

## 可能性測度による線形計画問題の二段階定式化

大阪大学工学部 伊藤 健 ( Takeshi Itoh )  
大阪大学工学部 石井 博昭 ( Hiroaki Ishii )

### 1 はじめに

最適化を行う環境に不完全な情報（不確実性要素）が含まれる場合のモデルとして、確率計画における二段階問題が存在する。しかし、このような不確実性要素が確率的変動を示さない際にも、確率変数として問題を定式化するのは賢明な方法であるとは思えない。さらに、二段階問題は取り扱う確率変数を制限している分布関数の複雑さにより、一般的には解を求めることが非常に困難である。不確実性要素とは、いわゆる「あいまいさ」と解釈できるので、そのような複雑性の影響を考えるうえでも、対象となる線形計画問題のパラメータには確率変数ではなくファジィ理論における可能性変数を導入することが妥当であると思われる。

そこで、我々は確率計画法における二段階問題を参考に、様相性最適化に基づくファジィ二段階問題を提案し、その一解法を示す。

本研究では、制約等式の定数項が可能性変数である線形計画問題を対象とし、非負条件を除いた制約式の数が一つの場合と、多制約の場合とに分けて定式化を行った。

### 2 単制約線形計画問題について

#### 2.1 定式化

次のような線形計画問題を考える。

$$\begin{aligned} P_{s1} : \quad & \text{minimize } \mathbf{c}^t \mathbf{x} \\ & \text{subject to } \mathbf{a}^t \mathbf{x} = b \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

ただし、 $\mathbf{c}^t = (c_1, \dots, c_m)$ ,  $\mathbf{a}^t = (a_1, \dots, a_m)$ ,  $\mathbf{x}^t = (x_1, \dots, x_m)$  とする。

いま、確率計画法における二段階問題のように、制約式の右辺の値  $b$  が確定値ではなく不確定値の場合を考える。ここでは、その値を可能性変数とし、次のようなメンバーシップ関数をもつ可能性分布  $B$  に制限されるものとする。

$$\mu_B(b) = R(u(b-d)^2)$$

ここで  $u$  は正定数,  $d$  は定数とし、 $R$  は

$$R: [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]; R(0) = 1; R(r') = 0$$

なる上半連続非増加関数である。

$b$  の不確定性により制約式が満たされることは稀であり、実際は左辺値と右辺値との間に差  $y = b - \mathbf{a}^t \mathbf{x}$  が生じる。当然、この値も  $b$  を介して可能性変数となり、その可能性分布が次のようになることは明らかである。

$$\mu_Y(y) = \mu_B(y + \mathbf{a}^t \mathbf{x})$$

この差  $y$  の大きさは小さい方が望ましいので、「 $y^2$  は  $f_0$  以下である」というようなファジィ目標  $G$  を設定し、その可能性測度を最大化することにより  $P_{s1}$  の定式化を行う。

$$\begin{aligned} P_{s2} : \quad & \text{maximize} \quad -\mathbf{c}^t \mathbf{x} + F(\Pi_Y(G)) \\ & \text{subject to} \quad y = b - \mathbf{a}^t \mathbf{x} \\ & \quad \quad \quad \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

ただし、 $\Pi_Y(\cdot)$  は可能性測度で

$$\begin{aligned} \Pi_Y(G) &= \sup_y \min\{\mu_Y(y), \mu_G(y)\} \\ &= \sup_y \min\{\mu_B(y + \mathbf{a}^t \mathbf{x}), \mu_G(y)\} \end{aligned}$$

また、 $F(\cdot)$  は増加関数である。いま  $\Pi_Y(G) \geq h$  とすると

$$\begin{aligned} & \sup_y \min\{\mu_B(y + \mathbf{a}^t \mathbf{x}), \mu_G(y)\} \geq h \\ \Leftrightarrow & d - \sqrt{\frac{R^*(h)}{u}} - \mu_G^*(h)^+ \leq \mathbf{a}^t \mathbf{x} \leq d + \sqrt{\frac{R^*(h)}{u}} - \mu_G^*(h)^- \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\mu_G(r)$  は  $-\sqrt{f_0} \leq r \leq \sqrt{f_0}$  で  $\mu_G(r) = 1$ ,  $r \leq 0$  で非減少,  $r \geq 0$  で非増加の上半連続関数とし

$$\begin{aligned} R^*(h) &= \begin{cases} \sup\{r | R(r) > h, r \geq 0\} & (h < 1) \\ 0 & (h = 1) \end{cases} \\ \mu_G^*(h)^- &= \inf\{r | \mu_G(r) > h\} \\ \mu_G^*(h)^+ &= \sup\{r | \mu_G(r) > h\} \end{aligned}$$

である。したがって、ここで

$$\begin{aligned} z(\mathbf{x}) &\equiv -\mathbf{c}^t \mathbf{x} \\ Q_1(h) &\equiv d - \sqrt{\frac{R^*(h)}{u}} - \mu_G^*(h)^+ \\ Q_2(h) &\equiv d + \sqrt{\frac{R^*(h)}{u}} - \mu_G^*(h)^- \end{aligned}$$

とおくと、 $P_{s2}$ を次のように等価変換できる。

$$\begin{aligned}
 P_{s3} : \quad & \text{maximize } z(\mathbf{x}) + F(h) \\
 & \text{subject to } Q_1(h) \leq \mathbf{a}^t \mathbf{x} \leq Q_2(h) \\
 & \quad \quad \quad 0 \leq h \leq 1 \\
 & \quad \quad \quad \mathbf{x} \geq 0
 \end{aligned}$$

## 2.2 解法

$h$  を  $h_\alpha (0 \leq h_\alpha \leq 1)$  で固定すると、 $P_{s3}$ から次のような線形計画問題が得られる。

$$\begin{aligned}
 P_{s4} : \quad & \text{maximize } z(\mathbf{x}) + F(h_\alpha) \\
 & \text{subject to } Q_1(h_\alpha) \leq \mathbf{a}^t \mathbf{x} \leq Q_2(h_\alpha) \\
 & \quad \quad \quad \mathbf{x} \geq 0
 \end{aligned}$$

$P_{s4}$ の解は  $Q_1(h_\alpha), Q_2(h_\alpha)$  の正負に関する情報があれば、簡単に求めることができる。

$Q_1(h), Q_2(h)$  が  $h$  についてそれぞれ増加、減少関数であるので、おのおのの増減表は

$h_\alpha$	0	1	$h_\alpha$	0	1
$Q'_1(h_\alpha)$	+		$Q'_2(h_\alpha)$	-	
$Q_1(h_\alpha)$	$-\infty$	$\nearrow$	$Q_2(h_\alpha)$	$+\infty$	$\searrow$
		$d - \sqrt{f_0}$			$d + \sqrt{f_0}$

となる。したがって、 $d$  と  $f_0$  の関係により、 $Q_1(h_\alpha), Q_2(h_\alpha)$  の正負を次のように分類できる。(  $Q_1(h_\alpha^{(1)}) = Q_2(h_\alpha^{(2)}) = 0$  )

$d, f_0$	$h_\alpha$	$Q_1(h_\alpha)$	$Q_2(h_\alpha)$
$ d  \leq \sqrt{f_0}$	全範囲	$< 0$	$\geq 0$
$d < -\sqrt{f_0}$	$0 \leq h_\alpha \leq h_\alpha^{(2)}$	$< 0$	$\geq 0$
$d < -\sqrt{f_0}$	$h_\alpha^{(2)} < h_\alpha \leq 1$	$< 0$	$< 0$
$d > \sqrt{f_0}$	$0 \leq h_\alpha \leq h_\alpha^{(1)}$	$\leq 0$	$> 0$
$d > \sqrt{f_0}$	$h_\alpha^{(1)} < h_\alpha \leq 1$	$> 0$	$> 0$

これにより、 $\max z(\mathbf{x})$ 、またそれを実現する  $\mathbf{x}$  が得られる。それらは  $h_\alpha$  の関数として求まるので、 $P_{s4}$  は  $h_\alpha$  を変数とする 1 変数関数の最大値問題に変換することができ、簡単な解析により  $P_{s2}$  の最終的な解が得られる。

## 3 多制約線形計画問題について

### 3.1 定式化

対象とする線形計画問題の制約条件が非負条件を除き一つの場合について、前節で扱ったが、現実において、制約条件が一つだけであることは非常に稀であり、実用性を考える

うえでも多制約条件の下での定式化ならびに解法が必要である。本節では各制約等式の定数項が可能性変数である多制約等式線形計画問題に関して、ファジィ二段階問題の拡張を試みる。

次のような線形計画問題を考える。

$$P_{m1} : \begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{c}^t \mathbf{x} \\ \text{subject to} & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

ただし、 $A$  は  $m \times n$  行列とし、 $\mathbf{c}^t = (c_1, \dots, c_n)$ ,  $\mathbf{b}^t = (b_1, \dots, b_m)$ ,  $\mathbf{x}^t = (x_1, \dots, x_n)$  とする。

いま、制約式の右辺の値  $\mathbf{b}$  は確定値ではなく不確定値であり、次のような分布関数に制限される可能性変数とする。

$$\mu_B(\mathbf{b}) = R((\mathbf{b} - \mathbf{d})^t U (\mathbf{b} - \mathbf{d}))$$

ここで、 $U$  は  $m \times m$  非負対角行列、 $\mathbf{d}^t = (d_1, \dots, d_m)$  である。

前節と同様、実際には左辺と右辺の値は異なり、 $\mathbf{y} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}$  なる変数ベクトルを考えることができ、その可能性分布は次のようになる。

$$\mu_Y(\mathbf{y}) = \mu_B(\mathbf{y} + \mathbf{A} \mathbf{x})$$

$\mathbf{y}$  の大きさは小さい方が望ましいので、 $\mathbf{y}$  の各成分  $y_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) に関して、「 $y_i^2$  はだいたい  $f_i$  以下である」なるファジィ目標  $G_i$  を設定する。また、 $G$  のベクトル  $\mathbf{y}$  に対するメンバーシップ関数は

$$\mu_G(\mathbf{y}) = \min_{i=1, \dots, m} \{ \mu_{G_i}(y_i) \}$$

とするのが妥当であろう。次に  $G$  の可能性測度を最大化することにより、 $P_{m1}$  を以下のように定式化する。

$$P_{m2} : \begin{array}{ll} \text{maximize} & -\mathbf{c}^t \mathbf{x} + F(\Pi_Y(G)) \\ \text{subject to} & \mathbf{y} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \Pi_Y(G) &= \sup_{\mathbf{y}} \min \{ \mu_Y(\mathbf{y}), \mu_G(\mathbf{y}) \} \\ &= \sup_{\mathbf{y}} \min [ \mu_B(\mathbf{y} + \mathbf{A} \mathbf{x}), \min_{i=1, \dots, m} \{ \mu_{G_i}(y_i) \} ] \end{aligned}$$

いま  $\Pi_Y(G) \geq h$  とすれば、このことは以下と同値である。

$$\exists \mathbf{y} : \text{"}(\mathbf{y} + \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{d})^t U (\mathbf{y} + \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{d}) \leq R^*(h) \text{ かつ } \forall i : \mu_{G_i}^*(h)^- \leq y_i \leq \mu_{G_i}^*(h)^+ \text{"}$$

ここで、 $\mu_{G_i}(r)$  は  $-\sqrt{f_i} \leq r \leq \sqrt{f_i}$  で  $\mu_{G_i}(r) = 1$ ,  $r \leq 0$  で非減少,  $r \geq 0$  で非増加の上半連続関数とし

$$\begin{aligned}\mu_{G_i}^*(h)^- &= \inf\{r | \mu_{G_i}(r) > h\} \\ \mu_{G_i}^*(h)^+ &= \sup\{r | \mu_{G_i}(r) > h\}\end{aligned}$$

である。

さらに、 $U$ の対角成分を  $u_1, \dots, u_m$ , 新たなパラメータとして  $\mathbf{w} = \mathbf{Ax} - \mathbf{d}$  を導入すれば、上の条件は次のように変形できる。

$$\sum_{i \in J(h)} u_i \cdot 0^2 + \sum_{i \in K(h)} u_i (w_i + \mu_{G_i}^*(h)^-)^2 + \sum_{i \in L(h)} u_i (w_i + \mu_{G_i}^*(h)^+)^2 \leq R^*(h)$$

ただし

$$\begin{aligned}J(h) &= \{i | -\mu_{G_i}^*(h)^+ \leq w_i \leq -\mu_{G_i}^*(h)^-\} \\ K(h) &= \{i | w_i \geq -\mu_{G_i}^*(h)^-\} \\ L(h) &= \{i | w_i \leq -\mu_{G_i}^*(h)^+\}\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{cases} z_i^{J(h)} = w_i + \mu_{G_i}^*(h)^+ & (i \in J(h)) \\ z_i^{K(h)} = w_i + \mu_{G_i}^*(h)^- & (i \in K(h)) \\ z_i^{L(h)} = -w_i - \mu_{G_i}^*(h)^+ & (i \in L(h)) \end{cases} \dots (A)$$

とおくと、 $P_{m2}$ は次のように変換できる。

$$\begin{aligned}P_{m3} : \quad & \text{maximize} \quad -\mathbf{c}^t \mathbf{x} + F(h) \\ & \text{subject to} \quad \sum_{i \in K(h)} \{u_i (z_i^{K(h)})^2\} + \sum_{i \in L(h)} \{u_i (z_i^{L(h)})^2\} \leq R^*(h) \\ & \quad \mathbf{x}, z_i^{K(h)}, z_i^{L(h)} \geq 0 \\ & \quad (A) \\ & \quad 0 \leq z_i^{J(h)} \leq 2\mu_{G_i}^*(h)^+ \\ & \quad 0 \leq h \leq 1\end{aligned}$$

### 3.2 解法

$P_{m3}$ において  $h$  を  $h_\alpha$  ( $0 \leq h_\alpha \leq 1$ ) で固定すると

$$\begin{aligned}
 P_{m4} : \quad & \text{maximize} \quad -\mathbf{c}^t \mathbf{x} + F(h_\alpha) \\
 & \text{subject to} \quad \sum_{i \in K(h_\alpha)} \{u_i(z_i^{K(h_\alpha)})^2\} + \sum_{i \in L(h_\alpha)} \{u_i(z_i^{L(h_\alpha)})^2\} \leq R^*(h_\alpha) \\
 & \quad \mathbf{x}, z_i^{K(h_\alpha)}, z_i^{L(h_\alpha)} \geq 0 \\
 & \quad (A) \\
 & \quad 0 \leq z_i^{J(h_\alpha)} \leq 2\mu_{G_i}^*(h_\alpha)^+
 \end{aligned}$$

$P_{m4}$ の最適解は次の  $P_{m5}$ の最適解に等しい。

$$\begin{aligned}
 P_{m5} : \quad & \text{maximize} \quad -\mathbf{c}^t \mathbf{x} \\
 & \text{subject to} \quad \sum_{i \in K(h_\alpha)} \{u_i(z_i^{K(h_\alpha)})^2\} + \sum_{i \in L(h_\alpha)} \{u_i(z_i^{L(h_\alpha)})^2\} \leq R^*(h_\alpha) \cdots (B) \\
 & \quad \mathbf{x}, z_i^{K(h_\alpha)}, z_i^{L(h_\alpha)} \geq 0 \\
 & \quad (A) \\
 & \quad 0 \leq z_i^{J(h_\alpha)} \leq 2\mu_{G_i}^*(h_\alpha)^+
 \end{aligned}$$

ここで、次のような補助問題  $P_{m5}(\xi)$  を考える。

$$\begin{aligned}
 P_{m5}(\xi) : \quad & \text{maximize} \quad \sum_{i \in K(h_\alpha)} \{u_i(z_i^{K(h_\alpha)})^2\} + \sum_{i \in L(h_\alpha)} \{u_i(z_i^{L(h_\alpha)})^2\} \\
 & \text{subject to} \quad -\mathbf{c}^t \mathbf{x} \geq \xi \\
 & \quad \mathbf{x}, z_i^{K(h_\alpha)}, z_i^{L(h_\alpha)} \geq 0 \\
 & \quad (A) \\
 & \quad 0 \leq z_i^{J(h_\alpha)} \leq 2\mu_{G_i}^*(h_\alpha)^+
 \end{aligned}$$

次の文献

*An Algorithm for a Partially Chance-constrained E-model* (H.Ishii, et al., 1979)

で示されている定理を用いると、 $P_{m5}$ と  $P_{m5}(\xi)$  との間に次のような関係が成立する。

$P_{m5}(\xi)$  の最適解  $\mathbf{x}(\xi)$  (あるいは  $z_i(\xi)$ ) が

$$-\mathbf{c}^t \mathbf{x}(\xi) = \xi \text{ かつ } \sum_{i \in K(h_\alpha)} \{u_i(z_i^{K(h_\alpha)}(\xi))^2\} + \sum_{i \in L(h_\alpha)} \{u_i(z_i^{L(h_\alpha)}(\xi))^2\} = R^*(h_\alpha)$$

を満たすとき、 $P_{m5}(\xi)$  の最適解  $\mathbf{x}(\xi)$  は  $P_{m5}$  の最適解でもある。

なお、証明については [4] を参照されたい。

$P_{m5}$ において制約不等式 (B) を考慮しなかった場合の LP の解  $\mathbf{x}'_5(h_\alpha)$  が (B) を満たせば、すなわち (B) が有効制約でなければ  $\mathbf{x}'_5(h_\alpha)$  は  $P_{m5}$  の最適解となる。一方、 $\mathbf{x}'_5(h_\alpha)$  が  $\sum_{i \in K(h_\alpha)} \{u_i(z_i^{K(h_\alpha)})^2\} + \sum_{i \in L(h_\alpha)} \{u_i(z_i^{L(h_\alpha)})^2\} > R^*(h_\alpha)$  を満たすとき、すなわち (B) が有効制約ならば  $P_{m5}$  の解を求めるために前掲の関係を利用できる。これにより、解法アルゴリズムとして次に示す FTSPA を提案する。

### FTSPA

**Step 1**  $h := h_\alpha, \Phi := \phi_0$

添字分類  $J(h_\alpha), K(h_\alpha), L(h_\alpha)$  のすべての組み合わせ ( $\gamma$  : 組合せ総数) を求め、集合  $\Gamma(i)$  ( $i = 1, 2, \dots, \gamma$ ) を生成し、 $n := 1$ 。

**Step 2** If  $\Gamma(n)$  での (B) が有効制約である

then 二次計画問題  $P_{m5}(\xi)$  の解  $x(\xi)$  を求め、**Step 4**。

**Step 3** If  $P_{m5}$  から (B) を除いた LP が解をもつ

then その解  $\mathbf{x}'_5(h_\alpha)$  を  $P_{m4}$  に代入し 1 変数関数の最大化問題に変換した後、 $0 \leq h_\alpha \leq 1$  を考慮して解  $(\mathbf{x}_4, \xi_4, h_\alpha)$  を求め、 $\Phi := \Phi \cup \{(\mathbf{x}_4, \xi_4, h_\alpha)\}$  とし、**Step 6**。

else  $n := n + 1$  とし **Step 2**。

**Step 4** 連立方程式

$$\begin{cases} -\mathbf{c}^t \mathbf{x}(\xi) = \xi \\ \sum_{i \in K(h_\alpha)} \{u_i(z_i^{K(h_\alpha)}(\xi))^2\} + \sum_{i \in L(h_\alpha)} \{u_i(z_i^{L(h_\alpha)}(\xi))^2\} = R^*(h_\alpha) \end{cases}$$

に  $\mathbf{x}(\xi)$  を代入し、 $h_\alpha, \xi$  を求める。

**Step 5** If  $h_\alpha, \xi$  が  $P_{m5}$  における (B) 以外の制約条件並びに  $0 \leq h_\alpha \leq 1$  を満足する

then  $\Phi := \Phi \cup \{(\mathbf{x}(\xi), \xi + F(h_\alpha), h_\alpha)\}$  とし、**Step 6**。

else  $n := n + 1$  とし **Step 2**。

**Step 6**  $\Phi$  の各要素について、第 2 成分が最大となるものに対応する第 1 成分が最適解。

FTSPA の妥当性は上記の議論より明らかであるが、**Step 1** における集合  $\Gamma(\cdot)$  の生成、およびアルゴリズム中のループは、 $h_\alpha$  が未知の状態では添字を確定的に分類できないために行う手続きである。

## 4 おわりに

今回、一モデルとして本定式化を紹介したが、多制約の場合の解法手続きに関しては、アルゴリズム中のループ回数が最悪の場合には添字集合の組合せ総数となり、満足のいく実行時間が得られない。したがって、問題の特徴を利用し、計算効率の面でより優れたアルゴリズムを検討する必要がある。

## 参考文献

- [1] G.B.Dantzig : Linear Programing under Uncertainty, Management Science, Vol.1 (1955).
- [2] 石井博昭 : 「講座数理計画法 10 , 数理計画法の応用<理論編>」伊理正夫, 今野浩編, 第一章確率論的最適化, 産業図書.
- [3] 田中英夫 : ファジィモデリングとその応用, 朝倉書店.
- [4] H.Ishii, et al. : An Algorithm for a Partially Chance-constrained E-model, Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.22 (1979).
- [5] 乾口雅弘 他 : 様相制約条件計画問題と種々のファジィ数理計画問題, システム制御情報学会論文誌, Vol.3 (1990).