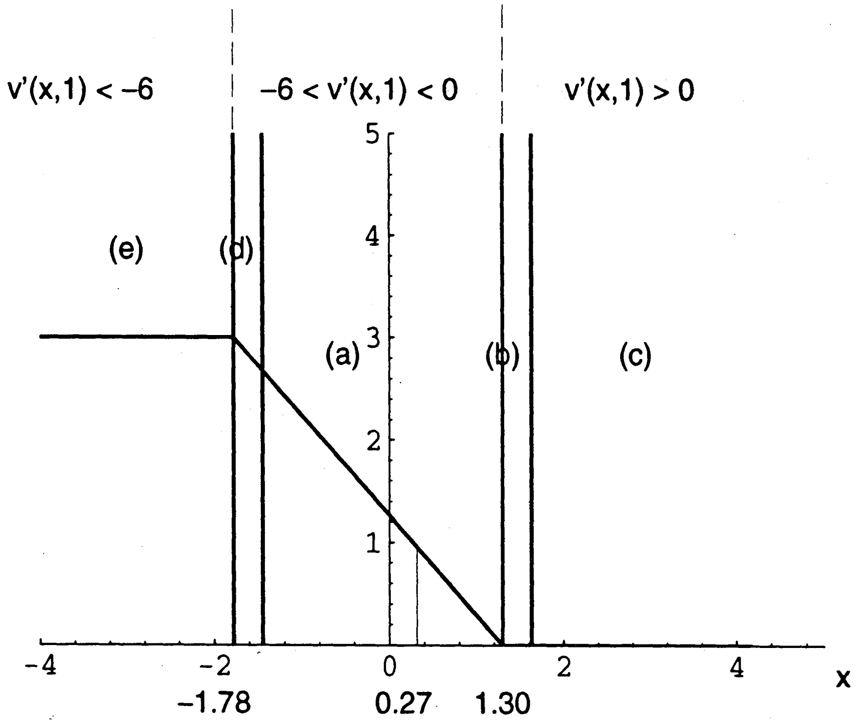

Fig. 3 最適生産方策 u*(x,1)

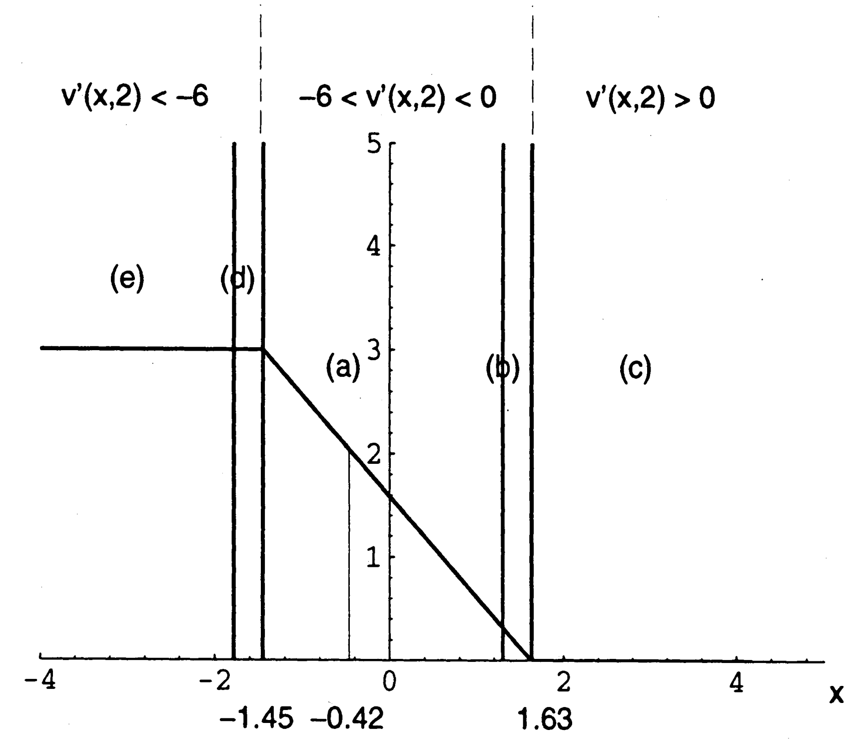

Fig. 4 最適生産方策 u*(x,2)

(a-iv) $-1.05 < x \leq 0.90$ のとき

$$\begin{aligned} v(x,1) &= 29.116 - 4.105x - 1.050x^2 \\ v(x,2) &= 30.679 - 2.100x - 1.000x^2 \end{aligned}$$

となり、$v(x,i)$ は 4 つ存在する。しかし、補題 1 より $v(x,i)$ は凸関数であるから (a-i) の解が最適費用関数となり Fig.1,2 (a) のようになる。このとき、最適生産方策 $u^*(x,i)$ と $\hat{x}_i$は

$$\begin{aligned} u^*(x,1) &= 1.266 - 0.975x \\ u^*(x,2) &= 1.588 - 0.975x \\ \hat{x}_1 &= 0.27 \\ \hat{x}_2 &= -0.42 \end{aligned}$$

となる。また、 $\hat{x}_i$の定義より製品の最適在庫量 $x^*(t)$ は

$$\frac{d}{dt}x^*(t) \begin{cases} \geq 0, & x \leq \hat{x}_{y(t)} \\ < 0, & x > \hat{x}_{y(t)} \end{cases}$$

となる。

(a-i) より $v(1.30,1) = 45.25$, $v(1.30,2) = 45.83$ であるから $x \geq 1.30$ のとき、(b) の微分方程式をを解くと Fig.1,2 (b) のようになる。このとき、$v(x,i)$ が凸関数であるから (b) の条件 $v'(x,1) \geq 0$, $-6 \leq v'(x,2) < 0$ を満たす x は $1.30 \leq x < 1.63$ となる。よって、$x \geq 1.63$ のとき、初期条件 $v(1.63,1) = 45.36$, $v(1.63,2) = 45.72$ のもとで (c) の微分方程式を解くと Fig.1,2 (c) のようになる。同様に、$x < -1.45$ のとき、初期条件 $v(-1.45,1) = 52.60$, $v(-1.45,2) = 54.95$ のもとで (d) の微分方程式を解くと Fig.1,2 (d) のようになる。(d) の条件 $-6 \leq v'(x,1) < 0$, $v'(x,2) \leq -6$ を満たす x は $-1.78 \leq x < -1.45$ となる。よって、$x < -1.78$ のとき、初期条件 $v(-1.78,1) = 54.48$, $v(-1.78,2) = 57.05$ のもとで (e) の微分方程式を解くと Fig.1,2 (e) のようになる。このとき、最適生産方式は Fig.3, 4 のようになる。また、(c), (e) の微分方程式より

$$-k_1 \leq v(x,i) \leq k_2(1 + |x|^2)$$

となる。従って、ダイナミック・プログラミング方程式 (5) を満たし、最適費用関数である classical solution が求まった。

参考文献

[1] R. Akella and P. R. Kumar, *Optimal control of production rate in a failure prone manufacturing system*, IEEE Trans. Automat. Contr., **AC-31**(1986), pp.116-126.

[2] W. H. Fleming, S. P. Sethi and H. M. Soner, *An optimal stochastic production planning problem with randomly fluctuating demand*, SIAM J. Control and Optim., **25**(1987), pp.1494-1502.

[3] W. H. Fleming and H. M. Soner, *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer-Verlag, 1993.

[4] M. K. Ghosh, A.Arapostathis and S. I. Marcus, *Optimal control of switching diffusions with application to flexible manufacturing systems*, SIAM J. Control and Optim., **31**(1993), pp.1183-1204.

[5] 大橋　守, *Simple Production Planning Model* について, 数理解析研究所講究録, **864**(1994), pp. 31-40.