数理解析研究所講究録
第 899 巻 1995 年 150-158

最短点と最遠点の問題について

東工大情理研　高橋　渉 (Wataru Takahashi)

「Hilbert 空間 H において，C を H の空でない閉凸集合とし，$x \in H$ とする．このとき，$\|x-y_0\| = d(x, C)$ となる C の点 y_0 が存在する．しかもこのような y_0 はただ1つである.」や「C を Hilbert 空間の凸集合とし，$x \in H$ とする．このとき，C の点 y が $\|x-y\| = d(x, C)$ となる必要十分条件は

$$(x-y, y-z) \geq 0, \quad {}^\forall z \in C$$

が成り立つことである.」等の定理はよく知られている最短点に関する定理である．一方，K. S. Lau [1] はつぎの最遠点に関する定理を証明した．それを述べる前に 2，3 の定義が必要である．E を Banach 空間とし，C を E の有界閉集合とする．いま実数値関数 $f_C : E \to R$ を

$$f_C(x) = \sup\{\|x-z\| : z \in C\}$$

と定義し，集合 $D(C)$ を

$$D(C) = \{x \in E : \inf_{z \in C}(z-x, x^*) = -f_C(x), \ {}^\forall x^* \in \partial f_C(x)\}$$

と定義する．このとき Lau の定理はつぎのようである．「C

をBanach空間Eの弱コンパクト集合とする．このとき，任意の$x \in D(C)$はC内に最遠点をもつ．また$D(C)$はEで稠密なG_δ-集合である.」最遠点の一意性に関する命題も最近宮島－和田[3]によって，狭義凸で回帰的なBanach空間という条件の下で証明された．

ここでは最短点定理に関するいろいろな拡張や，それを用いて得られるいくつかの命題について議論する．また最遠点問題に関しては，Lauの定理を有限個の点の場合まで拡張する．すなわち，有限個の点$\{x_i\}_{i=1}^{n}$を与えたとき

$$g(z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|x_i - z\|, \quad {}^\forall z \in C$$

が最大値をとるかという問題について議論する．

§1．準備

最短点定理や最遠点定理の拡張を議論するにあたって，いくつかの定義や基本的性質の知識が必要であるので以下に記述しておく．

EをBanach空間とし，E^*をそのdual spaceとするとき

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \|x^*\|^2 = \|x\|^2 = x^*(x)\}, \quad {}^\forall x \in E$$

で定義されるJはE上の双対写像と呼ばれ，$J(x)$は空でない有界な閉凸集合である．また$S(E) = \{x \in E : \|x\| = 1\}$とするとき，$x, y \in S(E)$に対して，極限

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t} \qquad \cdots\cdots \quad (*)$$

が考えられるが，この極限が，任意の $x, y\in S(E)$ について存在するとき，E は smooth であるといわれる．E が smooth であるとき，双対写像 J は一価写像である．

S を与えられた集合とし，$m(S)$ を S 上の有界実数値関数の全体からなる sup-norm をもつ Banach 空間とする．X を $m(S)$ の部分空間で，1 を含むものとする．このとき，X 上の実数値関数 μ がつぎの条件 (1)～(4) を満たすならば μ は X 上の submean と呼ばれる．

(1) $\mu(f+g)\leqq\mu(f)+\mu(g)$, $\forall f, g\in X$;

(2) $\mu(\alpha f)=\alpha\mu(f)$, $\forall f\in X$, $\alpha\geqq 0$;

(3) $f\leqq g \Rightarrow \mu(f)\leqq\mu(g)$;

(4) $\mu(c)=c$, c は constant．

(1) で等号が成立するとき，μ は mean と呼ばれる．μ が X 上で mean であるなら

$$\inf_{s\in S} f(s)\leqq\mu(f)\leqq\sup_{s\in S} f(s),\ \forall f\in X$$

がつねに成り立つ．またその逆も成立する．X 上の submean は mean や lim sup（上極限）などを一般化した概念である．詳しいことは [7]，[4] を参照するとよい．

§2. 最短点定理

最初によく知られている最短点定理を述べておこう．

定理1　Eを狭義凸で回帰的なBanach空間とし，CをEの閉で凸な部分集合とする．このとき，任意の$x \in E$に対して

$$\|x - y_0\| = d(x, C)$$

となるy_0が一意に存在する．

定理2　EをBanach空間とし，CをEの凸な部分集合とする．このとき，$x \in E$と$x_0 \in C$に対して，$\|x - x_0\| = d(x, C)$となる必要十分条件は

$$(x_0 - y, j) \geqq 0, \ {}^{\forall} y \in C$$

となる$j \in J(x - x_0)$が存在することである．ただし，JはE上の双対写像である．

つぎの補助定理は複数個の点に対しての最短問題を議論するのに有効である．

補助定理3　Eを回帰的なBanach空間とし，CをEの閉で凸な部分集合とする．またfをCから$(-\infty, \infty]$へのproperで凸な下半連続関数とし，fは$\|x_n\| \to \infty$のとき，$f(x_n) \to \infty$を満たすものとする．このとき

$$f(x_0) = \min_{x \in C} f(x)$$

となる$x_0 \in C$が存在する．

この補助定理を用いるとつぎの定理が得られる．

定理4　HをHilbert空間とし，CをHの空でない閉凸集合とする．Hの有界な点列$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$に対して，C上の実数値関数gを

$$g(z)=\overline{\lim_{i\to\infty}}\|x_i-z\|,\ \forall z\in C$$

で定義する．このとき

$$g(x_0)=\min\{g(z) ; z\in C\}$$

となるような$x_0\in C$が一意に存在する．

同様に，Banach limit μに対してつぎの定理が成り立つ

定理5　HをHilbert空間とし，CをHの空でない閉凸集合とする．Hの有界な点列$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$に対して，C上の実数値関数gを

$$g(z)=\mu_i\|x_i-z\|,\ \forall z\in C$$

で定義する．このとき

$$g(x_0)=\min\{g(z) ; z\in C\}$$

となるような$x_0\in C$が一意に存在する．ただし，$\mu_i\|x_i-z\|$は$\{\|x_i-z\|\}$に対するμの値を表す．

Banach空間ではこの種の定理が成り立たないのだろうか．それに対する答えがつぎの定理である．その証明にあたってはXu [　] の結果が有効に使われる．

補助定理6 (Xu)　$p>1$，$b>0$とする．このとき，Eが一様凸なBanach空間であるならば，$g(0)=0$であり，かつ

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^p \leqq \lambda\|x\|^p+(1-\lambda)\|y\|^p$$
$$-W_p(\lambda)g(\|x-y\|),$$
$$\forall x, y \in B_b,\ 0 \leqq \forall \lambda \leqq 1$$

を満たす continuous, strictly increasing, convex であるような関数 $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ が存在する．ただし，$B_b=\{x\in E: \|x\|\leqq b\}$ で，$W_p(\lambda)=\lambda(1-\lambda)^p+\lambda^p(1-\lambda)$ である．

定理 7　E を一様凸な Banach 空間，S を index set, $\{x_t : t\in S\}$ を有界な集合とする．X は 1 を含むような $m(S)$ の部分空間とし，$x\in C$ に対して

$$f(t)=\|x_t-x\|^2,\ \forall t\in S$$

で定義される関数 f を X は含むものとする．このとき，X 上の submean μ によって定義される関数

$$g(z)=\mu_t\|x_t-z\|,\ \forall z\in C$$

は C の中に最小となる点 x_0 を一意にもつ．

Banach 空間上で，かつ複数個の点に対して最短点となるものの特徴づけ定理を述べよう．その前に定義を 1 つ与えておこう．Banach 空間 E が (UG) であるとは，任意の $y\in S(E)$ に対して，(*) が x で一様収束することである．

定理 8　E を (UG) であるような Banach 空間とし，C を E の凸部分集合とする．S, $\{x_t\}$, X を定理 7 のようなものとし，μ を X 上の mean, $z_0\in C$ とする．このとき

$$\mu_t \|x_t - z_0\|^2 = \min_{y \in C} \mu_t \|x_t - y\|^2$$

となる必要十分条件は

$$\mu_t (z - z_0, J(x_t - z_0)) \leqq 0, \quad {}^\forall z \in C$$

となることである。

§3. 最遠点定理

最後に最遠点定理について述べることにする。その前に定義を2，3述べておく。EをBanach空間とし，CをEの閉で有界な集合とする。このとき

$$f_C(x) = \sup\{\|x - z\| : z \in C\}, \quad {}^\forall x \in E,$$

$$\partial f_C(x) = \{x^* \in E^* : (y - x, x^*) + f_C(y) \leqq f_C(x), \ {}^\forall y \in E\},$$

$$D(C) = \{x \in E : \inf_{z \in C} (z - x, x^*) = -f_C(x), \ {}^\forall x^* \in \partial f_C(x)\}$$

とする。Lauの定理[1]はつぎのようなものである。

定理9（Lau）　EをBanach空間とし，CをEのweakly compactな集合とする。このとき任意の$x \in D(C)$に対して

$$\|x - x_0\| = f_C(x)$$

となる$x_0 \in C$が存在する。さらに$D(C)$はG_δ-setであり，Eで稠密である。

我々はこの定理を有限個の点の場合まで拡張する。ただしここでは2点の場合で命題を述べることにする。まず，$x_1, x_2 \in E$に対して

$$f_C(x_1, x_2) = \sup_{z \in C} \frac{1}{2}\left(\|x_1 - z\| + \|x_2 - z\|\right),$$

$$\partial_1 f_C(x_1, x_2) = \{x_1^* \in E^* : (y - x_1, x_1^*) + f_C(x_1, x_2) \leqq f_C(y, x_2),\ \forall y \in E\},$$

$$\partial_2 f_C(x_1, x_2) = \{x_2^* \in E^* : (y - x_2, x_2^*) + f_C(x_1, x_2) \leqq f_C(x_1, y),\ \forall y \in E\}$$

を定義する．これらに対して $D_2(C)$ は

$$D_2(C) = \{(x_1, x_2) \in E \times E : \inf_{z \in C}\left((z - x_1, x_1^*) + (z - x_2, x_2^*)\right) = -f_C(x_1, x_2),\ \forall (x_1^*, x_2^*) \in \partial_1 f_C(x_1, x_2) \times \partial_2 f_C(x_1, x_2)\}$$

で定義される．このときつぎの定理が成り立つ [5]．

定理 10（坂下-高橋）　E を Banach 空間とし，C は E の weakly compact な集合とする．このとき，任意の $(x_1, x_2) \in D_2(C)$ に対して

$$f_C(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(\|x_1 - z_0\| + \|x_2 - z_0\|\right)$$

となる $z_0 \in C$ が存在する．さらに $D_2(C)$ は G_δ-set であり，かつ $E \times E$ で dense となる．

References

[1] K.S. Lau, Farthest points in weakly compact sets, Israel J. Math. 22 (1975), 168-174.

[2] A.T. Lau and W. Takahashi, Invariant means and semigroups of

nonexpansive mappings on uniformly convex Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 152(1990), 497-505.

[3] S. Miyajima and F. Wada, Uniqueness of a farthest point in a Banach spaces, to appear.

[4] N. Mizoguchi and W. Takahashi, On the existence of fixed points and ergodic retractions for Lipschitzian semigroups in Hilbert spaces, Nonlinear Analysis, 14(1990), 69-80.

[5] J. Sakashita and W. Takahashi, Farthest points in Banach spaces, to appear.

[6] N. Shioji and W. Takahashi, Fan's theorem concerning systems of convex inequalities and its applications, J. Math. Anal. Appl. 135(1988), 383-398.

[7] 高橋 渉, 非線形関数解析学, 近代科学社, 1988.

[8] W. Takahashi and D. H. Jeong, Fixed point theorem for nonexpansive mapgroups on Banach space, Proc. Amer. Math. Soc. 122(1994), 1175-1179.

[9] H. K. Xu, Inequalities in Banach spaces with applications, Nonlinear Analysis, 16(1991), 1127-1138.