

ESPACES PREHOMOGENES DE TYPE PARABOLIQUE

Hubert RUBENTHALER

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE

7, rue René Descartes

67084 STRASBOURG Cédex France

INTRODUCTION :

La théorie générale des espaces vectoriels préhomogènes, du moins en ce qui concerne ses applications à l'analyse, est due à M. Sato. Mis à part des résumés figurant dans des articles consacrés aux fonctions zêta associées ([12], [14], [16]), le premier exposé en langue occidentale est l'article de M. Sato et T. Kimura ([1]). Dans cet article, outre des résultats généraux qui vont être rappelés ci-dessous, figure la classification des espaces vectoriels préhomogènes irréductibles, réduits et réguliers.

Le travail qui suit aborde l'étude de certains espaces vectoriels préhomogènes qui interviennent de manière naturelle dans la structure des algèbres de Lie semi-simples complexes, il contient notamment les démonstrations des résultats annoncés dans la note [2] qui avaient été exposés lors d'une conférence au Colloque franco-japonais en octobre 1979 à Strasbourg.

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple complexe et soit \mathfrak{g}_i ($i \in \mathbb{Z}$) une \mathbb{Z} - graduation de \mathfrak{g} , c'est-à-dire une suite de sous-espaces vectoriels tels que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$. Soit G_0 le sous-groupe du groupe adjoint G de \mathfrak{g} correspondant à \mathfrak{g}_0 . L'action naturelle de G_0 sur \mathfrak{g}_1 (une telle représentation s'interprète toujours en termes de sous-groupes paraboliques, comme nous le ferons dans la suite) est préhomogène, c'est-à-dire qu'il existe une G_0 -orbite dans \mathfrak{g}_1 qui est un ouvert de Zariski. Ce premier résultat figurant dans [2] est en fait dû à E.B. Vinberg ([3]) ainsi que j'ai pu le déterminer grâce au travail de K. Pommerening ([4], [5]).

Par une démonstration différente de la mienne E.B. Vinberg démontre un résultat bien plus précis : \mathfrak{g}_1 se décompose en un nombre fini de G_0 -orbites.

Le plan de ce travail est le suivant :

Dans le paragraphe I , nous rappelons les principaux résultats concernant les espaces préhomogènes dont nous aurons besoin. Les démonstrations se trouvent dans [1] .

Dans le paragraphe II , nous étudions les espaces préhomogènes décrits ci-dessus. En particulier, nous démontrons l'équivalence, dans le cas irréductible, de la notion de régularité et l'existence de certains \mathfrak{sl}_2 -triplets. On y trouvera aussi la classification des espaces préhomogènes et réguliers de ce type. Un grand nombre de résultats de ce paragraphe ont été démontrés indépendamment et à peu près simultanément par V.G. Kac ([17]) . Certains résultats de ce paragraphe ont également été démontrés indépendamment par K. Pommerening ([4]) que je remercie de m'avoir communiqué une première version de son travail. (voir aussi [5]) .

Dans le paragraphe III , nous démontrons que dans le cas particulier où $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] = 0$ la fonction zêta locale associée à l'espace préhomogène s'interprète comme une intégrale d'entrelacement d'une série principale dégénérée de représentations du groupe G . On démontre également que dans ce cas, la grosse orbite de \mathfrak{g}_1 est un espace symétrique, c'est-à-dire que la sous-algèbre d'isotropie d'un point de la grosse orbite est l'ensemble des points fixes d'un automorphisme involutif de \mathfrak{g}_0 .

L'étude des formes réelles des espaces préhomogènes étudiés dans ce travail et des liens entre fonctions zêta locales et intégrales d'entrelacement dans un cadre plus général que celui du paragraphe III fera l'objet d'un travail ultérieur.

Je tiens à remercier Gérard Schiffmann, qui a dirigé ce travail, pour les nombreuses discussions concernant ce sujet et pour ses encouragements constants.

I. PROPRIETES GENERALES DES ESPACES PREHOMOGENES.

Les démonstrations des résultats figurant dans ce paragraphe se trouvent dans [1].

Soit H un groupe linéaire algébrique complexe et connexe. Soit ρ une représentation linéaire rationnelle de H dans un espace vectoriel V de dimension finie sur \mathbb{C} .

DEFINITION I.1. (Sato).

Le triplet (H, ρ, V) est un espace vectoriel préhomogène (en abrégé P.H.) s'il existe une orbite Zariski-ouverte $\Omega \subset V$. Les éléments de Ω sont appelés les éléments réguliers du P.H..

Remarque I.2.

a) Il est équivalent, dans la définition ci-dessus, d'exiger qu'il existe une orbite dense pour la topologie de Zariski.

b) On peut aussi montrer que la notion d'espace préhomogène est en fait une notion infinitésimale : si \mathfrak{h} désigne l'algèbre de Lie de H et si $d\rho$ désigne la représentation de \mathfrak{h} dérivée de ρ , alors dire que (H, ρ, V) est préhomogène est équivalent à dire qu'il existe $v \in V$ tel que l'application $X \rightarrow d\rho(X).v$ de \mathfrak{h} dans V soit surjective.

c) Par la suite, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur la représentation ρ , nous désignerons l'espace préhomogène par (H, V) et $\rho(g).v$ par $g.v$.

DEFINITION I.3.

Une fonction rationnelle f définie sur Ω est un invariant relatif s'il existe un caractère rationnel χ de H tel que

$$f(\rho(g).x) = \chi(g)f(x) \quad \forall x \in \Omega, \forall g \in H$$

Il est facile de voir que les invariants relatifs des P.H. sont définis à une constante multiplicative près par leur caractère et des exemples simples montrent qu'il existe des P.H. ne possédant pas d'invariant relatif non trivial.

Soit $d\chi$ le caractère de \mathfrak{h} dérivé de χ . Soit $x \in \Omega$; si f est un invariant relatif de caractère χ on désigne par $\varphi_f(x)$ l'élément $\frac{1}{f(x)}$ du dual de $V(df(x))$ est la différentielle de f en x). On a alors la

PROPOSITION I.4.

$$\langle \varphi_f(x), d\rho(A)x \rangle = d\chi(A) \quad \forall A \in \mathfrak{H} \quad \forall x \in \Omega.$$

DEFINITION I.5.

Un P.H. (H, V) est dit régulier s'il possède un invariant relatif f tel que l'application $\varphi_f : \Omega \rightarrow V^*$ soit dominante.

PROPOSITION I.6.

Supposons de plus que H soit réductif. Les conditions suivantes sont alors équivalentes :

- i) (H, V) est régulier.
- ii) Le sous-groupe d'isotropie H_x d'un élément $x \in \Omega$ est réductif.
- iii) $V - \Omega$ est une hypersurface.

II. ESPACES PREHOMOGENES DE TYPE PARABOLIQUE.

II.1. Notations. Sous-algèbres et sous-groupes paraboliques.

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple complexe, \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} et R le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Si $\alpha \in R$ nous désignerons par \mathfrak{g}^α l'espace radiciel correspondant à α et par H_α l'unique l'élément de $[\mathfrak{g}^{-\alpha}, \mathfrak{g}^\alpha]$ tel que $\alpha(H_\alpha) = 2$. Nous désignerons par R^+ (respectivement R^-) l'ensemble des racines positives (respectivement négatives) par rapport à une base ψ . Si θ est une partie de ψ , nous désignerons par $\langle \theta \rangle$ l'ensemble des racines qui sont combinaison linéaire d'éléments de θ . De plus on posera :

$$\langle \theta \rangle^+ = R^+ \cap \langle \theta \rangle \quad \text{et} \quad \langle \theta \rangle^- = R^- \cap \langle \theta \rangle.$$

Soit \mathfrak{h}_θ l'orthogonal de $\theta : \mathfrak{h}_\theta = \{X \in \mathfrak{h}, \alpha(X) = 0 \quad \forall \alpha \in \theta\}$.

Le centralisateur \mathfrak{l}_θ de \mathfrak{h}_θ dans \mathfrak{g} est

$$\mathfrak{l}_\theta = \mathfrak{h}_\theta \oplus \left(\sum_{\alpha \in \theta} \mathbb{C} \cdot H_\alpha + \sum_{\alpha \in \langle \theta \rangle} \mathfrak{g}^\alpha \right).$$

L'algèbre \mathfrak{l}_θ est réductive de centre \mathfrak{h}_θ et $[\mathfrak{l}_\theta, \mathfrak{l}_\theta] = \sum_{\alpha \in \theta} \mathbb{C} \cdot H_\alpha + \sum_{\alpha \in \langle \theta \rangle} \mathfrak{g}^\alpha$ est une algèbre de Lie semi-simple dont $\sum_{\alpha \in \theta} \mathbb{C} \cdot H_\alpha$ est une sous-algèbre de Cartan et θ est une base du système de racine de $[\mathfrak{l}_\theta, \mathfrak{l}_\theta]$ par rapport à cette sous-algèbre.

On remarquera également que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_\theta + \sum_{\alpha \in \theta} \mathbb{C} \cdot H_\alpha$, que \mathfrak{h}_θ et $[\mathfrak{l}_\theta, \mathfrak{l}_\theta]$ sont orthogonaux pour la forme de Killing B de \mathfrak{g} et que la restriction de B à \mathfrak{l}_θ est non dégénérée. On définit l'élément H_θ^θ de \mathfrak{h}_θ par les équations

$$\alpha(H_\theta^\theta) = 0 \quad \forall \alpha \in \theta$$

$$\alpha(H_\theta^\theta) = 2 \quad \forall \alpha \in \psi - \theta$$

Pour $p \in \mathbb{Z}$, on pose $d_p(\theta) = \{X \in \mathfrak{g}, [H_\theta^\theta, X] = 2pX\}$. On a alors

$$d_0(\theta) = \mathfrak{l}_\theta \quad \text{et} \quad [d_i(\theta), d_j(\theta)] \subset d_{i+j}(\theta) \quad i, j \in \mathbb{Z}.$$

Les sous-espaces $d_p(\theta)$ définissent donc une \mathbb{Z} -graduation de \mathfrak{g} . On définit les algèbres nilpotentes n_θ^+ et n_θ^- par

$$n_\theta^+ = \sum_{\alpha \in R^+ - \langle \theta \rangle^+} \mathfrak{g}^\alpha = \sum_{i \geq 1} d_i(\theta)$$

$$n_\theta^- = \sum_{\alpha \in R^- - \langle \theta \rangle^-} \mathfrak{g}^\alpha = \sum_{i \leq -1} d_i(\theta)$$

L'algèbre $\mathfrak{p}_\theta = \mathfrak{l}_\theta + n_\theta^+$ est une sous-algèbre parabolique (standard) de \mathfrak{g} .

Nous désignerons par G le groupe des automorphismes de \mathfrak{g} (le groupe-adjoint) et par L_θ le centralisateur de \mathfrak{h}_θ dans G . Soit $N_\theta^+ = \exp(n_\theta^+)$ et $N_\theta^- = \exp(n_\theta^-)$.

Le groupe $P_\theta = L_\theta \cdot N_\theta^+$ est un sous-groupe parabolique (standard) de G . On

posera aussi $P_\theta^- = L_\theta \cdot N_\theta^-$.

LEMME II.1.1.

Soit $C^k n_\theta^+$ le k^{eme} idéal de la suite centrale descendante de n_θ^+ . On a

$$C^k n_\theta^+ = \sum_{p \geq k} d_p(\theta) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

Démonstration :

Posons $D_k = \sum_{p \geq k} d_p(\theta)$. On a $D_1 = n_\theta^+ = C^1 n_\theta^+$ et $[D_\ell, D_m] \subset D_{\ell+m}$ pour ℓ et $m \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que $C^k n_\theta^+ \subset D_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Démontrons l'inclusion réciproque par récurrence sur k . Supposons que $D_i = C^i n_\theta^+$ pour $i \leq k$. On veut montrer que $D_{k+1} = C^{k+1} n_\theta^+ = [C^k n_\theta^+, C^1 n_\theta^+]$ qui est égal d'après l'hypothèse de récurrence à $[D_k, D_1]$. Il reste donc à montrer que $D_{k+1} \subset [D_k, D_1]$.

Soit α une racine positive. Posons $q_\theta(\alpha) = \frac{1}{2} \alpha(H_\theta)$, $q_\theta(\alpha)$ est la somme des coefficients des éléments de $\psi - \theta$ lorsqu'on écrit α dans la base ψ . Soit $X \in D_{k+1}$

$$X = \sum_{q_\theta(\alpha) \geq k+1} Z_\alpha \quad Z_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$$

Ecrivons chaque α sous la forme $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r$ où chaque α_i intervenant dans la somme est une racine simple et où chaque somme partielle $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ est une racine (cela est possible, [6] VI § 1 n° 6 prop. 19). On en déduit que $\alpha = \gamma + \alpha_\ell + \dots + \alpha_r$ où $\gamma = \sum_{i=1}^{\ell-1} \alpha_i$ et où α_ℓ est la racine de $\psi - \theta$ d'indice maximal intervenant dans la somme. Alors

$$Z_\alpha = [\dots [[Z_\gamma, Z_{\alpha_\ell}], Z_{\alpha_{\ell+1}}] \dots Z_{\alpha_r}] \quad \text{où } Z_{\alpha_i} \in \mathfrak{g}^{\alpha_i}.$$

Or $Z_\gamma \in D_k$, $Z_{\alpha_\ell} \in D_1$ et $Z_{\alpha_i} \in d_o(\theta)$ pour $i > \ell$. Donc

$$Z_\alpha \in [\dots [D_k, D_1], d_o(\theta), \dots, d_o(\theta)] \subset [D_k, D_1], \text{ d'où } X \in [D_k, D_1]$$

C.Q.F.D.

II. 2. Etude des espaces préhomogènes de type parabolique.

Le fait que les $d_p(\theta)$ forment une \mathbb{Z} -graduation de \mathfrak{g} implique qu'ils sont stables par l'action adjointe de L_θ .

THEOREME II.2.1. (E.B. Vinberg [3])

$d_1(\theta)$ se décompose en un nombre fini d'orbites sous l'action de L_θ . En particulier $(L_\theta, d_1(\theta))$ est un espace préhomogène.

DEFINITION II.2.2.

Dans la suite les espaces préhomogènes de la forme $(L_\theta, d_1(\theta))$ seront appelés espaces préhomogènes de type parabolique.

Remarque II.2.3.

Soit $j \in \mathbb{N}^*$, soit $\tilde{\mathfrak{g}} = \sum_{p \in j \cdot \mathbb{Z}} d_p(\theta)$. On voit facilement que $\tilde{\mathfrak{g}}$ est une algèbre de Lie réductive graduée par $\tilde{d}_k = d_{kj}(\theta)$, le théorème de Vinberg dit alors que $(L_\theta, \tilde{d}_1) = (L_\theta, d_j(\theta))$ est un espace préhomogène. Ceci permet de se restreindre à l'espace d'indice 1.

Commençons par déterminer à quelle condition la représentation $(L_\theta, d_1(\theta))$ est irréductible.

PROPOSITION II.2.4.

La représentation $(L_\theta, d_1(\theta))$ est irréductible si et seulement si P_θ est maximal (c'est-à-dire $\text{Card}(\Psi - \theta) = 1$).

Démonstration : L_θ étant connexe, il suffit de démontrer que la maximalité de P_θ est équivalente à l'irréductibilité de la représentation dérivée $(L_\theta, d_1(\theta))$. Supposons d'abord que P_θ soit non maximal ; on sait alors que $\Psi - \theta$ contient au moins deux racines distinctes β_1 et β_2 . Soient

$$\Delta_1 = \{\alpha \in R^+, \alpha = \beta_1 \text{ modulo } \langle \theta \rangle\}$$

$$\Delta_2 = \{\alpha \in R^+, \alpha = \beta_2 \text{ modulo } \langle \theta \rangle\} \text{ et soient}$$

$$V_1 = \sum_{\alpha \in \Delta_1} g^\alpha \quad \text{et} \quad V_2 = \sum_{\alpha \in \Delta_2} g^\alpha$$

Les sous-espaces V_1 et V_2 sont des sous-espaces non triviaux et \mathfrak{h}_θ -stables de $d_1(\theta)$, donc $(\mathfrak{h}_\theta, d_1(\theta))$ n'est pas irréductible. Inversement, supposons P_θ maximal. Soit β l'unique élément de $\psi - \theta$ et soit X_β un élément non nul de g^β . Si $\alpha \in \langle \theta \rangle^-$, $[X_\alpha, X_\beta] = 0$; X_β est donc un élément primitif du \mathfrak{h}_θ -module $d_1(\theta)$ (relativement à une sous-algèbre de Borel "opposée" de celle que l'on considère habituellement). Soit $\Delta = \{\alpha \in R^+, \alpha = \beta \text{ modulo } \langle \theta \rangle\}$. On remarquera que $d_1(\theta) = \sum_{\alpha \in \Delta} g^\alpha$. Si $\alpha \in \Delta$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p + \beta + \alpha_{p+1} + \dots + \alpha_l$ où les $\alpha_i \in \theta$ et où chaque somme partielle est une racine. Soit $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p$. Donc $\alpha = \beta + \gamma + \alpha_{p+1} + \dots + \alpha_l$, chaque somme partielle étant une racine. On en déduit que $X_\alpha = [X_\alpha, [X_\alpha, \dots, [X_\alpha, [X_\gamma, X_\beta] \dots]]$ où les X_{α_i} sont des éléments non nuls de g^{α_i} . On en déduit que \mathfrak{h}_θ -module $d_1(\theta)$ est engendré par le vecteur primitif X_β . Il est donc irréductible (voir par exemple [7]).

C.Q.F.D.

Nous allons à présent décomposer les représentations $(L_\theta, d_1(\theta))$. Nous identifierons toute partie de ψ à un sous-graphe du graphe de Dynkin de ψ . Il est alors possible de parler des composantes connexes d'une telle partie. Si $\alpha \in \psi - \theta$, on notera ψ_α la composante connexe de $\theta \cup \{\alpha\}$ contenant α . Soit $\theta_\alpha = \psi_\alpha - \{\alpha\}$. Soit $\mathfrak{h}_{\theta_\alpha} = \sum_{\gamma \in \psi_\alpha} c_\gamma H_\gamma + \sum_{\gamma \in \langle \theta_\alpha \rangle} g^\gamma$. Soient

$$m_{\theta_\alpha}^+ = \sum_{\gamma \in \langle \psi_\alpha \rangle^+ - \langle \theta_\alpha \rangle^+} g^\gamma; \quad n_{\theta_\alpha}^- = \sum_{\gamma \in \langle \psi_\alpha \rangle^- - \langle \theta_\alpha \rangle^-} g^\gamma$$

On pose $d_1(\theta_\alpha) = d_1(\theta) \cap n_{\theta_\alpha}^+$ et on définit l'élément $H_\alpha^\theta \in \sum_{\gamma \in \psi_\alpha} c_\gamma H_\gamma$ par les équations : $\alpha(H_\alpha^\theta) = 2$, $\gamma(H_\alpha^\theta) = 0$ si $\gamma \in \theta_\alpha$. Il est évident que $d_1(\theta_\alpha) = \{X \in n_{\theta_\alpha}^+, [H_\alpha^\theta, X] = 2X\}$.

PROPOSITION II.2.5.

a) $\mathfrak{g}(\alpha) = \mathfrak{n}_{\alpha}^{-} + \mathfrak{h}_{\alpha} + \mathfrak{n}_{\alpha}^{+}$ est une algèbre de Lie simple de graphe de Dynkin Ψ_{α} .

b) $\mathfrak{p}(\alpha) = \mathfrak{h}_{\alpha} + \mathfrak{n}_{\alpha}^{+}$ est une sous-algèbre parabolique maximale de $\mathfrak{g}(\alpha)$.

c) Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_n$ la décomposition de \mathfrak{g} en idéaux simples et soit $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_n$ la décomposition correspondante de R . Soit I l'ensemble des indices i tels que $R_i \cap (\Psi - \theta) = \emptyset$. On a alors

$$\mathfrak{h}_{\theta} = \sum_{i \in I} \mathfrak{g}_i + \sum_{\alpha \in \Psi - \theta} \mathfrak{h}_{\theta_{\alpha}} \quad (\text{la somme des } \mathfrak{h}_{\theta_{\alpha}} \text{ n'est pas directe}).$$

d) $d_1(\theta) = \sum_{\alpha \in \Psi - \theta} d_1(\theta_{\alpha})$ (somme directe) et chaque $d_1(\theta_{\alpha})$ est \mathfrak{h}_{θ} -stable et irréductible sous l'action de $\mathfrak{h}_{\theta_{\alpha}}$ (donc a fortiori irréductible sous l'action de \mathfrak{h}_{θ}).

e) Les éléments H_{α}^{θ} ($\alpha \in \Psi - \theta$) forment une base de \mathfrak{h}_{θ} .

Démonstration :

a) Ψ_{α} est connexe, donc la sous-algèbre associée à Ψ_{α} est simple.

b) $\mathfrak{p}(\alpha)$ est la sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}(\alpha)$ obtenue en "otant" l'unique racine α , elle est donc maximale.

c) l'inclusion $\sum_{i \in I} \mathfrak{g}_i + \sum_{\alpha \in \Psi - \theta} \mathfrak{h}_{\theta_{\alpha}} \subset \mathfrak{h}_{\theta}$ étant évidente, il suffit de montrer l'inclusion inverse. Comme on a : $\mathfrak{h} \subset \sum_{i \in I} \mathfrak{g}_i + \sum_{\alpha \in \Psi - \theta} \mathfrak{h}_{\theta_{\alpha}}$, cette dernière résulte du fait que $\theta = \sum_{i \in I} R_i \cup (\cup_{\alpha \in \Psi - \theta} \theta_{\alpha})$.

d) $d_1(\theta) = \sum \mathfrak{g}^{\gamma}$ où γ est de la forme $\gamma = \sum_{\beta_i \in \theta} m_i \beta_i + \alpha$ avec $\alpha \in \Psi - \theta$.

L'ensemble des racines simples intervenant dans la décomposition de γ étant connexe ([6] chap. VI § 1 n° 6 corollaire 3), on en déduit que $\gamma \in \theta_{\alpha}$.

Donc $d_1(\theta) = \sum d_1(\theta_{\alpha})$. Il est clair que $d_1(\theta_{\alpha})$ est \mathfrak{h}_{θ} -stable.

C'est un $\mathfrak{h}_{\theta_{\alpha}}$ -module irréductible d'après la proposition II.2.4.

e) Remarquons d'abord que $H_{\alpha}^{\theta} \in \mathfrak{h}_{\theta}$ ($\alpha \in \Psi - \theta$) : il faut montrer que $\beta(H_{\alpha}^{\theta}) = 0$ pour tout $\beta \in \theta - \theta_{\alpha}$. Vu la définition de Ψ_{α} , deux racines $\beta \in \theta - \theta_{\alpha}$ et $\gamma \in \Psi_{\alpha}$ n'appartiennent pas à la même composante connexe de

$\theta \cup \{\alpha\}$, on en déduit que $\beta(H_\gamma) = 0$. Comme $H_\alpha^\theta = \sum_{\gamma \in \psi_\alpha} c_\gamma H_\gamma$ on a bien $H_\alpha^\theta \subset \mathfrak{h}_\theta$.

D'autre part, on a $\dim \mathfrak{h}_\theta = \text{Card}(\psi - \theta)$. Pour démontrer e) il suffit donc de démontrer que les éléments H_α^θ sont linéairement indépendants. Soit R_α le système de racines engendré par ψ_α . Les H_γ , $\gamma \in \psi_\alpha$ forment une base de système de racines inverse R_α^\vee . Puisque $\gamma(H_\alpha^\theta) \geq 0$ pour tout $\gamma \in \psi_\alpha$, on en déduit que H_α^θ appartient à l'adhérence de la chambre de Weyl C_α^\vee de R_α^\vee définie par ψ_α . On sait ([6], chap. VI § 1 n° 6, page 156) qu'une chambre est composée d'éléments positifs par rapport à la base. D'où :

$$H_\alpha^\theta = \sum_{\gamma \in \psi_\alpha} c_\gamma H_\gamma \text{ avec } c_\gamma \geq 0 \quad \forall \gamma \in \psi_\alpha$$

D'autre part : $2 = \alpha(H_\alpha^\theta) = \sum_{\gamma \in \psi_\alpha} c_\gamma \alpha(H_\gamma)$ et $\alpha(H_\gamma) \leq 0$ si $\gamma \neq \alpha$, on en déduit que $c_\alpha > 0$. Supposons à présent qu'il existe une combinaison linéaire des H_α^θ qui soit nulle :

$$\sum_{\alpha \in \psi - \theta} \mu_\alpha H_\alpha^\theta = 0 = \sum_{\alpha \in \psi - \theta} \mu_\alpha c_\alpha H_\alpha \text{ mod. } \left(\sum_{\gamma \in \theta} c_\gamma H_\gamma \right)$$

d'où $\mu_\alpha c_\alpha = 0 \quad \forall \alpha \in \psi - \theta$ et enfin $\mu_\alpha = 0$ car $c_\alpha > 0$.

C.Q.F.D.

Remarque II.2.6.

Soit L_{θ_α} le sous-groupe de L_θ correspondant à L_{θ_α} . La proposition précédente montre que l'espace préhomogène $(L_\theta, d_1(\theta))$ se décompose en "sous-espaces préhomogènes" irréductibles $(L_{\theta_\alpha}, d_1(\theta_\alpha))$. Soient Ω et Ω_α les orbites Zariski-ouvertes associées. Il est facile de voir que Ω_α est la projection de Ω sur $d_1(\theta_\alpha)$ suivant la décomposition en somme directe $d_1(\theta) = \sum_{\alpha \in \psi - \theta} d_1(\theta_\alpha)$. Des exemples simples montrent qu'en général Ω n'est pas la somme directe des Ω_α . Il se peut de plus qu'aucune des espaces $(L_{\theta_\alpha}, d_1(\theta_\alpha))$ ne soit régulier alors que $(L_\theta, d_1(\theta))$ l'est. Par contre, si chaque espace préhomogène $(L_{\theta_\alpha}, d_1(\theta_\alpha))$ est régulier, $(L_\theta, d_1(\theta))$ l'est également et $\Omega = \sum_{\alpha \in \psi - \theta} \Omega_\alpha$. Cela résultera de ce qui suit.

Soit $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_p$ une partition de $\psi-\theta$. Soit $D^i(\theta) = \sum_{\alpha \in \Gamma_i} d_1(\theta_\alpha)$. Soit $\mathfrak{L}_\theta^i = \sum_{\alpha \in \Gamma_i} \mathfrak{L}_{\theta_\alpha}$ et soit L_θ^i le sous-groupe de L_θ correspondant à \mathfrak{L}_θ^i . On a évidemment la somme directe : $d_1(\theta) = \sum_{i=1}^p D^i(\theta)$. Soit Ω_i la grosse orbite de l'espace préhomogène (L_θ^i, D_θ^i) et Ω celle de $(L_\theta, d_1(\theta))$.

PROPOSITION II.2.7.

Supposons que pour tout $i = 1, \dots, p, (L_\theta^i, D_\theta^i)$ soit un espace préhomogène régulier. Alors $(L_\theta, d_1(\theta))$ est régulier et $\Omega = \sum_{i=1}^p \Omega_i$.

Démonstration : Il est facile de voir que la grosse orbite de (L_θ^i, D_θ^i) est la même que celle de $(L_\theta, D^i(\theta))$. La proposition résulte alors immédiatement du

LEMME II.2.8.

Soit G un groupe algébrique réductif connexe et soit (G, V) un espace préhomogène. Supposons que $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$ où chaque V_i est un sous-espace G -invariant tel que (G, V_i) soit un espace préhomogène régulier. Soient Ω et Ω_i les grosses orbites de (G, V) et (G, V_i) respectivement. Alors (G, V) est régulier et $\Omega = \sum_{i=1}^n \Omega_i$. De plus, tout invariant relatif de (G, V) est un produit d'invariants relatifs des espaces (G, V_i) .

Démonstration du lemme : Soient f_i ($i = 1, \dots, n$) des invariants relatifs polynômes de (G, V_i) tels que $\varphi_i = df_i/f_i$ soit une application dominante. Soit f l'invariant relatif de (G, V) défini par $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$. On a $\varphi(x_1, \dots, x_n) = df(x_1, \dots, x_n)/f(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \oplus \dots \oplus \varphi_n(x_n)$. Puisque $x_i \mapsto \varphi_i(x_i)$ est dominante de Ω_i dans V_i^* , φ est dominante de $\Omega_1 \oplus \dots \oplus \Omega_n$ dans $V_1^* \oplus V_2^* \oplus \dots \oplus V_n^* = V$, donc (G, V) est régulier. D'autre part, $\det d\varphi(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \det d\varphi_i(x_i)$ et d'après [1] (p. 63) on a, si H_f désigne le Hessien de $f : H_f(x) = c \cdot \det d\varphi(x) \cdot f(x)^k$ ($k = \dim V$). Il ressort d'autre part de la démonstration du Corollaire 23 p. 70 de [1] (où on a corrigé une petite erreur) que $\Omega = \{x \mid H_f(x) \cdot f(x) \neq 0\}$. On en déduit que $\Omega_1 \oplus \dots \oplus \Omega_n \subset \Omega$, l'inclusion inverse est évidente. D'après la proposition I.6.

$V_i - \Omega_i$ est une hypersurface définie par une équation $P_i = 0$. Ce qui précède implique alors que l'équation de $V - \Omega$ est

$$P(x_1, \dots, x_n) = P_1(x_1)P_2(x_2) \dots P_n(x_n) = 0.$$

La dernière assertion du lemme résulte alors du fait que les invariants relatifs de (G, V) sont des produits de puissances des composantes irréductibles de P (voir [1])

C.Q.F.D.

Rappelons qu'un \mathfrak{sl}_2 -triplet dans \mathfrak{g} est un triplet $(y_o, h_o, x_o) \neq (0, 0, 0)$ d'éléments de \mathfrak{g} tels que $[h_o, x_o] = 2x_o$, $[h_o, y_o] = -2y_o$ et $[y_o, x_o] = h_o$. Pour les résultats généraux concernant les \mathfrak{sl}_2 -triplets, on pourra voir [8], [9] et [11]. Pour $p \in \mathbb{Z}$ on pose $\mathfrak{g}_p = \{X \in \mathfrak{g}, [h_o, X] = pX\}$. On a donc $x_o \in \mathfrak{g}_2$ et $y_o \in \mathfrak{g}_{-2}$. Soit G^{h_o} le centralisateur de h_o dans G . G^{h_o} est un groupe linéaire algébrique connexe et réductif qui stabilise chacun des espaces \mathfrak{g}_p . Soit $\hat{\mathfrak{g}}_2$ l'ensemble des $x \in \mathfrak{g}_2$ tels qu'il existe un \mathfrak{sl}_2 -triplet de la forme (y, h_o, x) . B. Kostant a démontré dans [8] que $\hat{\mathfrak{g}}_2$ est une G^{h_o} -orbite Zariski-ouverte dans \mathfrak{g}_2 , c'est-à-dire que $(G^{h_o}, \hat{\mathfrak{g}}_2)$ est un espace préhomogène.

PROPOSITION II.2.9.

$(G^{h_o}, \hat{\mathfrak{g}}_2)$ est un espace préhomogène régulier.

Démonstration : G^{h_o} étant un groupe réductif, il suffit d'après la proposition I.6 de démontrer que le sous-groupe d'isotropie d'un point de la grosse orbite est réductif. Il nous faut donc démontrer que $G^{h_o} \cap G^{x_o}$ (où G^{x_o} désigne le centralisateur de x_o dans G) est réductif. Démontrons d'abord que la sous-algèbre d'isotropie $\mathfrak{g}^{h_o} \cap \mathfrak{g}^{x_o}$ (où \mathfrak{g}^{h_o} et \mathfrak{g}^{x_o} désignent respectivement les centralisateurs de h_o et de x_o dans \mathfrak{g}) est réductive dans \mathfrak{g} . Soit $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ la sous-algèbre engendrée par le \mathfrak{sl}_2 -triplet (y_o, h_o, x_o) . Soit π la représentation de $SL(2, \mathbb{C})$ dans $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ compatible avec la structure de \mathfrak{A} -module de \mathfrak{g} ([9], chap VIII § 1 n° 4 Th. 2). On a :

$$x \in \mathfrak{g}^{h_0} \cap \mathfrak{g}^{x_0} \Leftrightarrow [X, X] = 0 \Leftrightarrow \pi(g)X = X \quad \forall g \in SL(2, \mathbb{C}) .$$

On utilise alors le lemme suivant :

LEMME II.2.10. ([9] , chap. 7 § 1 n° 5 Prop. 14)

Soit Γ un groupe, π une représentation semi-simple de Γ dans $\text{Aut}(\mathfrak{g})$.

Alors la sous-algèbre $\mathfrak{m} = \{X, \pi(\Gamma)X = X\}$ est réductive dans \mathfrak{g} .

On en déduit que $\mathfrak{g}^{h_0} \cap \mathfrak{g}^{x_0}$ est réductive dans \mathfrak{g} . Le fait que $\mathfrak{g}^{x_0} \cap \mathfrak{g}^{h_0}$ soit inclus dans $GL(\mathfrak{g})$ implique alors par des techniques classiques ([10] exposé 20) que $\mathfrak{g}^{h_0} \cap \mathfrak{g}^{x_0}$ est réductif.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE II.2.11.

Soit (y_0, h_0, x_0) un \mathfrak{sl}_2 -triplet dans \mathfrak{g} . Soient \mathfrak{g}_2 et $\hat{\mathfrak{g}}_2$ définis comme précédemment. Alors $\mathfrak{g}_2 - \hat{\mathfrak{g}}_2$ est une hypersurface.

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de la proposition I.6.

C.Q.F.D.

Remarque II.2.12. On peut expliciter un invariant relatif de l'espace préhomogène $(\mathfrak{g}^{h_0}, \mathfrak{g}_2)$. On définit $\hat{\mathfrak{g}}_{-2}$ de la même manière que $\hat{\mathfrak{g}}_2$. Soit φ l'isomorphisme algébrique entre $\hat{\mathfrak{g}}_2$ et $\hat{\mathfrak{g}}_{-2}$ défini par le fait que $(\varphi(x), h_0, x)$ soit un \mathfrak{sl}_2 -triplet (φ est un isomorphisme car un \mathfrak{sl}_2 -triplet est entièrement déterminé par les deux premiers ou les deux derniers éléments du triplet) . Soit $g \in \mathfrak{g}^{h_0}$, on a $[g\varphi(x), gx] = g[\varphi(x), x] = g \cdot h_0 = h_0$; on en déduit que $\varphi(gx) = g\varphi(x)$. En prenant la différentielle des deux membres, on obtient $g d\varphi(x) = d\varphi(gx) \cdot g$. D'où

$$\det d\varphi(gx) = \det(g|_{\hat{\mathfrak{g}}_2})^{-2} \det d\varphi(x)$$

(\det désigne le déterminant). $\det d\varphi(x)$ est donc un invariant relatif de caractère $\det(g|_{\hat{\mathfrak{g}}_2})^2$. L'existence d'un invariant relatif ayant ce caractère était connue ([1]) .

On sait ([8], [9], [11]) que si (y, h, x) est un sl_2 -triplet dans \mathfrak{g} , il existe un sl_2 -triplet (y_0, h_0, x_0) conjugué du premier par un élément de G tel que $h_0 \in \mathfrak{h}$ et tel que $\alpha(h_0) = 0, 1$ ou 2 pour toute racine appartenant à ψ . Considérons l'ensemble des sl_2 -triplets (y, h, x) tels que $\alpha(h) = 0$ ou 2 ($\alpha \in \psi$). On peut montrer que de tels sl_2 -triplets sont caractérisés par le fait que $\dim \mathfrak{g}^h = \dim \mathfrak{g}^x$.

DEFINITION II.2.13.

Un sl_2 -triplet tel que $\dim \mathfrak{g}^h = \dim \mathfrak{g}^x$ sera appelé quasi-principal. (Kostant appelle principaux les sl_2 -triplets vérifiant $\dim \mathfrak{g}^h = \dim \mathfrak{g}^x = \dim \mathfrak{h} =$ dimension minimale des centralisateurs).

Soit (y_0, h_0, x_0) un sl_2 -triplet quasi-principal tel que $h_0 \in \mathfrak{h}$ et $\alpha(h_0) = 0$ ou 2 pour tout $\alpha \in \psi$. Soit $\theta = \{\alpha \in \psi; \alpha(h_0) = 0\}$. Alors il est facile de voir que $L_\theta = G^{h_0}$ et $H_\theta = h_0$. Nous dirons que dans ce cas l'espace préhomogène de type parabolique $(L_\theta, d_1(\theta))$ est associé au sl_2 -triplet (y_0, h_0, x_0) . Un tel espace préhomogène est régulier d'après la proposition II.2.9. Il est faux en général que tout espace préhomogène régulier de type parabolique soit associé à un sl_2 -triplet quasi-principal. Ce résultat est néanmoins vrai dans le cas irréductible, ce sera une conséquence du théorème suivant. Soit θ une partie quelconque de ψ . Il est évident que la restriction de la forme de Killing B de \mathfrak{g} à $d_{-1}(\theta) \times d_1(\theta)$ est non dégénérée. Cela permet d'identifier le dual de $d_1(\theta)$ à $d_{-1}(\theta)$. Soit Ω la grosse orbite de $d_1(\theta)$. Si f est un invariant relatif de $(L_\theta, d_1(\theta))$ alors la différentielle $df(x)$ de f en $x \in \Omega$ sera considérée comme un élément de $d_{-1}(\theta)$. Soit alors $\varphi_f(x) = df(x)/f(x) \in d_{-1}(\theta)$.

THEOREME II.2.14.

Supposons que l'espace préhomogène $(L_\theta, d_1(\theta))$ soit irréductible et admette un invariant relatif f de degré $n \neq 0$. Alors $(-\frac{B(H_\theta^\theta, H_\theta^\theta)}{2n} \varphi_f(x), H_\theta^\theta, x)$ est un sl_2 -triplet dans \mathfrak{g} pour tout $x \in \Omega$.

Démonstration : L'irréductibilité est équivalente au fait que \mathfrak{p}_θ soit maximale

(Prop. II.2.4) et implique donc que le centre \mathfrak{h}_θ de \mathfrak{l}_θ est de dimension

1 : $\mathfrak{h}_\theta = \mathbb{C} \cdot H_\theta^\theta$. Par définition de H_θ^θ on a $[H_\theta^\theta, x] = 2x$ et

$[H_\theta^\theta, \varphi_f(x)] = -2\varphi_f(x)$. Il suffit donc de démontrer que

$$\left[-\frac{B(H_\theta^\theta, H_\theta^\theta)}{2n} \varphi_f(x), x \right] = H_\theta^\theta \quad \forall x \in \Omega.$$

Soit χ le caractère de f , on a d'après la proposition I.4 :

$$B(\varphi_f(x), [A, x]) = d\chi(A) \quad \forall A \in \mathfrak{l}_\theta \quad \forall x \in \Omega.$$

Par invariance de B on obtient

$$-B([\varphi_f(x), x], A) = d\chi(A).$$

Comme la restriction de B à \mathfrak{l}_θ est non dégénérée et comme $d\chi([\mathfrak{l}_\theta, \mathfrak{l}_\theta]) = 0$

(une algèbre semi-simple n'a pas de caractères non triviaux), on en déduit

que $[\varphi_f(x), x]$ est un vecteur fixe orthogonal à $[\mathfrak{l}_\theta, \mathfrak{l}_\theta]$. Donc

$[\varphi_f(x), x] = c \cdot H_\theta^\theta$ ($c \in \mathbb{C}$). On a :

$$-B([\varphi_f(x), x], H_\theta^\theta) = d\chi(H_\theta^\theta) = -c B(H_\theta^\theta, H_\theta^\theta) = B(\varphi_f(x), [H_\theta^\theta, x])$$

$$= 2B(\varphi_f(x), x) = 2n \quad (\text{la dernière égalité résultant de l'identité$$

d'Euler pour les fonctions homogènes de degré n). D'où $c = -\frac{2n}{B(H_\theta^\theta, H_\theta^\theta)}$.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE II.2.15.

Supposons que $(L_\theta, d_1(\theta))$ soit irréductible. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.

- i) Il existe un invariant relatif non trivial.
- ii) $(L_\theta, d_1(\theta))$ est régulier.
- iii) H_θ^θ est l'élément semi-simple d'un \mathfrak{sl}_2 -triplet.

Démonstration :

i) \Rightarrow iii) : c'est le théorème précédent

iii) \Rightarrow ii) : c'est la proposition II.2.9.

ii) \Rightarrow i) : toujours vrai, par définition de la régularité (voir § 1) .

C.Q.F.D.

La proposition suivante caractérise en termes d'invariant relatif les espaces préhomogènes de type parabolique associés aux sl_2 -triplets quasi-principaux.

PROPOSITION II.2.16.

L'espace préhomogène $(L_\theta, d_1(\theta))$ est associé à un sl_2 -triplet quasi-principal si et seulement si pour tout $p \geq 1$ le caractère $\chi_p(g) = \det(\text{Ad}_g|_{d_p(\theta)})^2$ est le caractère d'un invariant relatif.

Démonstration : Soit (y_0, h_0, x_0) un sl_2 -triplet tel que $\alpha(h_0) = 0$ ou 2 pour tout $\alpha \in \psi$. Soit $\theta = \{\alpha \in \psi, \alpha(h_0) = 0\}$. On construit la sous-algèbre parabolique associée à θ , ainsi que les espaces $d_p(\theta)$. D'après [9] (chap.8 § 1 n° 2), l'application $(\text{ad } x_0)^{2p} : d_{-p}(\theta) \rightarrow d_p(\theta)$ est un isomorphisme. D'autre part $\text{ad}(g.x_0)^{2p} = g \text{ad}(x_0)^{2p} g^{-1}$ lorsque $g \in L_\theta$. Les deux assertions ci-dessus sont encore vraies lorsque x est un élément régulier de $d_1(\theta)$ puisque d'après Kostant ([8]) les éléments réguliers sont exactement ceux qui entrent dans la composition d'un sl_2 -triplet (y, h_0, x) . On en déduit que si x est régulier $\det(\text{ad } x)^{2p}|_{d_{-p}(\theta)}$ est non nul et vérifie

$$\det((\text{ad}(gx))^{2p}|_{d_{-p}(\theta)}) = \det(g|_{d_p(\theta)})^2 \det((\text{ad } x)^{2p}|_{d_{-p}(\theta)}) ,$$

donc $\det((\text{ad } x)^{2p}|_{d_{-p}(\theta)})$ est un invariant relatif de caractère χ_p .

Inversement, soit $(L_\theta, d_1(\theta))$ un espace préhomogène de type parabolique tel que pour tout $p \geq 1$, χ_p soit le caractère d'un invariant relatif. Il

en est donc de même pour $\chi = \prod_{p \geq 1} \chi_p^{2p}$. Soit f l'invariant relatif de

caractère χ . Comme précédemment, on désigne par $\varphi_f(x)$ l'élément

$df(x)/f(x)$ de $d_{-1}(\theta)$. Comme dans la démonstration du théorème II.2.14

on démontre que $[\varphi_f(x), x] = h_f$ est un vecteur fixe de \mathfrak{h}_θ . D'autre part,

pour $A \in \mathfrak{k}_\theta$ on a :

$$\begin{aligned}
d\chi(A) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\chi(\exp tA) - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\prod_{p \geq 1} \chi_p^{2p}(\exp tA) - 1}{t} \\
&= \sum_{p \geq 1} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\chi_p^{2p}(\exp tA) - 1}{t} = \sum_{p \geq 1} 2p \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det^2(\exp(t \operatorname{ad} A) |_{d_p(\theta)})^{-1}}{t} \\
&= \sum_{p \geq 1} 4p \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} A |_{d_p(\theta)}) = 2 \sum_{p \geq 1} \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} H_0^\theta \operatorname{ad} A |_{d_p(\theta)}) \\
&= 2 \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} H_0^\theta \operatorname{ad} A |_{n_\theta^+}) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} H_0^\theta \operatorname{ad} A |_{n_\theta^- + n_\theta^+}) \\
&= \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} H_0^\theta \operatorname{ad} A) \quad (\text{car } \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} H_0^\theta \operatorname{ad} A |_{\mathfrak{k}_\theta}) = 0) \\
&= B(H_0^\theta, A)
\end{aligned}$$

Donc $d\chi(A) = -B(h_f, A) = B(H_0^\theta, A)$, d'où $h_f = -H_0^\theta$.
 $(-\varphi_f(x), H_0^\theta, x)$ est alors un \mathfrak{sl}_2 -triplet.

C.Q.F.D.

PROPOSITION II.2.17.

Les notations sont celles de la proposition II.2.5. Soit $(L_\theta, d_1(\theta))$ un espace préhomogène de type parabolique tel que pour tout $\alpha \in \psi - \theta$, $(L_{\theta_\alpha}, d_1(\theta_\alpha))$ soit régulier. Alors $(L_\theta, d_1(\theta))$ est associé à un \mathfrak{sl}_2 -triplet quasi-principal.

Démonstration : Les espaces $(L_{\theta_\alpha}, d_1(\theta_\alpha))$ sont irréductibles réguliers. D'après le théorème II.2.14 ils sont associés à des \mathfrak{sl}_2 -triplets quasi-principaux $(Y_\alpha, H_\alpha^\theta, X_\alpha)$ de $\mathfrak{g}(\alpha)$. D'après la proposition II.2.5 e) il existe des nombres complexes a_α tels que $H_0^\theta = \sum_{\alpha \in \psi - \theta} a_\alpha H_\alpha^\theta$. Soit alors $X = \sum_{\alpha \in \psi - \theta} b_\alpha X_\alpha$ et $Y = \sum_{\alpha \in \psi - \theta} c_\alpha Y_\alpha$, les nombres b_α et c_α étant choisis de sorte que

$$b_\alpha c_\alpha = a_\alpha \text{ pour tout } \alpha \in \psi-\theta. \text{ On a } [H_0^\theta, X] = 2X, [H_0^\theta, Y] = -2Y \text{ et } [Y, X] =$$

$$\left[\sum_{\alpha \in \psi-\theta} c_\alpha Y, \sum_{\alpha \in \psi-\theta} b_\alpha X \right] = \sum_{\alpha \in \psi-\theta} b_\alpha c_\alpha H_0^\theta = H_0^\theta$$

Donc (Y, H_0^θ, X) est un \mathfrak{sl}_2 -triplet.

C.Q.F.D.

II.3. Classification des espaces préhomogènes de type parabolique irréductibles et réguliers.

Nous avons vu qu'un tel espace préhomogène est irréductible si et seulement si $\text{Card}(\psi-\theta) = 1$. Dans ce cas, nous appellerons racine isolée l'unique racine de $\psi-\theta$. Il est d'autre part évident que $(L_\theta, d_1(\theta))$ est régulier si et seulement si $(L_\theta, d_{-1}(\theta))$ est régulier (l'un est le dual de l'autre). Le poids dominant de $(L_\theta, d_{-1}(\theta))$ est $-\overline{\alpha_0}$, où α_0 est la racine isolée et où $\overline{\alpha_0}$ désigne la restriction de α_0 à $\sum_{\gamma \in \theta} \mathbb{C} \cdot H_\gamma$ qui est une sous-algèbre de Cartan de $[\mathfrak{k}_\theta, \mathfrak{k}_\theta]$. Le calcul de ce poids dominant comme combinaison linéaire de poids fondamentaux est aisé à partir du graphe de Dynkin de \mathfrak{g} . On procède comme suit. Soient w_α ($\alpha \in \theta$) les poids fondamentaux de $[\mathfrak{k}_\theta, \mathfrak{k}_\theta]$: ce sont les éléments de la base duale des H_α ($\alpha \in \theta$). Soient α_i ($i = 1, 2$ ou 3) les racines de θ reliées à α_0 , c'est-à-dire telles qu'il existe une arête entre α_0 et α_i . On a $-\overline{\alpha_0} = \sum c_{\alpha_i} w_{\alpha_i}$ et $c_{\alpha_i} = -\alpha_0(H_{\alpha_i})$. Rappelons comment on calcule $\alpha_0(H_{\alpha_i})$ à partir du graphe de Dynkin :

. si α_0 et α_i sont reliées par au moins une arête et si

$$\|\alpha_0\| \leq \|\alpha_i\| \text{ on a } \alpha_0(H_{\alpha_i}) = -1,$$

. si α_0 et α_i sont reliées par j arêtes ($0 \leq j \leq 3$) et si

$$\|\alpha_0\| > \|\alpha_i\| \text{ on a } \alpha_0(H_{\alpha_i}) = -j.$$

Le nombre de composantes connexes de θ est égal au nombre des α_i . Soit θ_i la composante connexe de θ contenant α_i et soit L_{θ_i} un groupe complexe simple dont le système de racines est de type θ_i et tel que la représentation

de poids dominant $-\alpha_0(H_{\alpha_i})\omega_{\alpha_i}$ se remonte sur L_{θ_i} . Alors L_{θ} est localement isomorphe à $GL(1, \mathbb{C}) \times \prod_i L_{\theta_i}$ et l'action adjointe de L_{θ} sur $d_{-1}(\theta)$ est isomorphe à la représentation $\square \otimes (\otimes -\alpha_0(H_{\alpha_i})\omega_{\alpha_i})$ où \square désigne l'action de $GL(1, \mathbb{C})$ sur \mathbb{C} (homothéties).

La table suivante donne la liste complète des espaces préhomogènes $(L_{\theta}, d_{-1}(\theta))$ réguliers et irréductibles. Dans la première colonne de cette table figure le graphe de Dynkin de \mathfrak{g} , la racine isolée α_0 est entourée d'un cercle. Dans la deuxième colonne figure le groupe L_{θ} à isomorphisme local près ainsi que son graphe de Dynkin. Dans la troisième colonne figure la représentation en termes de poids fondamentaux ainsi qu'entre parenthèses, le numéro qui lui correspond dans la classification de Sato-Kimura ([1], § 7 table I p. 144). Il se peut que ces auteurs aient classifié la représentation contragrédiente. Cette table a été obtenue de la manière suivante. D'après le corollaire II.2.15. il suffit de classifier les \mathfrak{sl}_2 -triplets dont l'élément simple h vérifie $\alpha(h) = 0 \ \forall \alpha \neq \alpha_0$ et $\alpha_0(h) = 2$ pour une racine α_0 de Ψ . Tout \mathfrak{sl}_2 -triplet étant conjugué à un \mathfrak{sl}_2 -triplet dont l'élément semi-simple appartient à \mathfrak{h} et vérifie $\alpha(h) = 0, 1$ ou 2 pour tout $\alpha \in \Psi$, la classe de conjugaison d'un \mathfrak{sl}_2 -triplet peut donc être représentée par un "graphe de Dynkin à poids" où chaque sommet α est muni du poids $\alpha(h) = 0, 1$ ou 2 . N'importe quel graphe de Dynkin à poids ne correspond évidemment pas à un \mathfrak{sl}_2 -triplet. Les espaces préhomogènes de type parabolique réguliers et irréductibles sont donc classifiés par les graphes de Dynkin à poids qui correspondent à un \mathfrak{sl}_2 -triplet et dont les poids sont tous nuls, sauf un qui vaut 2 . Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie simple de type exceptionnel, on trouve dans le travail de Dynkin ([11] tables 16, 17, 18, 19, 20) une table donnant tous les graphes de Dynkin à poids qui correspondent à des \mathfrak{sl}_2 -triplets. On en déduit immédiatement la classification des espaces préhomogènes qui nous intéressent dans le cas où \mathfrak{g} est de type exceptionnel. Si \mathfrak{g} est de type classique, une telle table n'existe pas dans [11]. Dans ces cas, étant donné la racine isolée α_0 on connaît l'algèbre \mathfrak{k}_{θ} (son graphe de Dynkin

est celui de g où on a enlevé α_0 et les arêtes qui y menaient), ainsi que la représentation correspondante. En "fouillant" dans l'article de Sato-Kimura (qui examinent toutes les représentations des algèbres de Lie réductives), on en déduit la liste des espaces qui nous intéressent.

Table 1.

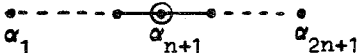
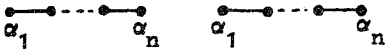
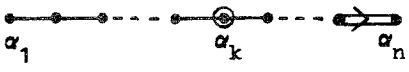
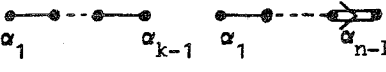
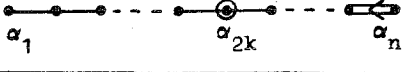
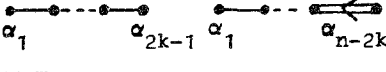


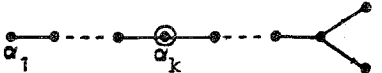
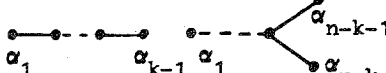

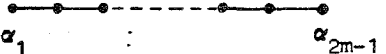

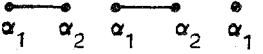
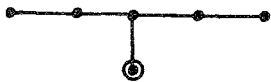


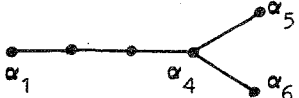



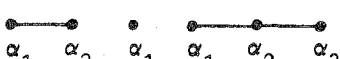



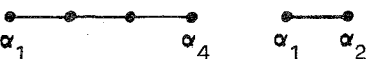

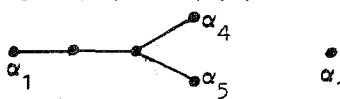

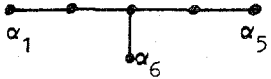
<p>1) A_{2n+1} :</p> 	<p>$GL(n, \mathbb{C}) \times SL(n, \mathbb{C})$</p> 	<p>$\omega_n \otimes \omega_1$ $\subset (1)$</p>
<p>2) B_n : $n \geq 2$; $3k \leq 2n+1$</p> 	<p>$GL(k, \mathbb{C}) \times SO(2(n-k) + 1, \mathbb{C})$ $3k \leq 2n+1$</p> 	<p>$\omega_{k-1} \otimes \omega_1$ (15)</p>
<p>3) C_n : $n \geq 3$; $6k \leq 2n$</p> 	<p>$GL(2k, \mathbb{C}) \times Sp(n-2k, \mathbb{C})$ $6k \leq 2n$</p> 	<p>$\omega_{2k-1} \otimes \omega_1$ (13)</p>
<p>4) C_n : $n \geq 3$</p> 	<p>$GL(n, \mathbb{C})$</p> 	<p>$2\omega_{n-1}$ (2)</p>
<p>5) D_n : $n \geq 4$; $3k \leq 2n$</p> 	<p>$GL(k, \mathbb{C}) \times SO(2(n-k))$ $3k \leq 2n$</p> 	<p>$\omega_{k-1} \otimes \omega_1$ (15)</p>
<p>6) D_{2m} : $m \geq 2$</p> 	<p>$GL(2m, \mathbb{C})$</p> 	<p>ω_{2m-1} (3)</p>
<p>7) E_6 :</p> 	<p>$SL(3, \mathbb{C}) \times SL(3, \mathbb{C}) \times GL(2, \mathbb{C})$</p> 	<p>$\omega_2 \otimes \omega_1 \otimes \omega_1$ (12)</p>

Table 1 (suite)

<p>8) E_6 :</p> 	<p>$GL(6, \mathbb{C})$</p> 	<p>ω_3 (5)</p>
<p>9) E_7 :</p> 	<p>$GL(1, \mathbb{C}) \times Spin(12)$</p> 	<p>$\omega_6(\frac{1}{2} Spin)$ (23)</p>
<p>10) E_7 :</p> 	<p>$GL(2, \mathbb{C}) \times SL(6, \mathbb{C})$</p> 	<p>$\omega_1 \otimes \omega_2$ (9)</p>
<p>11) E_7 :</p> 	<p>$SL(3, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C}) \times GL(4, \mathbb{C})$</p> 	<p>$\omega_2 \otimes \omega_1 \otimes \omega_1$ (non réduit)*</p>
<p>12) E_7 :</p> 	<p>$GL(7, \mathbb{C})$</p> 	<p>ω_3 (6)</p>
<p>13) E_7 :</p> 	<p>$SL(5, \mathbb{C}) \times GL(3, \mathbb{C})$</p> 	<p>$\omega_3 \otimes \omega_1$ (10)</p>
<p>14) E_7 :</p> 	<p>$Spin(10) \times GL(2, \mathbb{C})$</p> 	<p>$\omega_4(\frac{1}{2} Spin) \otimes \omega_1$ (20)</p>
<p>15) E_7 :</p> 	<p>$E_6 \times GL(1, \mathbb{C})$</p> 	<p>$\omega_5 \otimes \square$ (27)</p>

* L'espace préhomogène n° 11 ne figure pas dans la liste de Sato et Kimura parce qu'il est "non réduit" (voir [S-K], § 2, définition 10, p. 39).

Table 4 (suite)






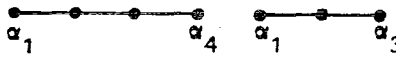
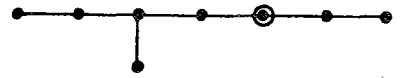
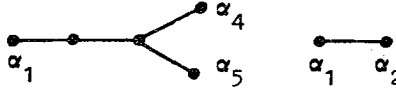
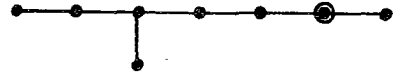
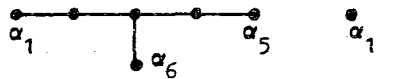

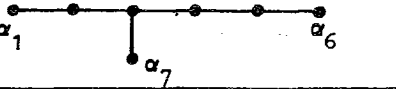
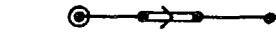
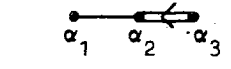
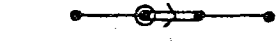
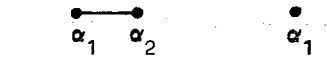
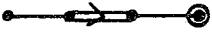
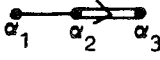


<p>16) E_8 :</p> 	<p>$\text{Spin}(14) \times \text{GL}(1, \mathbb{C})$</p> 	<p>$\omega_6(\frac{1}{2} \text{spin}) \otimes \square$ (24)</p>
<p>17) E_8 :</p> 	<p>$\text{GL}(8, \mathbb{C})$</p> 	<p>ω_3 (7)</p>
<p>18) E_8 :</p> 	<p>$\text{SL}(5, \mathbb{C}) \times \text{GL}(4, \mathbb{C})$</p> 	<p>$\omega_3 \otimes \omega_1$ (11)</p>
<p>19) E_8 :</p> 	<p>$\text{Spin}(10) \times \text{GL}(3, \mathbb{C})$</p> 	<p>$\omega_4(\frac{1}{2} \text{Spin}) \otimes \omega_1$ (21)</p>
<p>20) E_8 :</p> 	<p>$E_6 \times \text{GL}(2, \mathbb{C})$</p> 	<p>$\omega_5 \otimes \omega_1$ (28)</p>
<p>21) E_8 :</p> 	<p>$E_7 \otimes \text{GL}(1, \mathbb{C})$</p> 	<p>$\omega_6 \otimes \square$ (29)</p>
<p>22) F_4 :</p> 	<p>$\text{Sp}(3, \mathbb{C}) \times \text{GL}(1, \mathbb{C})$</p> 	<p>$\omega_3 \otimes \square$ (14)</p>
<p>23) F_4 :</p> 	<p>$\text{SL}(3, \mathbb{C}) \times \text{GL}(2, \mathbb{C})$</p> 	<p>$2\omega_1 \otimes \omega_1$ (8)</p>

Table 1 (suite)

<p>24) F_4 :</p> 	<p>$\text{Spin}(7) \times \text{GL}(1, \mathbb{C})$</p> 	<p>$\omega_3(\text{Spin}) \oplus \square$ (16)</p>
<p>25) G_2 :</p> 	<p>$\text{GL}(2, \mathbb{C})$</p> 	<p>$3 \omega_1$ (4)</p>

Remarque II.3.1.

L'espace préhomogène n° 25 de la table précédente est l'exemple des formes cubiques à deux variables étudié par Shintani ([12]).

III. Le cas où n_θ^+ est commutative.

Soit P_θ un sous-groupe parabolique standard quelconque de G . Nous dirons (comme Borel et Tits dans [13]) que P_θ est auto-opposé si P_θ et P_θ^- sont conjugués. Soit alors w_θ l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et soit \bar{w}_θ un représentant de w_θ dans G ; on a alors $\bar{w}_\theta P_\theta \bar{w}_\theta^{-1} = P_{-w_\theta}^-$. On en déduit que :

$$P_\theta \text{ auto-opposé} \Leftrightarrow \exists g \in G, g.n_\theta^+ = n_\theta^- \Leftrightarrow w_\theta \theta = -\theta \Leftrightarrow \bar{w}_\theta.n_\theta^+ = n_\theta^-.$$

PROPOSITION III.1.

Soit (y, h, x) un \mathfrak{sl}_2 -triplet dans \mathfrak{g} tel que $h \in \mathfrak{h}$ et $\alpha(h) = 0, 1$ ou 2 pour tout $\alpha \in \Psi$. Soit $\theta = \{\alpha \in \Psi, \alpha(h) = 0\}$. Le sous-groupe parabolique P_θ associé à θ est auto-opposé.

Démonstration : Soit $\mathfrak{g}_p = \{X \in \mathfrak{g}, [h, X] = pX\}$ et soit $\gamma = e^{\text{adx}} e^{\text{ady}} e^{-\text{adx}} \in G$.

On a $n_\theta^+ = \sum_{p \geq 1} \mathfrak{g}_p$, $n_\theta^- = \sum_{p \leq -1} \mathfrak{g}_p$ et $\mathfrak{l}_\theta = \mathfrak{g}_0$.

D'après [9] (chap. VIII § 7 n° 5 prop. 6) γ est un isomorphisme de \mathfrak{g}_{-p} sur \mathfrak{g}_p (donc de n_θ^- sur n_θ^+) et de \mathfrak{l}_θ sur lui-même.

P_θ est donc auto-opposé.

C.Q.F.D.

Ce qui précède montre que si l'espace préhomogène irréductible $(L_\theta, d_1(\theta))$ est régulier, alors P_θ est auto-opposé. Cette condition n'est en général pas suffisante, elle le sera dans le cas où n_θ^+ est commutative comme on le verra ci-dessous.

Nous supposons dorénavant que n_θ^+ soit commutative. Cette hypothèse est équivalente au fait que $d_1(\theta) = n_\theta^+$ (ou $d_{-1}(\theta) = n_\theta^-$). Soit $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_n$ la décomposition du système de racines de \mathfrak{g} en composantes irréductibles (chaque R_i correspond à un idéal simple de \mathfrak{g}). Soit γ_i la plus grande racine de R_i par rapport à la base $\psi \cap R_i$. On a :

$$n_\theta^+ \text{ commutative} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Card}((\psi - \theta) \cap R_i) \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, n, \text{ et si} \\ \alpha \in (\psi - \theta) \cap R_i, \text{ le coefficient de } \alpha \text{ dans la} \\ \text{décomposition de } \gamma_i \text{ en racines simples est } 1. \end{cases}$$

On peut donc supposer \mathfrak{g} simple et dans ce cas, la commutativité de n_θ^+ implique que P_θ soit maximal.

THEOREME III.2.

Supposons que P_θ soit maximal, auto-opposé et que n_θ^+ soit commutative. Alors pour tout caractère algébrique χ de L_θ , χ^2 est le caractère invariant relatif f_{χ^2} de l'espace préhomogène (L_θ, n_θ^-) .

Démonstration : Soit w_0 l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et soit \bar{w}_0 un représentant de w_0 dans G (inclus dans le normalisateur de \mathfrak{h}). On sait que $N_\theta^- P_\theta$ et $\bar{w}_0^{-1} N_\theta^- P_\theta$ sont des ouverts de Zariski non vides de G , donc $N_\theta^- P_\theta \cap \bar{w}_0^{-1} N_\theta^- P_\theta \neq \emptyset$. Il existe donc v et v' dans N_θ^- et p et p' dans P_θ tels que $vp = \bar{w}_0^{-1} v'p'$, c'est-à-dire $\bar{w}_0^{-1} v = v'p'p^{-1}$. On en déduit que $N_\theta^- \cap \bar{w}_0^{-1} N_\theta^- P_\theta = \tilde{\Omega}$ est un ouvert de Zariski non vide de N_θ^- . $\tilde{\Omega}$ est stable par L_θ ; pour le prouver il suffit de démontrer que $\bar{w}_0^{-1} N_\theta^- P_\theta$ est stable par L_θ . Soit $g \in L_\theta$ et $\bar{w}_0^{-1} np$ un élément de $\bar{w}_0^{-1} N_\theta^- P_\theta$ ($n \in N_\theta^-$, $p \in P_\theta$).

On a $\overline{w}_0^{-1} n p g^{-1} = \overline{w}_0^{-1} (\overline{w}_0 g \overline{w}_0^{-1}) n p g^{-1}$. P_θ étant auto-opposé L_θ est stable par la conjugaison par \overline{w}_0 , donc $\overline{w}_0 g \overline{w}_0^{-1} = g' \in L_\theta$ et $\overline{w}_0^{-1} (\overline{w}_0 g \overline{w}_0^{-1}) n p g^{-1} = \overline{w}_0^{-1} g' n p g^{-1} = \overline{w}_0^{-1} g' n g'^{-1} g' p g^{-1}$.

Comme $g' n g'^{-1} \in N_\theta^-$ et $g' p g^{-1} \in P_\theta$, on a démontré que $\tilde{\Omega}$ est L_θ -stable.

Soient $\tilde{\gamma}$ et \tilde{p} les applications définies sur $\tilde{\Omega}$ par $\overline{w}_0 v = \tilde{\gamma}(v) \tilde{p}(v)$ ($v \in \tilde{\Omega}$, $\tilde{\gamma}(v) \in N_\theta^-$, $\tilde{p}(v) \in P_\theta$). On remarquera, puisque \overline{w}_0^2 appartient au tore d'algèbre de Lie \mathfrak{h} , que $\tilde{\gamma}(v) \in \tilde{\Omega}$. Soit $g \in L_\theta$, on a :

$\overline{w}_0 g v g^{-1} = \overline{w}_0 g \overline{w}_0^{-1} \overline{w}_0 v g^{-1} = \tilde{\gamma}(g v g^{-1}) \tilde{p}(g v g^{-1})$, d'où :

$$\begin{aligned} \overline{w}_0 v &= (\overline{w}_0 g^{-1} \overline{w}_0^{-1}) \tilde{\gamma}(g v g^{-1}) (\overline{w}_0 g \overline{w}_0^{-1}) (\overline{w}_0 g^{-1} \overline{w}_0^{-1}) \tilde{p}(g v g^{-1}) g \\ &= \tilde{\gamma}(v) \tilde{p}(v) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$(1) \quad \begin{aligned} \tilde{\gamma}(g v g^{-1}) &= (\overline{w}_0 g \overline{w}_0^{-1}) \tilde{\gamma}(v) (\overline{w}_0 g^{-1} \overline{w}_0^{-1}) \quad \text{et} \\ \tilde{p}(g v g^{-1}) &= (\overline{w}_0 g \overline{w}_0^{-1}) \tilde{p}(v) g^{-1}. \end{aligned}$$

Puisque N_θ^- est unipotent, l'exponentielle est un isomorphisme algébrique entre n_θ^- et N_θ^- . Soit $\Omega = \exp^{-1}(\tilde{\Omega})$. Soit χ un caractère algébrique de L_θ considéré comme caractère de P_θ en le prenant trivial sur N_θ^+ .

Soit $f_{\chi^{-2}}$ l'application définie sur Ω par $f_{\chi^{-2}}(n) = \chi(\tilde{p}(\exp n))$.

D'après l'équation (1) ci-dessus on a, si $g \in L_\theta$:

$$\begin{aligned} f_{\chi^{-2}}(gn) &= \chi(\tilde{p}(\exp gn)) = \chi(\tilde{p}(g(\exp n)g^{-1})) \\ &= \chi(\overline{w}_0 g \overline{w}_0^{-1}) \chi(g^{-1}) f_{\chi^{-2}}(n) = \chi^{-2}(g) f_{\chi^{-2}}(n) \end{aligned}$$

(car $\chi(\overline{w}_0 g \overline{w}_0^{-1}) = \chi^{-1}(g)$, puisque $\overline{w}_0 g \overline{w}_0^{-1} = g^{-1}$ lorsque g est dans le centre de L_θ). Ceci montre que $f_{\chi^{-2}}$ est un invariant relatif de caractère

χ^{-2} . Comme la représentation (L_θ, n_θ^-) est irréductible, le complémentaire

de la grosse orbite est une hypersurface irréductible définie par un polynôme

P et tous les invariants relatifs sont des puissances entières de f (voir

[1]). On en déduit facilement que Ω est la grosse orbite de (L_θ, n_θ^-)

C.Q.F.D.

Remarque III.3.

Dans ce qui précède, la commutativité de n_{θ}^+ ne sert qu'à rendre préhomogène la représentation $(L_{\theta}, n_{\theta}^-)$. En fait, on a démontré le résultat plus général suivant : soit P_{θ} un sous-groupe parabolique en position standard quelconque de G , astreint à la seule condition d'être auto-opposé. Dans ce cas, il existe sur n_{θ}^+ , pour tout caractère algébrique χ de L_{θ} , un invariant relatif de la représentation $(L_{\theta}, n_{\theta}^-)$ de caractère $\chi_{\bar{w}_0} \cdot \chi^{-1}$ où $\chi_{\bar{w}_0}$ est défini par $\chi_{\bar{w}_0}(g) = \chi(\bar{w}_0 g \bar{w}_0^{-1})$.

Le théorème précédent ainsi que des tables de racines telles que celles que l'on peut trouver à la fin de [6] permettent de dresser une liste des espaces préhomogènes $(L_{\theta}, n_{\theta}^-)$ irréductibles réguliers tels que n_{θ}^- soit commutative. Cette liste constitue la table 2 ci-dessous, les conventions étant celles de la table 1, le numéro suivant le graphe étant celui de l'espace préhomogène de la table 1.

Table 2.

A_{2n+1}		1
B_n		2
C_n		4
D_n		5
D_{2n}		6
E_7		15

On définit la fonction zêta locale d'un espace préhomogène irréductible et régulier (G, V) par

$$Z(\varphi, s) = \int_V \varphi(x) |f(x)|^s d^*x$$

où d^*x désigne la mesure G -invariante sur la grosse orbite de V , s est un nombre complexe, φ une fonction de Schwartz sur V et f l'invariant relatif fondamental. De telles fonctions zêta ont été étudiées par Sato et Shintani ([12], [14], [16]) qui ont établi une équation fonctionnelle liant $Z(\varphi, s)$ et $Z(\hat{\varphi}, s)$ où $\hat{\varphi}$ est la transformée de Fourier de φ . Nous allons montrer que lorsque n_{θ}^+ est commutative la fonction zêta locale de $(L_{\theta}, n_{\theta}^-)$ s'interprète comme une intégrale d'entrelacement d'une série principale de représentations de G induites à partir de P_{θ} .

Soit χ un caractère algébrique de L_{θ} , on le considère comme un caractère de P_{θ} en posant $\chi(N_{\theta}^+) = 1$. Soit δ la fonction module sur P_{θ} définie par

$$\int_{P_{\theta}} \tilde{\varphi}(p p') \delta(p') dp = \int_{P_{\theta}} \tilde{\varphi}(p) dp$$

où dp est une mesure de Haar à gauche fixée sur P_{θ} , l'égalité ayant lieu pour toute fonction intégrable $\tilde{\varphi}$. Soit $s \in \mathbb{C}$ et soit π_s la représentation de G induite par le caractère $|\chi|^s$ de P_{θ} . L'espace de π_s est l'ensemble

$$D_s = \{ \varphi \in C^{\infty}(G), \varphi(gp) = \delta(p)^{\frac{1}{2}} |\chi(p)|^{-s} \varphi(g), g \in G, p \in P_{\theta} \}$$

($C^{\infty}(G)$ désigne les fonctions infiniment différentiables sur G). La représentation π_s consiste à faire opérer le groupe par translations à gauche dans D_s . On remarquera que les fonctions de D_s sont définies par leur restriction à N_{θ}^- et que les fonctions C^{∞} à support compact dans N_{θ}^- sont des restrictions d'éléments de D_s . En effet si $\varphi \in \mathcal{D}(N_{\theta}^-)$, la fonction sur G , encore notée φ , définie par

$$\begin{aligned} \varphi(vp) &= \delta(p)^{\frac{1}{2}} |\chi(p)|^{-s} \varphi(v) \\ \varphi(g) &= 0 \text{ si } g \notin N_{\theta}^- P_{\theta} \end{aligned}$$

appartient à D_s .

Supposons P_θ auto-opposé et maximal. Pour $\varphi \in D_s$ on pose

$$A(s, \bar{w}_\theta) \varphi(g) = \int_{N_\theta^-} \varphi(g \bar{w}_\theta v) dv \text{ où } dv \text{ est une mesure de Haar sur } N_\theta^-.$$

Il est bien connu que l'opérateur $\varphi \rightarrow A(s, \bar{w}_\theta) \varphi$ entrelace, du moins formellement, les représentations (π_s, D_s) et (π_{-s}, D_{-s}) .

THEOREME III.4.

Supposons que P_θ soit maximal, auto-opposé et que n_θ^+ soit commutative.

Si φ est une fonction C^∞ à support compact sur N_θ^- on a

$$A(s, \bar{w}_\theta) \varphi(\exp n') = \int_{\Omega} \varphi(\exp(n+n')) |f_{\chi^{-2}}(n)|^s d^*n$$

où d^*n est la mesure L_θ -invariante portée par Ω .

Démonstration : On a

$$\begin{aligned} A(s, \bar{w}_\theta) \varphi(\exp n') &= \int_{N_\theta^-} \varphi(\exp n' \cdot \bar{w}_\theta \cdot v) dv \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} \varphi(\exp n' \cdot \bar{w}_\theta \cdot v) dv = \int_{\tilde{\Omega}} \varphi(\exp n' \cdot \tilde{\gamma}(v) \cdot \tilde{p}(v)) dv \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} \varphi(\exp n' \cdot \tilde{\gamma}(v)) |\chi(\tilde{p}(v))|^{-s} \delta^{\frac{1}{2}}(\tilde{p}(v)) dv \end{aligned}$$

LEMME III.5.

L'image de la mesure dv sur $\tilde{\Omega}$ par l'application $\tilde{\gamma}$ est la mesure $\delta(\tilde{p}(v)) dv$.

La démonstration de ce lemme est identique à celle faite par G. Schiffmann en rang un ([15] prop. 2.2). Donc

$$A(s, \bar{w}_\theta) \varphi(\exp n') = \int_{\tilde{\Omega}} \varphi(\exp n' \cdot v) |\chi(\tilde{p}(\tilde{\gamma}^{-1}(v)))|^{-s} \delta^{\frac{1}{2}}(\tilde{p}(\tilde{\gamma}^{-1}(v))) \delta(\tilde{p}(v)) dv.$$

Or il est facile de voir que $\tilde{p}(\tilde{\gamma}^{-1}(v)) = \tilde{p}(v)^{-1} \bar{w}_\theta^2$. On en déduit que

$$A(s, \bar{w}_\theta) \varphi(\exp n') = |\chi(\bar{w}_\theta^2)|^{-s} \delta^{\frac{1}{2}}(\bar{w}_\theta^2) \int_{\tilde{\Omega}} \varphi(\exp n' \cdot v) |\chi(\tilde{p}(v))|^s \delta^{\frac{1}{2}}(\tilde{p}(v)) dv$$

Soit $v = \exp n$ et désignons par dn la mesure sur n_{θ}^{-} qui est l'image de dv par l'application \exp^{-1} . On a alors

$$\begin{aligned} A(s, \bar{w}_0) \varphi(\exp n') &= |\chi(\bar{w}_0^2)|^{-s} \delta^{\frac{1}{2}}(\bar{w}_0^2) \int_{\Omega} \varphi(\exp(n'+n)) |\chi(\tilde{p}(\exp n))|^s \delta^{\frac{1}{2}}(\tilde{p}(\exp n)) dn \\ &= |\chi(\bar{w}_0^2)|^{-s} \delta^{\frac{1}{2}}(\bar{w}_0^2) \int_{\Omega} \varphi(\exp(n'+n)) |f_{\chi^{-2}}(n)|^s \delta^{\frac{1}{2}}(\tilde{p}(\exp n)) dn . \end{aligned}$$

LEMME III.6.

$d^*n = \delta^{\frac{1}{2}}(\tilde{p}(\exp n)) dn$ est une mesure sur Ω invariante par l'action de L_{θ} . (Une telle mesure est unique à une constante près).

Démonstration du lemme : Il suffit de montrer que $\delta^{\frac{1}{2}}(\tilde{p}(v)) dv$ est une mesure sur $\tilde{\Omega}$ invariante par L_{θ} . Remarquons que si $g \in L_{\theta}$, $\delta(g) = |\text{Det Ad}(g^{-1})|_{n_{\theta}^+}| = |\text{Det Ad}g|_{n_{\theta}^-}|$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} f(gvg^{-1}) \delta^{\frac{1}{2}}(\tilde{p}(v)) dv &= \int_{\tilde{\Omega}} f(v) \delta^{\frac{1}{2}}(\tilde{p}(g^{-1}vg)) d(g^{-1}vg) \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} f(v) \delta^{\frac{1}{2}}[\bar{w}_0 g^{-1} \bar{w}_0^{-1} \tilde{p}(v) g] d(g^{-1}vg) \quad (\text{d'après la relation (1) ci-dessus}) \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} f(v) \delta^{\frac{1}{2}}(\tilde{p}(v)) \delta(g) |\text{Det Ad}g^{-1}|_{n_{\theta}^-}| dv = \int_{\tilde{\Omega}} f(v) \delta^{\frac{1}{2}}(\tilde{p}(v)) dv , \end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme. On a donc

$$A(s, \bar{w}_0) \varphi(\exp n') = |\chi(\bar{w}_0^2)|^{-s} \delta^{\frac{1}{2}}(\bar{w}_0^2) \int_{\tilde{\Omega}} \varphi(\exp(n'+n)) |f_{\chi^{-2}}(n)|^s d^*n$$

et ceci démontre le théorème à condition de prouver le résultat suivant.

LEMME III.7.

$$|\chi(\bar{w}_0^2)| = \delta(\bar{w}_0^2) = 1 .$$

Démonstration du lemme : Puisque P_{θ} est maximal et que dans ce cas le groupe des caractères de L_{θ} est engendré par un seul élément, il suffit de démontrer que $|\delta(\bar{w}_{\theta}^2)| = 1$. On sait ([9], chap. VIII § 5 exercice 10) qu'on peut choisir un représentant \bar{w}'_0 de w_0 de sorte que $\bar{w}'_0(X_{\alpha}) = \pm X_{w_0}(\alpha)$ (les X_{α} ($\alpha \in R$) formant un système de Chevalley). Soit T le tore

d'algèbre de Lie \mathfrak{h} et soit $h \in T$ tel que $\bar{w}_0 = \bar{w}'_0 \cdot h$. On obtient alors facilement que $\bar{w}_0^2 X_\alpha = \pm \alpha(h) w_0(\alpha)(h) X_\alpha$ (les racines étant considérées comme des caractères de T). On a alors $\delta(\bar{w}_0^2) = |\text{Det}(\text{Ad}(\bar{w}_0^2)|_{\mathfrak{n}_\theta^+})|^{-1}$

$$= \prod_{\alpha \in R^+_{-\langle \theta \rangle}} (|\alpha(h)| |w_0(\alpha)(h)|)^{-1}$$

et puisque P_θ est auto-opposé, ceci vaut

$$\prod_{\alpha \in R^+_{-\langle \theta \rangle}} (|\alpha(h)| |\alpha(h)|^{-1})^{-1} = 1$$

C.Q.F.D.

Remarque III.8. La démonstration ci-dessus n'utilise pas vraiment la commutativité de \mathfrak{n}_θ^+ . En fait on démontre ainsi que si le groupe P_θ est auto-opposé la "fonction zêta locale" de l'invariant relatif $f_{\chi^{-2}}$ (voir Remarque III.3) s'interprète comme intégrale d'entrelacement.

Nous allons à présent montrer que, si P_θ est maximal, auto-opposé et si \mathfrak{n}_θ^+ est commutative, la grosse orbite possède une structure d'espace symétrique c'est-à-dire que le stabilisateur d'un point de la grosse orbite a pour algèbre de Lie l'ensemble des points fixes d'un automorphisme involutif de \mathfrak{l}_θ .

Rappelons qu'avec les hypothèses faites, d'après les théorèmes II.2.14 et III.2, l'espace préhomogène $(L_\theta, \mathfrak{n}_\theta^+)$ est associé à un \mathfrak{sl}_2 -triplet quasi-principal.

THEOREME III.9.

Soit P_θ un sous-groupe parabolique maximal auto-opposé tel que N_θ^+ soit commutatif. Soient $y \in \mathfrak{n}_\theta^-$ et $x \in \mathfrak{n}_\theta^+$ tels que (y, H_θ^θ, x) soit un \mathfrak{sl}_2 -triplet. Soit $\gamma = e^{\text{adx}} e^{\text{ady}} e^{\text{adx}}$. La restriction de γ à \mathfrak{l}_θ est d'ordre 2 et l'ensemble des points fixes de γ est la sous-algèbre d'isotropie de x .

Démonstration : Soit \mathfrak{A} la sous-algèbre isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ engendrée par (y, H_θ^θ, x) et considérons \mathfrak{g} comme un \mathfrak{A} -module. Soit \mathfrak{g}^x le centralisateur de x dans \mathfrak{g} . Le centralisateur de H_θ^θ dans \mathfrak{g} est \mathfrak{l}_θ . Il est facile de voir qu'un élément de \mathfrak{g} qui commute à x et à H_θ^θ commute à y . On en déduit que la sous-algèbre d'isotropie $\mathfrak{g}^x \cap \mathfrak{l}_\theta$ est égale à $\{Z \in \mathfrak{g}, [\mathfrak{A}, Z] = 0\}$, autrement dit c'est la composante isotypique du module trivial dans \mathfrak{g} .

Il est bien connu ([9], chap. VIII § 1 n° 5) que γ est un automorphisme de \mathfrak{h}_θ et que γ^2 est l'identité sur les sous-modules de dimension impaire. Les vecteurs de \mathfrak{n}_θ^+ sont des vecteurs dominants de poids 2, ils engendrent donc des sous-modules de dimension 3. On en déduit que \mathfrak{g} est somme de sous-modules de dimension 3 et de dimension 1. γ^2 est donc l'identité sur \mathfrak{g} . Le fait que les éléments de $\mathfrak{g}^x \cap \mathfrak{h}_\theta$ commutent à x et y implique facilement que $\gamma = 1$ sur $\mathfrak{g}^x \cap \mathfrak{h}_\theta$. Il existe un supplémentaire de $\mathfrak{g}^x \cap \mathfrak{h}_\theta$ dans \mathfrak{h}_θ formé de vecteurs de poids 0 de sous-modules irréductibles de dimension 3. Il ressort de [9] (chap. VIII § 1 n° 5) que γ opère par -1 sur ces vecteurs.

C.Q.F.D.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] SATO M. - KIMURA T. A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants ; Nagoya Math. J. vol. 65 (1977) .
- [2] RUBENTHALER H. Espaces vectoriels préhomogènes, sous-groupes paraboliques et sl_2 -triplets. C.R. Acad. Sc. Paris t.290 (21 janvier 1980) .
- [3] VINBERG E.B. On the classification of the nilpotent elements of graded Lie algebras. Soviet Math. Dokl. vol. 16 (1975) n° 6 .
- [4] POMMERENING K. Über die unipotenten Klassen reductiver Gruppen II. J. Algebra vol.65 n° 2 (1980) .
- [5] POMMERENING K. Über die unipotenten Klassen reductiver Gruppen. J. Algebra 49 (1977) .
- [6] BOURBAKI N. Groupes et algèbres de Lie ch. 4,5 et 6 Hermann Paris (1968) .
- [7] SERRE J.P. Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, New-York (1966) .
- [8] KOSTANT B. The principal three-dimensional subgroup and the Betti members of a complex Lie group ; Amer. J. Math. 81 (1959) .
- [9] BOURBAKI N. Groupes et algèbres de Lie chap. 7 et 8 Hermann Paris (1975) .
- [10] Séminaire CHEVALLEY Classification des groupes de Lie algébriques vol. 2, Notes multigraphiées Ecole Normale Supérieure, Paris (1956-58) .

