数理解析研究所講究録
第899巻 1995年 208-216

On normalization of extensive games

福岡大・理　　杉万　郁夫　(Ikuo Sugiman)

§1　序

Kuhn[5] によって定式化された展開型ゲームの研究は、初期の幾つかの標準型ゲームへの変換（展開型ゲームの標準化）に関する研究の後、主に、ゲーム理論が応用される分野を中心として行われてきた。そこでの研究の多くは、解の存在性を保証できることと、解がある意味での安定性を有することを主たる条件として、Nash 均衡解の概念を、応用的により高い価値をもつ解概念に限定することを目的としているように見える。

これらの理論において、中心的な役割を担う戦略概念は behavior strategies であり、その前提として、常に perfect recall 性が仮定されてきた。この仮定は、プレイヤーの合理性に関する一つの条件で、過去の自分のとった strategies に関する記憶が保持されていることを情報集合のレベルで表したものである。

一方、展開型ゲームは、繰り返しゲームの解概念を考察するうえで、有力な表現方法の一つである。しかし、例えば、繰り返しゲームの strategies を、学習行動[11] の範囲で考えるとき、過去の履歴は、その内部状態の中に限定された情報として残存しているとするのが自然であろう。そこで、ここでは、この perfect recall 性の仮定をはずしたときに必要となる一般的な mixed strategies の構造を調べる。

また、「展開型ゲームは、その情報構造の表現力において、標準型ゲームより優れているので、標準化することによって、多くの情報が失われる。」これは、応用分野において、よく目にする記述である。このことは、標準型ゲームのプレイヤーの純戦略の集合が構造をもたないことと、展開型ゲームの情報集合に相当する概念が標準型ゲームには存在しないことに起因すると思われる。しかし、展開型ゲームの標準化として得られた標準型ゲーム

は、その pure strategies の中に多くの展開型ゲームの構造を含んでいると考えられる。標準型ゲームの pure strategies の集合にそのような構造を導入することが展開型ゲームにおける mixed strategies の構造を調べる上に不可欠であると考えられる。

§2　展開型ゲームについて

ここで扱う展開型ゲームに関する定式化及び記号は、主として、Selten[12] によって用いられたものである。

定義2．1

展開型ゲーム Γ は、6つの要素の組 (K, P, U, C, p, h) で構成される。各要素は、それぞれ、以下の通りである：

$K = (V, E)$; the game (finite) tree ($Z(\subset V)$; the set of endpoints , o ; origin)

$P = (P_i; i \in N)$; the player partition (of $X = V - Z$)

($N = \{0, 1, \cdots, n\}$; the set of players, where 0 is the nature player)

$U = (U_i; i \in N)$; the information partition

$C = (C_u; u \in U)$; the choice partition

$p = (p_u(c); c \in C_u, u \in U_0)$; the completely mixed probability assignment

$h = (h_i)_{i \in N}$; $Z \longrightarrow \mathbf{R}^n$; the payoff function

このような展開型ゲームにおいては、次に述べる perfect recall が仮定されるのが一般的である。

定義2．2

展開型ゲーム Γ が perfect recall であるとは、任意の $u, v \in U_i, i \in N$ について、$c \rightsquigarrow y$ (i.e. y comes after c) となる $c \in C_u$ と $y \in v$ とが存在すれば、任意の $x \in v$ について $c \rightsquigarrow x$ が成り立つことである。

この仮定の下では、プレイヤーの純戦略の集合に "players' decision tree"[4] と呼ばれる構造が導入でき、このことが、Kuhn[5] と Selten[12] の behavior strategies に関する結果を導いている。

Player i ($\in N-\{0\}$) の純戦略及び混合戦略は、次のようにまとめられる。

$\pi_i = (\pi_{iu}; u \in U_i) \in \Pi_i = \otimes_{u \in U_i} C_u$; the set of pure strategies of player i

$b_i = (b_{iu}; u \in U_i) \in B_i = \otimes_{u \in U_i} D(C_u)$; the set of behavior strategies of player i

$q_i = (q_i(\pi_i); \pi_i \in \Pi_i) \in Q_i = D(\Pi_i)$; the set of mixed strategies of player i

ここで、$D(X)$; the set of discrete probability distributions on X とする。また、B_i と Q_i を含む戦略の集合として、次のようなものも考えられている。

$s_i = (s_i(b_i); b_i \in B_i) \in S_i = \{s_i \in D(B_i); \{b_i \in B_i; s_i(b_i) > 0\}$ is finite $\}$; the set of behavior strategy mixtures of player i

これらの戦略に対して、次の同値関係が用いられる。

<u>定義２．３</u>

$t_i^1, t_i^2 (\in S_i)$ とする。任意の $s_{-i} \in \otimes_{j \neq i} S_j$ と $x \in V$ に対して、$\rho(x, (t_i^1, s_{-i})) = \rho(x, (t_i^2, s_{-i}))$ が成り立つとき、$t_i^1 \sim t_i^2$ (realization equivalence) とする。

ここで、$\rho(x, \mathrm{s})$ はプレイヤーの戦略の組 $\mathrm{s} \in \otimes_{i \in N} S_i$ に関する x への到達確率を表している。

更に、$\mathrm{s} \in \otimes_{i \in N} S_i, x \in u \in U_i; \rho(x, \mathrm{s}) > 0, e = (x, y) \in c \in C_u$ に対して、conditional choice probability を $\mu(c, x, \mathrm{s}) = \rho(y, \mathrm{s}) / \rho(x, \mathrm{s})$ と定義する。

これらの概念の下に、次のよく知られた定理が成り立つ。

<u>定理 (Kuhn[5],Selten[12])</u>

展開型ゲームにおいて、次の（１）－（３）は同値である：

（１）　perfect recall である。

（２） 任意の $s_i \in S_i, i \in N$ に対して、$s_i \sim b_i$ となる $b_i \in B_i$ が存在する。

（３） 任意の $q_i \in Q_i, i \in N$ に対して、$q_{-i} \in \otimes_{j \neq i} Q_j$ について、$h(b_i, q_{-i}) = h(q_i, q_{-i})$ (payoff equivalent) となる $b_i \in B_i$ が存在する。

§ 3 Realization equivalence について

まず、realization equivalence の意味を明瞭にすることから始める。一般的に、realization equivalence は、perfect recall 性の仮定と共に用いられてきた。しかし、展開型ゲームの標準化を考えるとき、少なくとも、標準型ゲームにおける利得の一致を構造的に保証するこの realization equivalence は標準化によってえられるゲームの煩雑化を防ぐ為に不可欠なものであると思われる。

次の結果から、behavior strategies における realization equivalence は、perfect recall 性を戦略のレベルまで拡張して解釈したものであるとみなせる。

命題３．１

$b_i^1, b_i^2 \in B_i$ について、$b_i^1 \sim b_i^2$ が成り立つための必要十分条件は、任意の $u \in U_i; b_i^1(u) \neq b_i^2(u)$ に対して、$c \rightsquigarrow u$ かつ $b_i^1(v)(c) = b_i^2(v)(c) = 0$ となる $c \in C_v, v \in U_i$ が存在することである。

（証明） 必要性を示す。$b_{-i} \in \otimes_{j \neq i} B_j$ を completely mixed（i.e. 任意の $j \in N - \{0, i\}, u \in U_j, c \in C_u$ に対して、$b_{iu}(c) > 0$ が成り立つ）とする。$x \in u \in U_i; b_i^1(u) \neq b_i^2(u)$ のうち、最初のもの（情報集合の間に半順序の存在を仮定するものではない）をとると、$b_i^1(u)(c) > b_i^2(u)(c)$ となる $c \in C_u$ が存在する。また、結論を否定すると、$a \rightsquigarrow u$ である $v \in U_i, a \in C_v$ について、$b_i^1(v)(a) = b_i^2(v)(a) > 0$ が成り立つ。よって、$\rho(x, (b_i^1, b_{-i})) = \rho(x, (b_i^2, b_{-i})) > 0$ となり、$e = (x, y) \in c$ とすると $\rho(y, (b_i^1, b_{-i})) > \rho(y, (b_i^2, b_{-i}))$ より、$b_i^1 \sim b_i^2$ に反する。

十分性は、任意の $b_i^1(u)(c) \neq b_i^2(u)(c)$ となる $c \in C_u, u \in U_i$ を通る path ; o→ z においては、$\rho(z,(b_i^1,b_{-i})) = \rho(z,(b_i^2,b_{-i})) = 0$ であることから明らかである。

また、realization equivalence を mixed strategies について考えると、まず、命題３．１から、直ちに、次の pure strategies に関する基本的な realization equivalence が得られる。

系３．２

$\pi_i^1, \pi_i^2 \in \Pi_i$ について、$\pi_i^1 \sim \pi_i^2$ が成り立つための必要十分条件は、任意の $u \in U_i; \pi_{iu}^1 \neq \pi_{iu}^2$ に対して、$c \rightsquigarrow u$ かつ $\pi_{iv}^1 \neq c$ and $\pi_{iv}^2 \neq c$ となる $c \in C_v, v \in U_i$ が存在する。

この結果から、realization equivalence を前提として考察するときには、pure strategies の集合として $\Pi_i^0 = \Pi_i/\sim$ を、また、mixed strategies の集合としては、Π_i^0 上の mixed strategies の集合 $Q_i^0 = D(\Pi_i^0)$ のみを考えるものとする。

また、情報集合 U_i に、ゲームの木 K から自然な半順序が導入でき、その半順序について、U_i がいくつかの木（information trees）になるときには、mixed strategies に関する基本的な realization equivalence の構成要素として、次のようなものが考えられる。

$\pi_i^1, \pi_i^2 \in \Pi_i$ について、$\pi_i^1 \sim \pi_i^2$ が成り立たないとすると、系３．２より、$\pi_{iu}^1 \neq \pi_{iu}^2$ かつ π_i^1, π_i^2 と completely mixed（i.e. プレイヤー $j(\in N - \{0,i\})$ の到達可能な任意の情報集合において、全ての choice に関する conditional choice probability が正となる）な $q_{-i} \in \otimes_{j\neq i} Q_j$ について到達可能な $x \in u \in U_i$ が存在する。勿論、perfect recall 性を仮定していないので、同じ u の中に到達不可能な要素も存在しているのが一般的である。ここで、u の後に現れる i の情報集合上では $\mu_i^k = \pi_i^{2-k} (k=1,2)$ と、また、他の i の情報集合上では、$\mu_i^k = \pi_i^k (k=1,2)$ と定義する。このとき、

命題３．３

情報集合 U_i に、ゲームの木 K から自然な半順序が導入でき、その半順序について、U_i がいくつかの木になるとする。$\pi_i^1, \pi_i^2 \in \Pi_i$ について、$\pi_i^1 \sim \pi_i^2$ が成り立たないとき、上で定義した $\mu_i^1, \mu_i^2 \in \Pi_i$ に対して、$\pi_i^1 * (1/2) + \pi_i^2 * (1/2) \sim \mu_i^1 * (1/2) + \mu_i^2 * (1/2)$ が成り立つ。

（証明）　$q_{-i} \in \otimes_{j \neq i} Q_j$ を completely mixed とする。情報集合 U_i に、ゲームの木 K から導入される自然な半順序が存在し、その半順序について、U_i がいくつかの木になっているので、任意の u の前に現れる i の情報集合は x の前に現れる。また、それらの情報集合では、x に続く choice が選ばれているので、π_i^1, π_i^2 の u 上への到達分布は同じである。

このとき、u の後に現れる $z \in Z$ については、$x_1 \rightsquigarrow z$ となる $x_1 \in u$ をとると、$\rho(x_1, (\mu_i^1 * (1/2) + \mu_i^2 * (1/2), q_{-i})) = \rho(x_1, (\pi_i^1 * (1/2) + \pi_i^2 * (1/2), q_{-i}))$ かつ $\mu(z, x_1, (\mu_i^1 * (1/2) + \mu_i^2 * (1/2), q_{-i})) = \mu(z, x_1, (\pi_i^1 * (1/2) + \pi_i^2 * (1/2), q_{-i}))$ より $\rho(z, (\mu_i^1 * (1/2) + \mu_i^2 * (1/2), q_{-i})) = \rho(z, (\pi_i^1 * (1/2) + \pi_i^2 * (1/2), q_{-i}))$ が成り立ち、他の $z \in Z$ については、明らかに $\rho(z, (\mu_i^1 * (1/2) + \mu_i^2 * (1/2), q_{-i})) = \rho(z, (\pi_i^1 * (1/2) + \pi_i^2 * (1/2), q_{-i}))$ が成り立つ。

この結果は、証明の前に述べた方法で構成される μ_i^1, μ_i^2 についての記述である。つまり、$\pi_i^1, \pi_i^2 \in \Pi_i^0$ かつ $\pi_i^1 \neq \pi_i^2$ と仮定すると、$\mu_i^1 = \pi_i^1, \mu_i^2 = \pi_i^2$ となることはないが、$\mu_i^1 = \pi_i^2, \mu_i^2 = \pi_i^1$ となることがある。それは、証明の中で用いた u の後に現れる i の情報集合以外の任意の情報集合において $\pi_i^1 = \pi_i^2$ が成り立つときで、このときの結果は自明なものになる。

これらの realization equivalence の基本的構成要素は、次の realization equivalence の定義から明らかな結果によって拡張される。

命題３．４

$q_i^1, q_i^2, r_i^1, r_i^2 \in Q_i$ が $q_i^1 \sim q_i^2$ かつ $r_i^1 \sim r_i^2$ を満たせば、任意の $0 \leq p \leq 1$ に対して、$q_i^1 * p + r_i^1 * (1-p) \sim q_i^2 * p + r_i^2 * (1-p)$ が成り立つ。

逆に、$q_i^1 \sim q_i^2$ かつ $r_i^1 \sim r_i^2$ なる $q_i^1, q_i^2, r_i^1, r_i^2 \in Q_i$ に対して、s_i^1, s_i^2 がある $0 < p < 1$ に対して、$q_i^1 = r_i^1 * p + s_i^1 * (1-p), q_i^2 = r_i^2 * p + s_i^2 * (1-p)$ を満たすとき $s_i^1 \sim s_i^2$ が成り立つ。

次の結果によって、任意の mixed strategies の realization equivalence は、系３．２と命題３．３で述べた２つの基本的な mixed strategies の realization equivalence に単純化されることがわかる。

定理３．５

情報集合 U_i に、ゲームの木 K から自然な半順序が導入でき、その半順序について、U_i がいくつかの木になるとき、任意の mixed strategies の realization equivalence は、系３．２と命題３．３を命題３．４に用いて得られる realization equivalence の高々有限回の推移によって得られる。

（証明）　$q_i^1, q_i^2 \in Q_i^0$ が $q_i^1 \sim q_i^2$ とする。$q_{-i} \in \otimes_{j \neq i} Q_j$ を completely mixed とするとき、$\rho(z, (q_i^1, q_{-i})) = \rho(z, (q_i^2, q_{-i})) > 0$ なる $z \in Z$ をとる。$\rho(z, (\pi_i, q_{-i})) > 0$ かつ $q_i^1(\pi_i) < q_i^2(\pi_i)$ となる $\pi_i \in \Pi_i^0$ が存在すると仮定する。このとき、$\rho(z, (\pi_i^1, q_{-i})) > 0, \cdots, \rho(z, (\pi_i^k, q_{-i})) > 0$ かつ $q_i^2(\pi_i) - q_i^1(\pi_i) = q_i^1(\pi_i^1) + \cdots + q_i^1(\pi_i^k)$ となる π_i と異なる k 個の $\pi_i^1, \cdots, \pi_i^k \in \Pi_i^0$ が存在する。

ここで、U_i のなす順序にしたがって、$\rho(x, (\pi_i, q_{-i})) > 0$ となる x を含み、かつ $J = \{j \in \{1, \cdots, k\} \mid \pi_{iu}^j \neq \pi_{iu}\} \neq \phi$ となる情報集合 $u \in U_i$ について、次のように命題３．３に命題３．４を用いた realization equivalence を順次適用する。$\rho(z, (\mu_i^1, q_{-i})) = \cdots = \rho(z, (\mu_i^l, q_{-i})) = 0, \Sigma_{j \in J} q_i^1(\pi_i^j) = q_i^1(\mu_i^1) + \cdots + q_i^1(\mu_i^l)$ かつ任意の $j = 1, \cdots, l$ に

ついて、$\rho(x,(\mu_i^j,q_{-i}))>0, \mu_{iu}^j=\pi_{iu}$ なる $\mu_i^1,\cdots,\mu_i^l\in\Pi_i^0$ をとり、$q_i^1(\pi_i^j)$ と $q_i^1(\mu_i^j)$ を揃えて、π_i^j と μ_i^j の u から後ろの choice をいれかえる。これらの realization equivalent な変換により得られた q_i^1 と realization equivalent な mixed strategy を、新たに、q_i^1 とおくと、$q_i^1\sim q_i^2$ かつ $q_i^1(\pi_i)=q_i^2(\pi_i)$ より、命題３．４の後半を用いて、$q_i^1\sim q_i^2$ かつ $\rho(z,(q_i^1,q_{-i}))=\rho(z,(q_i^2,q_{-i}))=0$ なる q_i^1,q_i^2 に取り替えることができる。これを繰り返すと、Z の有限性より、有限回の realization equivalent な変換により題意を満たせることが示せる。

§４ 標準型情報集合について

pure strategies に agreement equivalence（展開型ゲームにおける payoff equivalence）を施した標準型ゲーム（ PRNF or Reduced normal form[3] ）$(S=\otimes_{i\in N}S_i,\pi=(\pi_i;i\in N))$ において、Mailah et al.[6] は（標準型）情報集合を次のように定式化した。

定義４．１

$X=X_i\otimes X_{-i}\subset S_i\otimes(\otimes_{j\neq i}S_j)$ が $i\in N$ の情報集合であるとは、任意の $r_i,s_i\in X_i$ に対して、$x_{-i}\in X_{-i}$ ならば、$\pi(t_i,x_{-i})=\pi(r_i,x_{-i})$ が成り立ち、$x_{-i}\in(\otimes_{j\neq i}S_j)-X_{-i}$ ならば、$\pi(t_i,x_{-i})=\pi(s_i,x_{-i})$ が成り立つ $t_i\in X_i$ が存在することである。

この定義は、perfect recall 性を仮定された展開型ゲームの情報集合を、標準型ゲームの上でとらえたものである。この定義と命題３．３の証明を比較すると、π_i^1,π_i^2 を含む任意の（標準型）情報集合には μ_i^1,μ_i^2 も含まれていることがわかり、この realization equivalence の構造が情報集合をとらえる上で重要と考えられる。

（参考文献）

[1] Abreu,D.,On the Theory of Infinitely Repeated Games with Discounting, Econometrica, 56 (1988) 383-396.

[2] Fudenberg,D. and Maskin,E.,The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting or with Incomplete Information, Econometrica, 54 (1986) 533-554.

[3] Kohlberg,E. and Mertens,J.F.,On the Strategic Stability of Equilibria, Econometrica, 54 (1986) 1003-1037.

[4] Kreps,D. and Wilson,R.,Sequential Equilibria, Econometrica, 50 (1982) 863-894.

[5] Kuhn,H.W.,Extensive Games and the Problem of Information, in Contributions to the Theory of Games II, Annals of Mathematical Studies, 28 (1953) 193-216.

[6] Mailath,G.J.,Samuelson,L. and Swinkels,J.M.,Extensive Form Reasoning in Normal Form Games, Econometrika, 61 (1993) 273-302.

[7] Mailath,G.J.,Samuelson,L. and Swinkels,J.M.,Normal Form Structures in Extensive Form Games, (preprint).

[8] Nash,J.F.,Equilibrium Points in n-Person Games, Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA 36 (1950) 48-49.

[9] Nash,J.F.,Non-cooperative Games, Annals of Mathematics, 54 (1951) 286-295.

[10] Rubinstein,A.,Equilibrium in Supergames with the Overtaking Criterion, Journal of Economic Theory, 21 (1979) 1-9.

[11] Rubinstein,A.,Finite Automata Play the Repeated Prisoner's Dilemma, Journal of Economic Theory, 39 (1986) 83-96.

[12] Selten,R.,Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games, International Journal of Game Theory, 4 (1975) 25-55.